GRANDEURS ET NOMBRES L'HISTOIRE EDIFIANTE D'UN COUPLE FECOND

Jean-Pierre FRIEDELMEYER
Irem de Strasbourg

Ce texte est celui d'une conférence donnée à Rennes lors du 13ème colloque Inter-Irem Epistémologie et histoire des mathématiques ; (6 au 8 mai 2000).

Le lecteur peut d'emblée être surpris, voire dérangé par un tel titre s'appliquant à des concepts mathématiques. Pourtant c'est bien une histoire édifiante que je veux vous raconter, mais en donnant au mot « **édifiant** » le double sens étymologique du mot d'origine latine *Aedificare* qui signifie à la fois : *construire,* lequel a donné **édifice**, et : *éduquer, porter à la vertu,* ce qui est le sens gardé couramment par le mot « **édifiant** ». On retrouve d'ailleurs cette dualité de sens dans le mot « élever » car on élève un monument mais aussi un enfant lequel, de ce fait, s'appelle fort justement « **élève** ». Et comme cet article a pour ambition de relier l'histoire des mathématiques, c'est-à-dire le récit de leur construction dans le temps à la pédagogie des mathématiques c'est-à-dire à la structuration de la pensée des élèves, le terme « **édifiant** » me paraît tout à fait adapté au thème de cet article.

Une grande partie des mathématiques s'est effectivement édifiée (construite) sur la relation qu'ont entretenue les grandeurs et les nombres, particulièrement par l'intermédiaire de la **mesure des grandeurs.** L'importance de cette relation est soulignée par exemple dans un célèbre livre de Henri Lebesgue intitulé *La mesure des grandeurs* et dont voici un extrait de l'introduction :

Il n'y a pas de sujet plus fondamental : la mesure des grandeurs est ***le point de départ de toutes les applications des mathématiques*** [1] *et comme les mathématiques appliquées ont évidemment précédé les mathématiques pures, la logique mathématique, on imagine d'ordinaire que la mesure des aires et des volumes est à l'origine de la Géométrie ; d'autre part,* ***cette mesure fournit le nombre, c'est-à-dire l'objet***

1 C'est nous qui soulignons.

***même de l'Analyse**. Aussi parle-t-on de la mesure des grandeurs dans les trois enseignements : primaire, secondaire, supérieur ; le rapprochement de ce que l'on fait dans les trois ordres d'enseignements fournit un exemple de **ces efforts de compréhension d'ensemble**, de coordination qui me paraîtraient pouvoir servir plus efficacement à la formation des futurs professeurs que le travail exigé d'eux : le fignolage verbal de leçons isolées.* [2]

Nous en avons souligné trois idées fondamentales présentes tout au long de cet exposé:

a) la mesure est le point de départ de toutes les applications des mathématiques,

b) elle fournit le nombre, c'est-à-dire l'objet de l'analyse,

c) elle fournit un exemple de compréhension globale pouvant servir efficacement à la formation des futurs professeurs.

Nous ferons cependant deux réserves au texte de Lebesgue : l'une qui tient au fait que l'enseignement a beaucoup évolué en France, spécialement sur la question des grandeurs : celles-ci ont totalement disparu de l'enseignement mathématique universitaire, et presque aussi du secondaire (notons qu'elles y ont repris une certaine place avec les nouveaux programmes en collège). La raison principale de cette éviction sera donnée ci-dessous. L'autre réserve concerne l'histoire du couple « **grandeurs, nombres** », laquelle ne se limite nullement au problème de la mesure. Une histoire élargie peut nous donner des clés de compréhension des difficultés inhérentes à la mesure des grandeurs et peut-être des solutions à leur enseignement.

2 H. Lebesgue ; La mesure des grandeurs ; rééd. A. Blanchard ; 1975 ; p.2.

Le mérite de Lebesgue est d'attirer notre attention sur le fait que l'enseignement des mathématiques ne doit pas être pensé à l'intérieur et en fonction des seuls programmes et objectifs de l'un des niveaux, collège, lycée ou université, mais bien plutôt dans une dynamique qui, s'appuyant sur les acquis de l'école primaire, conduit l'élève au lycée puis à l'université. Le thème de la mesure des grandeurs est en ce sens le plus représentatif d'une double transversalité qui doit inspirer continuellement l'enseignement des mathématiques : transversalité verticale qui organise les programmes dans une vue d'ensemble allant depuis l'école primaire jusqu'au début de l'université ; transversalité horizontale aussi, en ce que le thème de la mesure des grandeurs conditionne directement l'apprentissage des sciences en général, et particulièrement celui des sciences physiques, en ce que la physique est expérimentale et que l'expérimentation passe par la mesure des grandeurs et leurs variations.

Mais il y a une énorme difficulté, sinon un paradoxe, pour organiser et penser l'enseignement de la mesure des grandeurs d'une manière globale, selon les trois ordres d'enseignement. En effet, dès l'école primaire on est amené à demander à l'élève de savoir utiliser telle ou telle formule de mesure : aire d'un triangle ou d'un rectangle ; aire d'un disque, périmètre d'un cercle ; volume d'un cube, etc. L'apprentissage de ces formules répond à une simple nécessité pratique, celle d'un arpenteur, d'un tonnelier, d'un charpentier, par exemple. Au collège, le moment est venu d'initier l'élève à une activité proprement mathématique, c'est-à-dire de raisonnement, de justification, de démonstration qui dépasse la simple mise en forme de faits et de résultats observés ou expérimentés. Or les formules évoquées ci-dessus restent trop difficiles à démontrer à ce niveau, car elles mettent en jeu une gestion du continu et de l'infini qui est le propre de l 'analyse enseignée seulement à partir du lycée. D'où le paradoxe : les calculs d'aires, de volumes, de grandeurs physiques, si essentiels tant en mathématiques qu'en physique, sont renvoyés en classe terminale dans un cours alinéa du chapitre *Calcul intégral : Exemples simples d'emploi de calcul intégral pour le calcul de grandeurs géométriques, mécaniques, physiques.* Autrement dit, notre enseignement des mathématiques considère qu'avant la classe de terminale il n'a rien à dire , ou il ne **peut** rien dire de précis, de rigoureusement prouvé, concernant la mesure de figures aussi simples que le rectangle, le triangle ou le cercle. Faut-il s'étonner que cet enseignement se tourne alors de façon privilégiée vers des activités essentiellement numériques, calculatoires et algorithmiques, et très peu vers des activités de raisonnement ?

Heureusement l'histoire nous apprend que l'étude du couple « **grandeurs, nombres** » ne se limite pas au problème de la mesure. Dans sa récente thèse[3], Olivier Keller a attiré notre attention sur la complexité et l'ambiguïté de la relation entre l'origine de la géométrie et la pratique de la mesure :

Si l'on accepte en effet (pour le mot géométrie) *la définition étymologique, la mesure des terrains, l'histoire de la géométrie commence très tard, probablement au néolithique. Mais il serait parfaitement arbitraire d'accepter cela comme un commencement : la mesure au sens le plus simple associe un nombre à un segment de droite, une surface ou un volume, et présuppose donc les concepts nullement spontanés de droite, d'angle droit — carré et cube — et surtout de figures standards qui servent d'unités. L'association faite par la mesure n'est pas une simple correspondance immédiate : il faut en règle générale changer la forme de l'objet à mesurer pour la ramener, de gré ou de force à un segment de droite, à des carrés ou à des cubes, et nous verrons que la manipulation des formes, compositions et décompositions précède de très loin dans l'histoire la mesure des grandeurs.*

Donc nous insistons d'emblée sur le fait que nous n'allons pas traiter principalement de la mesure des grandeurs, cette expression évoquant une relation entre les grandeurs et les nombres déjà constituée, et déjà opératoire. Notre exposé souhaite développer avant tout **l'histoire du couple** « grandeurs et nombres », dans ce qu'elle a pu avoir de problématique à différents moments du passé ; comment chacun des termes du couple s'est modifié, enrichi au fil de cette histoire, non pas individuellement et séparément, mais dans sa confrontation avec l'autre ; comment le concept de nombre s'est élargi grâce à la volonté et la nécessité de penser en termes de nombres une réalité physique appréhendée d'abord en termes de grandeurs ; et comment la compréhension de la réalité des grandeurs s'est approfondie dans l'étude de ce qui fait leur caractère le plus spécifique : le **continu**, et son aboutissement dans la construction de ce que nous appelons **les réels**.

Par l'utilisation du terme de confrontation, nous voulons souligner le fait que la relation « **grandeurs, nombres** » n'est ni automatique ou spontanée, ni régulière, mais qu'elle s'est développée dans une certaine **tension** pouvant impliquer, comme dans l'histoire ordinaire d'un couple humain, des moments de crise ou de séparation ; et il y aura dans cette histoire aussi, des enfants

3 O. Keller ; Préhistoire de la géométrie : la gestation d'une science d'après les sources archéologiques et ethnographiques, Thèse pour le doctorat de l'EHESS, p. 42

illégitimes et finalement un véritable divorce :

Moment de crise, si l'on entend par là, avec J.T. Desanti, *une période marquée par une ouverture de conflits, un remaniement de principes, un réaménagement de méthodes qui accompagnent toujours le « progrès », à condition d'appeler progrès le triple mouvement d'élargissement des champs opératoires, d'extension des domaines d'objets, de spécification des systèmes d'axiomes* [4]

Enfants illégitimes, lorsque l'on pense à tous ces nombres longtemps refusés en tant que nombres, les négatifs, les imaginaires, les sourds, au point que la solution finalement adoptée au 19ème siècle pour leur reconnaissance nécessitera un divorce consommé entre grandeurs et nombres et la mise à l'écart du concept de grandeur dans la partie dite pure des mathématiques. Consultez n'importe quel dictionnaire de mathématiques d'aujourd'hui, vous n'y trouverez pas l'entrée « **grandeur** ». Par contre vous la trouverez développée sur plusieurs pages dans tous les dictionnaires d'avant le 20ème siècle, ou dans le *Dictionnaire de mathématiques élémentaires* de Stella Baruk, qui en a compris tout l'enjeu pédagogique.

Comme dans tout couple qui se sépare, il est important que celui qui a la garde des enfants respecte et entretienne la mémoire de l'absent. La **Mémoire des nombres** [5] est indissociable de la **Mémoire des grandeurs**, dans la mesure où l'histoire de tous les deux a été liée étroitement pendant au moins vingt siècles, et que c'est cette histoire qui a façonné, enrichi, approfondi **l'un et l'autre**.

4 J.T. Desanti ; Une crise de développement exemplaire : la découverte des nombres irrationnels, in Logique et connaissance scientifique, Bibliothèque de la Pléiade, p.439 à 464

5 thème d'un précédent colloque de la Commission Inter - Irem d'histoire et d'épistémologie des mathématiques à Cherbourg (le dixième, en 1994)

Il n'est évidemment pas possible d'en retracer ici les différentes étapes. Nous nous limiterons à deux moments particulièrement représentatifs de la nature tourmentée des relations entre grandeurs et nombres :

1. La découverte des grandeurs incommensurables, *ou :* **la déraisonnable inaptitude du nombre à mesurer certaines grandeurs.**

2. L'invention d'une physique mathématique, *ou :* **comment intégrer le changement, le mouvement dans les mathématiques.**

Ces deux moments ont été des temps particulièrement forts et féconds puisque le premier a donné naissance aux nombres **irrationnels** et par là, aux nombres réels ; et le second aux grandeurs **variables** c'est-à-dire à l'invention du concept de fonction. L'irruption même du mot : « **irrationnels** » pour caractériser les grandeurs incommensurables, témoigne du caractère inattendu et violent de leur découverte. Quant au mot « **variables »,** sa transformation d'adjectif associé à grandeur, en substantif indépendant (comme dans l'expression « fonction à une variable ») traduit cette perte de mémoire de son origine non mathématique que nous évoquions plus haut. Dans les deux cas, tout se passe comme si nous étions en présence de traces fossiles , quelque chose d'enfoui mais qui garde sous une forme pétrifiée la marque de son origine.

Présenter l'histoire du couple « **grandeurs, nombres** » en ces termes, c'est déjà donner une interprétation qui n'est pas neutre. C'est une (re)construction du passé qui suppose une certaine organisation et une lecture des faits qui nous est plus ou moins personnelle, qui pourtant s'appuie sur un ensemble de recherches historiques précises. Soyons conscients, comme nous le rappelle Claude Lévi-Strauss dans *La pensée sauvage* que :

> *Le fait historique, n'est pas plus* donné *que les autres ; c'est l'historien, ou l'agent du devenir historique, qui le constitue par abstraction, et comme sous la menace d'une régression à l'infini. Ce qui rend l'histoire possible, c'est qu'un sous-ensemble d'événements se trouve, pour une période donnée, avoir approximativement la même signification pour un contingent d'individus qui n'ont pas nécessairement vécu ces événements, et qui peuvent même les considérer à plusieurs siècles de distance.* [6]

Possibles, c'est-à-dire s'appuyant sur des éléments objectifs : traces archéologiques, écrits, événements attestés et datés, à partir desquels se construit une compréhension du passé que l'on peut soumettre au crible de la discussion critique et permettant de parvenir à un accord relatif et précaire sur une vérité de l'histoire ;

Précaire, car la découverte de nouveaux objets ou documents peut préciser, modifier, voire bouleverser l'idée que l'on se faisait de tel ou tel moment de l'histoire,

Relatif, car, puisqu'il y a interprétation et construction d'un espace de significations, celles-ci peuvent s'approfondir, s'élargir, s'affiner.

1. La déraisonnable inaptitude du nombre à mesurer certaines grandeurs.

Nicolas Rouche évoquait déjà *le difficile mariage des grandeurs et des nombres* dans son beau livre intitulé : *Le sens de la mesure* [7]. Le présent titre de ce paragraphe est un peu plus provocateur. Il prend le contre pied d'un article célèbre des années 1960 du physicien Eugen Wigner intitulé :*La déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles (The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences)* [8] Ce genre de phrase donne à penser qu'il y a un mystère qui plane sur le fait que les mathématiques puissent s'appliquer au réel ; un réel déjà donné, de toutes pièces, d'un côté ; des mathématiques toutes faites, disponibles, de l'autre, et les deux s'emboîtant parfaitement ! En caricaturant un peu, on aurait donc d'un côté des mathématiciens maniaques qui, pour leur distraction, fabriqueraient toutes sortes de clés sans savoir quoi en faire ; de l'autre des physiciens en présence de serrures à ouvrir et qui trouveraient, en fouillant bien dans les trousseaux de clés laissés par les mathématiciens, éventuellement en les limant un peu, toutes les clés nécessaires pour les ouvrir ! [9]

Nous pensons, au contraire, que la rationalité est une conquête de la science, une construction laborieuse toujours inachevée qui tente de mettre en adéquation la pensée rationnelle abstraite et une réalité concrète et phénoménale qui lui est a priori étrangère. La découverte des grandeurs incommensurables en est une illustration flagrante, qui montre comment la raison humaine, ayant décelé une inadéquation radicale entre le nombre et certaines grandeurs, une inaptitude du nombre dont elle disposait à mesurer cer-

6 C.Lévi-Strauss ; La Pensée sauvage ,P. 341

7 N. Rouche ; Le sens de la mesure

8 E. Wigner ; Communications on Pure and Applied Mathematics ; XIII (1960) ; 1 - 14 ; cf. La Recherche, n° de janvier 1999 ; Pourquoi les mathématiques sont-elles efficaces ?

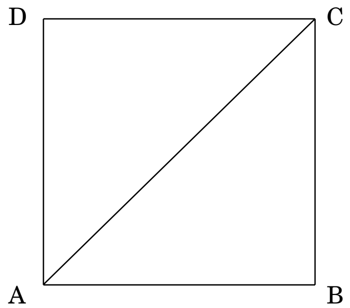
9 J'ai emprunté cette image à mon collègue Jacques Harthong ; cf. L'Ouvert (revue de l'Irem de Strasbourg) n° 100, p.16

taines grandeurs, a reconstruit tout l'édifice mathématique pour rendre compte de cette découverte. Donc le mot « **déraisonnable** » renvoie ici , non pas à une étonnante et mystérieuse adéquation spontanée des mathématiques au réel, mais simplement et bien au contraire, à la découverte perçue comme « **irrationnelle** » d'une inadéquation entre la conception disponible du nombre et la réalité des grandeurs, inadéquation qui se traduit par une impossibilité de mesurer ces grandeurs au moyen de nombres.

Certes, il n'y a aucune trace, aucun texte historique relatant cette découverte ; il n'y a que des récits postérieurs à l'événement luimême et qui parcourent toute la littérature grecque, singulièrement Platon et Aristote. Mais le fait même d'utiliser un mot aussi fort que celui d' « **irrationnel** », témoigne du caractère perçu comme scandaleux de cette découverte. Et ces récits utilisent le mot « **irrationnel** » , renvoyant à quelque chose de déraisonnable, dans un domaine : les mathématiques, réputé être le lieu privilégié de la raison.

Le mot « **rationnel** », et sa négation « **irrationnel** », dérivent du latin « **ratio** » qui signifie calcul, mais aussi faculté de raisonner. Il reproduit le double sens du mot grec « **logos** » qui désigne à la fois ce qui s'exprime par un rapport numérique calculable, une proportion, et ce qui est pensable, accessible à la raison et au discours rationnel. Donc dans un sens restreint, « **irrationnel** » *(alogon)* désigne un rapport qui ne peut se calculer ou s'exprimer comme rapport de nombres. Mais dans un sens plus large, « **irrationnel** » indique une situation qui échappe à la pensée raisonnée et raisonnable, celle qui s'exprime dans un discours cohérent et rationnel.

Et en effet, en suivant l'explication de JT Desanti[10] :



Soit AC la diagonale d'un carré de côté ABCD. Alors :

— ou bien $\frac{AC}{AB}$ est **pensable**, en tant que rapport de deux grandeurs nettement identifiées, et dans ce cas il est *alogon* en tant qu'incalculable ; il n'existe pas de nombres entiers a et b tels que $\frac{AC}{AB} = \frac{a}{b}$;

— ou bien $\frac{AC}{AB}$ est posé comme calculable, mais dans ce cas il est *alogon* impensable en ce qu'il comporte (selon la démonstration classique) un dénominateur absurde b , qui est à la fois pair et impair. Il y a là un véritable défi à la raison, révélant une inadéquation entre la réalité et la pensée de cette réalité en termes de nombres, quelque chose qui dans l'objet de la connaissance dépasse notre entendement.

Les mathématiciens grecs auraient pu en rester là et prendre acte de cette inaptitude du nombre à mesurer cer-

10 J.T. Desanti ; Une crise de développement exemplaire : la découverte des nombres irrationnels.

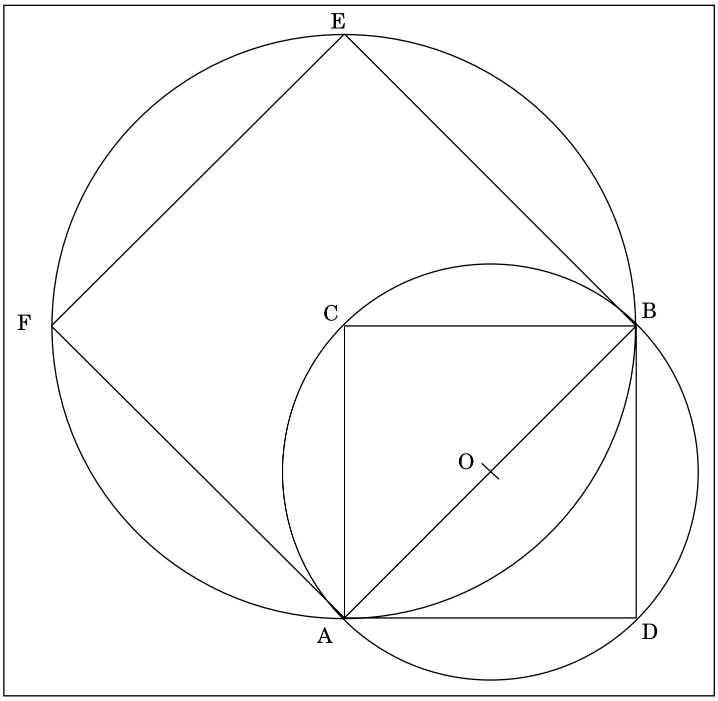
taines grandeurs. Or s'il y a quelque chose qui continue à fasciner les philosophes et les historiens des sciences aujourd'hui (il suffit pour s'en convaincre de regarder la littérature existant sur cette question), c'est qu'ils ont réussi à dépasser cet obstacle et à construire une nouvelle rationalité qui, à la fois préserve l'acquis de la relation « **grandeurs, nombres** » tel qu'elle était constituée depuis des siècles dans la mesure des grandeurs, mais qui, également intègre le caractère non commensurable de certaines grandeurs et l'impossibilité qui en découle de les mesurer toutes à la même unité. C'est pourquoi, dit Desanti : *Il faudra, faute de calculer « l'impensable », apprendre à penser « l'incalculable », l'intégrer à l'univers normé des objets maniables, selon les règles strictes et compatibles du « jeu mathématique ».*

Ainsi dans la figure ci-contre, je peux facilement montrer que le rapport des aires des carrés ABEF et ADBC est 2 , mais en est - t - il de même pour les aires des cercles de diamètres respectifs [AE] et [AB], et si oui, comment le démontrer ?

Par ailleurs, je ne peux exprimer par un rapport de nombres (entiers) le rapport $\frac{AC}{AB}$, ni le rapport des aires des cercles à leurs diamètres respectifs ; vais-je être obligé pour cela de renoncer à démontrer l'invariance de ces rapports, quels que soient les carrés ou les cercles considérés, c'est-à-dire les égalités :

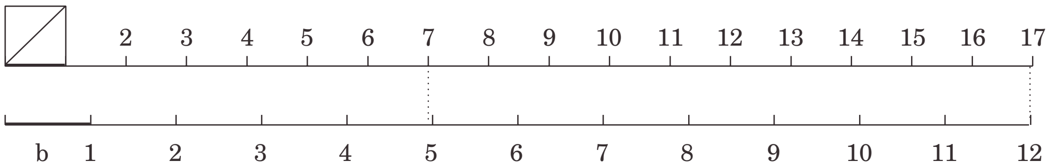
$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AE} \quad \text{ou}$$

$$\frac{\text{aire cercle [AB]}}{\text{aire carré ADBC}} = \frac{\text{aire cercle [AE]}}{\text{aire carré ABEF}} \quad ?$$



Ces rapports effectivement non calculables seront pourtant « *pensés et intégrés à l'univers normé des objets maniables* » grâce à la célèbre et remarquable théorie des proportions du livre V des *Eléments* d'Euclide, en particulier la définition 5 :

Des grandeurs sont dites être dans le même rapport , *une première relativement à*



$$\mathbf{a<b<2a<2b<3a<4a<3b<5a<4b<6a<\underline{7a<5b}<\ldots<14a<10b<15a<11b<16a<\underline{12b<17a}}$$

mais aussi, en considérant un autre carré de côté c et de diagonale d :

$$\mathbf{c<d<2c<2d<3c<4c<3d<5c<4d<6c<\underline{7c<5d}<\ldots<14c<10d<15c<11d<16c<\underline{12d<17c}}$$

une deuxième et une troisième relativement à une quatrième quand des équimultiples de la première et de la troisième ou simultanément dépassent, ou sont simultanément égaux ou simultanément inférieurs à des équimultiples de la deuxième et de la quatrième, selon n'importe quelle multiplication, chacun à chacun, [et] pris de manière correspondante. [11]

Cette définition est difficile à comprendre pour des esprits modernes habitués à l'usage du formalisme algébrique. Le mathématicien et logicien anglais De Morgan en donne l'illustration plus accessible suivante, en désignant par a, b, c, d les quatre grandeurs. On aura, en notation moderne : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si et seulement si la suite des multiples de a et b est rangée exactement de la même manière que celle des multiples de c et d, comme, par exemple pour le rapport du côté a d'un carré à sa diagonale b (cf. schéma en haut de page).

Ces suites d'inégalités sont caractéristiques du rapport des grandeurs $\frac{a}{b}$ ou $\frac{c}{d}$. Supposons, en effet, que a soit remplacé par $a' = a + \varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$. Alors il existe un entier n tel que $n\varepsilon > b$. Soient m, (et n) tels que :

$$(m-1)b < na < mb\ ;$$

alors :

$$mb < (m-1)b + n\varepsilon < na + n\varepsilon = na'.$$

On a donc $na < mb$; mais $mb < na'$; il y a tôt ou tard une inversion de l'ordre des multiples de a et b d'une part, de a' et b de l'autre.

Dans les suites d'inégalités ci-dessus, nous en avons souligné deux : $7a < 5b$ et $12b < 17a$, qui nous donnent un encadrement du rapport des deux grandeurs, sous la forme :

$$\frac{7}{5} < \frac{b}{a} < \frac{17}{12} .$$

Mais bien entendu, chacune des inégalités donnerait une approximation de ce rapport, soit par excès soit par défaut.

Ce qui montre toute la richesse de la définition d'Euclide, laquelle est d'abord descriptive, mais contient aussi un aspect algorithmique. Celui-ci est repris et développé dans le livre X des *Eléments*, avec les propositions 2 et 3 que voici : [12]

11 Euclide Les Eléments Livre V, traduction B. Vitrac, PUF, vol. 2 , p. 41

12 Ibid. Vol.3, p. 94 et 95

Euclide X 2
Si, de deux grandeurs inégales {proposées} la plus petite étant retranchée de la plus grande de façon réitérée et en alternance, le dernier reste ne mesure jamais le [reste] précédent, les grandeurs seront incommensurables.

Euclide X 3
Etant données deux grandeurs commensurables, trouver leur plus grande commune mesure.

Le parallélisme est flagrant entre ces deux propositions du livre X et les propositions VII 1 et 2 du livre VII concernant les nombres [13] :

Euclide VII 1 :
Deux nombres inégaux étant proposés et le plus petit étant retranché du plus grand de façon réitérée et en alternance, si le reste ne mesure jamais [le reste] précédent jusqu'à ce qu'il reste une unité, les nombres initiaux seront premiers entre eux.

Euclide VII 2 :
Etant donnés deux nombres non premiers entre eux, trouver leur plus grande commune mesure.

C'est pourquoi la méthode proposée n'est évidemment rien d'autre que ce qu'aujourd'hui nous appelons algorithme d'Euclide, à cette nuance près qu'ici il est appliqué aux grandeurs au lieu de l'être aux nombres.

Nous la présentons sous la forme modernisée suivante :

Soient G et g les deux grandeurs ; $G > g$

$G = gq_1 + R_1$ avec q_1 nombre entier et R_1 grandeur , $R_1 < g$

$g = R_1q_2 + R_2$ avec q_2 nombre entier et R_2 grandeur , $R_2 < R_1$

....

$R_{n-2} = R_{n-1}q_n + R_n$ avec q_n nombre entier et $R_n < R_{n-1}$

$$G > g > R_1 > R_2 > ... > R_{n-1} > R_n$$

- ou bien il existe n tel que R_n soit nul (et R_{n-1} non nul) ; alors G et g sont commensurables et R_{n-1} est une commune mesure.
- ou bien un tel n n'existe pas et alors G et g sont incommensurables.

A titre d'exemple « paradigme » voici une démonstration de **l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré avec son côté** (voir la figure page suivante).

Soit $AB = AA_1 = a$ et $AC = d$;

$$A_1C = A_1B_1 = B_1B_2 = a_1$$

Puis :

$$A_2B_2 = A_1A_2 = A_2A_3 = a_2 \ ;$$

$$B_2B_3 = A_3B_3 = B_3B_4 = a_3 \text{ , etc.}$$

On a : $AC = AB + A_1B_1 = a + a_1$;

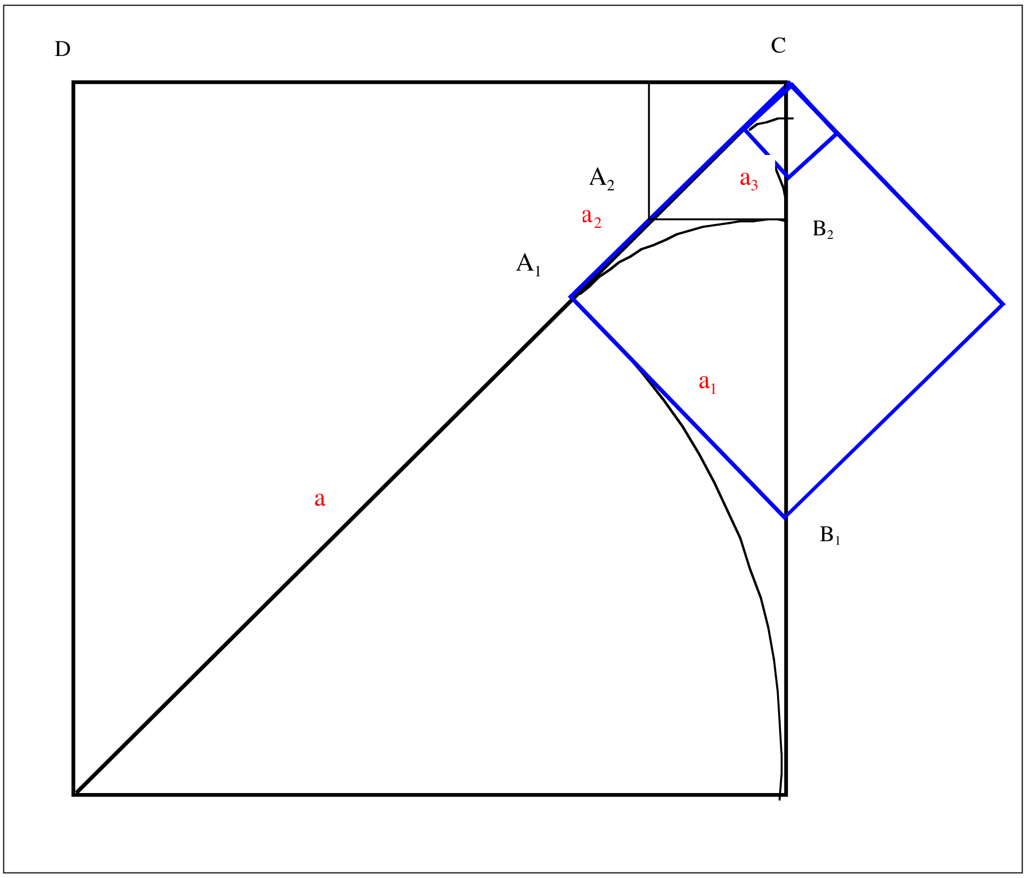
$AB = 2A_1B_1 + A_2B_2 = 2a_1 + a_2$;

$A_1B_1 = 2A_2B_2 + A_3B_3 = 2a_2 + a_3$;

$A_2B_2 = 2A_3B_3 + A_4B_4 = 2a_3 + a_4$;

$A_3B_3 = 2A_4B_4 + A_5B_5 = 2a_4 + a_5$.

13 Ibid. Vol. 2 p. 290 et 291.



Si l'on considérait $A_5B_5 = a_5$ comme négligeable (hors de notre pouvoir de résolution visuelle), on aurait :

$A_3B_3 = 2A_4B_4 = 2a_4$;

$A_2B_2 = 5a_4$;

$A_1B_1 = 12a_4$;

$AB = 29a_4$;

$AC = 41a_4$;

donc $A_4B_4 = a_4$ serait une mesure commune et donnerait le rapport : $\frac{AC}{AB} = \frac{41}{29}$. Mais justement cet algorithme, confronté aux propriétés géométriques du carré, met en évidence le caractère infini des opérations possibles et de ce fait l'impossibilité de trouver un élément ultime qui serait mesure commune.

Les deux propositions d'Euclide qui suivent permettent de démontrer dans toute sa rigueur ce caractère infini :

Euclide X, 1 : Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, et si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

Euclide X, 2 déjà rappellé ci-dessus.

Supposons qu'il existe une mesure u commune au côté AB = a et à la diagonale AC = d ; alors :

1) elle mesure leur différence a_1 ; donc aussi a_2 , a_3 , etc.

2) $d^2 = 2a^2$ donc $a > d/2$: on a enlevé à d une grandeur plus grande que sa moitié :

$$a_1 = 2a_2 + a_3 < 4a_2$$

donc $2\, a_2 > a_1/2$, etc.

Nous enlèvons à chaque fois une grandeur plus grande que la moitié de la précédente… Nous finirons par obtenir un reste a_n inférieur à u … Ceci est impossible puisque u divise tous les a_i .

Il n'existe pas de commune mesure entre d et a

Maurice Caveing voit dans cet exemple l'origine même de la géométrie grecque, géométrie du raisonnement opposée à la géométrie des arpenteurs et des calculateurs :

Avant la découverte de l'incommensurabilité, la droite reste un objet confondu avec ses modèles physiques : trait graphique, faîte d'un toit, etc. Si c'est là ce que l'on entend par « objet de l'intuition » c'est retomber dans l'empirique et il n'y a là rien qui soit de l'ordre d'une notion mathématique. C'est dans l'opération de mesure que s'est dévoilée la vraie nature de l'objet « droite », son essence idéale, plus précisément dans le processus de mesure d'un segment incommensurable à l'unité de mesure : le caractère illimité du processus(...) révèle, au sein même de la finitude du segment, une infinité qui, même conçue comme potentielle, ne peut appartenir qu'à un objet idéal, qui se trouve défini en tant que tel par ce processus même. (Pour un objet empirique, on atteint le seuil de la perception en un nombre fini d'étapes) [14].

Cette infinité rend manifeste une propriété des grandeurs qui était passée inaperçue jusque là : leur caractère **continu**. C'est parce que les grandeurs sont continues, c'est-à-dire, selon la définition qu'en donne Aristote : *divisibles en parties toujours divisibles,* que s'introduit un processus algorithmique de division à l'infini, et qui est la marque du caractère incommensurable de certaines grandeurs.

Pour éviter certains problèmes liés à l'infini, tels les fameux paradoxes de Zénon d'Elée, les géomètres grecs auront soin de séparer le continu des grandeurs de deux autres continus qui leurs sont indissolublement associés : le continu du temps et le continu du mouvement :

L'infinité n'est pas la même dans la grandeur, le mouvement et le temps comme y constituant une nature unique, mais simplement le terme postérieur se détermine

14 M. Caveing : Quelques remarques sur le traitement du continu dans les « Eléments d'Euclide et la philosophie d'Aristote in **Penser la science** ; Points Sciences Seuil 1982

d'après le terme antérieur : ainsi le mouvement est infini par l'intermédiaire de la grandeur selon laquelle il y a mouvement (local) ou altération ou accroissement, comme le temps est infini par le mouvement. [15]

Autrement dit : l'infini est hérité de la grandeur pour passer au mouvement par l'intermédiaire de l'étendue, et passe finalement au temps par l'intermédiaire du mouvement. De sorte que les difficultés du continu pourront être contournées si l'on arrive à écarter toute référence à l'infini et donc à ses manifestations liées au continu du temps et du mouvement. La seule manière que les géomètres grecs ont trouvée pour sortir de l'impasse [16] c'est d'étudier les grandeurs dans leur seul aspect global de l'étendue, c'est-à-dire statique, immobile.

Les grandeurs, dans ce qu'elles ont de changeant (mouvement, vitesse, etc.) ne sont pas susceptibles d'une étude mathématique. La physique d'Aristote sera plus proche de la métaphysique dont elle est le préambule indispensable. La thèse d'Aristote est que les données mathématiques sont séparables par la pensée, c'est-à-dire qu'elles peuvent être soumises à un processus d'abstraction qui n'affecte en rien l'exactitude de leur étude. La conséquence en est une dichotomie radicale de la science grecque se caractérisant par une manière différente d'appréhender les phénomènes naturels, selon qu'ils concernent ce qui se passe au « Ciel » ou ce qui se passe sur la « Terre » ; dichotomie que l'on peut schématiser très grossièrement ainsi selon le tableau ci-dessous :

Terre	**Ciel**
Lieu de la génération et de la corruption lieu du changement : changement d'état, ou changement de position dans l'espace = mouvement (local).	Lieu des astres célestes, parfaits, sphériques, impondérables ; Soumis à des mouvements parfaits (circulaires, uniformes)
Ces mouvements peuvent être naturels ou violents. Le mouvement naturel sera vers le haut (si le corps est léger), ou vers le bas, (si le corps est **grave** (lourd))	Cosmos fini.(*image mobile de l'éternité,* selon Platon)
L'infini en est un des caractères et est perçu négativement.	La science qui s'occupe de cette partie est constituée des **Mathématiques,** réparties selon le quadrivium :
La science qui s'occupe de cette partie est la **Physique**, (une physique des qualités)	arithmétique, pour le nombre géométrie pour les grandeurs continues astronomie, musique

15 Aristote, Physique, 207 b, 21 - 25

16 Rappelons que le mot grec qui désigne l'infini est apeïron qui a donné aporie ou impasse.

Ainsi **il n'y a pas d'unité matérielle du cosmos, ni d'unité des lois de la nature.** En particulier il n'y a pas place pour une physique mathématique. La physique classique développée à partir du 17ème siècle se caractérisera justement par une rupture de cette cloison et la mise en place de lois **universelles,** c'est-à-dire identiques pour le « Ciel » et pour la « Terre », (par exemple la célèbre loi de la gravitation **universelle**, énoncée par Newton).

2. L'invention d'une physique mathématique au 17ème siècle.

Pendant à peu près 20 siècles la science fonctionnera sur cette dichotomie qui imprégnera totalement la plupart des esprits jusqu'à la fin du Moyen-Age. La cloison n'est pourtant pas étanche : le meilleur contre-exemple en est Archimède, par ses travaux sur *L'équilibre des plans ou des centres de gravité des plans,* ou son *Traité des corps flottants*. De fait, plusieurs domaines physiques sont étudiés mathématiquement : la musique, l'optique géométrique, l'astronomie. Mais ces trois exemples de physique mathématique sont possibles dans la mesure exacte où les problèmes peuvent être traités et expliqués d'une manière satisfaisante dans le cadre de la géométrie euclidienne, c'est-à-dire sans qu'ils ne mettent en jeu le mouvement. Il en est ainsi de l'optique géométrique qu'Euclide arrivera à axiomatiser et organiser déductivement à la manière de la géométrie, parce qu'il considère le rayon lumineux comme rectiligne et sans structure physique, ce qui lui permet, entre autre, de donner les lois de la réflexion [17]. Certes l'astronomie s'occupe du mouvement des astres célestes, mais ce mouvement n'est qu'*une sorte d'image mobile de l'éternité, et tandis qu'il (Dieu) organise le Ciel, il forme, d'après l'éternité immuable en son unité, une image à l'éternel déroulement rythmé par le nombre ; et c'est là ce que nous appelons le Temps* [18]. C'est pourquoi il importe peu que l'astronomie décrive la réalité du mouvement des astres : il suffit qu'elle « sauve les apparences » en permettant de prédire leur position, à partir de quelques hypothèses et au moyen de la géométrie d'Euclide.

La fissuration et finalement l'éclatement de la cloison séparant les mathématiques de la physique suppose des modifications radicales et profondes tant du côté de la physique, dans sa façon de comprendre la nature et en particulier le mouvement, que du côté des mathématiques. Nous renvoyons aux travaux des nombreux historiens à cause de leur intérêt particulier mais aussi de leur accessibilité :
P. Duhem (*L'aube du savoir)* ; A. Koyré (*La révolution astronomique , Etudes galiléennes*) ; M . Clavelin (*La philosophie naturelle de Galilée)* ; G. Simon (*Sciences et savoirs au XVIe - XVIIe siècles*)

Ces modifications dans la manière d'appréhender la nature, la volonté, exprimée par beaucoup de lire le livre de la nature en langue mathématique ne suffisent pas à eux seuls pour élaborer une physique mathématique. Le meilleur exemple nous en est donné par celui-là même qui est considéré comme ayant le plus contribué à cette élaboration : Galilée. Galilée est le premier qui ait tenté de donner la loi de la chute des corps (on disait alors « la chute des graves ») en termes mathématiques, ce qui suppose de savoir traiter comme une

17 Voir à ce sujet Vasco Ronchi : Histoire de la lumière, premier chapitre, A. COLIN, 1956

18 Platon, Le Timée, 37 d

grandeur quelque chose qui jusque là ne rentrait pas dans cette catégorie : la vitesse. Le concept de vitesse est exemplaire pour montrer comment une notion liée de façon vague au changement est amenée par la pensée rationnelle à un traitement mathématique en tant que grandeur.

C'est d'abord une notion qui apelle la comparaison : un mobile ne va pas vite en soi ; il va **plus vite** que… **moins vite** que… ou **aussi vite** que…

Ainsi dans *La Physique* [19] Aristote explique qu'*il est nécessaire que le plus rapide soit mû en un temps égal sur une plus longue distance, en un temps plus court sur une distance égale…*

Mais ceci ne fait pas encore de la vitesse une grandeur, encore moins une grandeur mesurable. Galilée réalise cette transformation en deux étapes. Dans un premier temps il élabore la notion de vitesse constante, celle qui intervient dans le mouvement uniforme. Il lui donne sens et la rend opératoire dans sa relation avec l'espace et le temps. La vitesse n'est pas encore mesurée mais c'est une grandeur susceptible du traitement défini par Euclide dans le livre V des *Eléments* et que Galilée applique avec un soin extrême, en cinq définitions ou axiomes et en six théorèmes parcourant les six types de relations entre les trois grandeurs que sont le temps, l'espace et la vitesse. Les voici (cf. encadré de la page suivante) sans les démonstrations correspondantes [20], complétées par leur écriture formelle à droite du texte de Galilée, en désignant les grandeurs respectives par e, v, et t.

19 Aristote, Physique, 233b, 20

20 Galilée, Discours concernant deux sciences nouvelles ; traduction M. Clavelin ; Armand Colin ; Troisième journée ; pp. 126-130.

Le lecteur non historien peut s'étonner de ce que Galilée ait besoin de trois théorèmes de proportionnalité là où l'écriture « moderne » unique $e = v \times t$, apparemment plus simple, contient les trois simultanément par le jeu des manipulations algébriques. Mais que l'on ne s'y trompe pas, cette simplicité est illusoire dans les applications numériques car elle sous-entend les rapports de proportionnalité aux différentes unités. Si je marche pendant 15 minutes à une vitesse de 4 Km/h la distance parcourue n'est pas 4×15, mais $4 \times (15/60) = 1$, en Km. Ce qui met bien en évidence le rapport des temps, c'est-à-dire la relation à une unité. L'utilisation de l'écriture $e = v \times t$, suppose un pas supplémentaire qui est celui de la mesure des grandeurs.

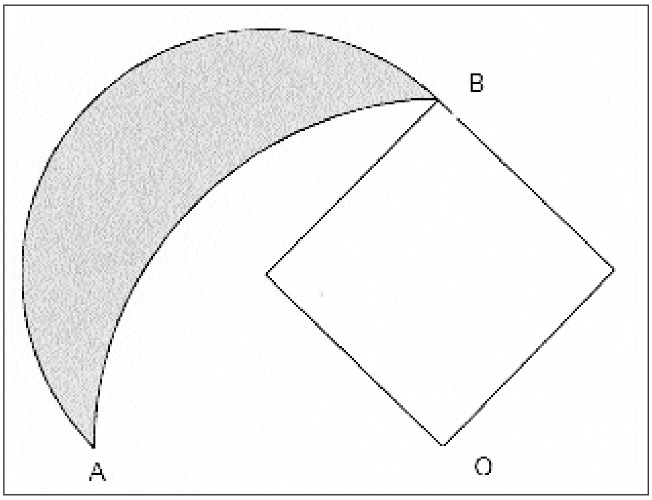
La seconde étape traite le problème d'une vitesse variable que nous n'aborderons pas ici du fait que la variabilité est abordée de façon plus générale dans le prochain paragraphe ; pour l'étude faite par Galilée, nous renvoyons aux auteurs signalés ci-dessus.

Tout le développement historique vers la numération décimale de position, vers le calcul symbolique et la construction de l'algèbre, vers la numérisation des raisons (Descartes), a totalement modifié l'approche que nous pouvons faire aujourd'hui de la mesure des grandeurs. La formule $e = v \times t$ où e, v, t désignent des nombres mesurant des grandeurs de nature totalement hétérogènes efface les contraintes qu'imposaient la théorie des proportions entre grandeurs homogènes et l'absence d'un symbolisme algébrique.

Essayons de rendre sensible les modifications intervenues dans le traitement des grandeurs continues en géométrie sur un seul et même problème, la *lunule* d'Hippocrate de Chio : démontrer l'égalité en aire de la lunu-

Théorème I – Proposition I Si un mobile animé d'un mouvement uniforme parcourt, avec une même vitesse, deux distances, les temps des mouvements seront entre eux comme les distances parcourues.	pour v donné $\frac{t_1}{t_2} = \frac{e_1}{e_2}$
Théorème II – Proposition II Si un mobile parcourt deux distances en des temps égaux, ces distances seront entre elles comme les vitesses. Et si les distances sont comme les vitesses, les temps seront égaux.	Si $t_1 = t_2$ alors $\frac{e_1}{e_2} = \frac{v_1}{v_2}$ et réciproquement
Théorème III – Proposition III Si un même espace est franchi avec des vitesses inégales, les temps seront en raison inverse des vitesses.	Pour e fixé $\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_1}{v_2}$
Théorème IV – Proposition IV Si deux mobiles sont mus d'un mouvement uniforme, mais avec des vitesses inégales, les espaces qu'ils parcourront en des temps inégaux seront entre eux dans un rapport composé du rapport des vitesses et du rapport des temps.	$\frac{e_1}{e_2} = \frac{v_1}{v_2} \times \frac{t_1}{t_2}$
Théorème V – Proposition V Si deux mobiles sont mus d'un mouvement uniforme, mais avec des vitesses inégales et sur des espaces inégaux, alors le rapport des temps sera composé du rapport des espaces et du rapport inverse des vitesses.	$\frac{t_1}{t_2} = \frac{e_1}{e_2} \times \frac{v_2}{v_1}$
Théorème VI – Proposition VI Si deux mobiles sont animés d'un mouvement uniforme, le rapport de leurs vitesses sera composé du rapport des espaces parcourus et du rapport inverse des temps.	$\frac{v_1}{v_2} = \frac{e_1}{e_2} \times \frac{t_2}{t_1}$

le (en ombré sur la figure) avec le carré. Cette démonstration a un caractère emblématique en ce que c'est la plus vielle démonstration connue de l'histoire des mathématiques dont on ait des références précises [21].



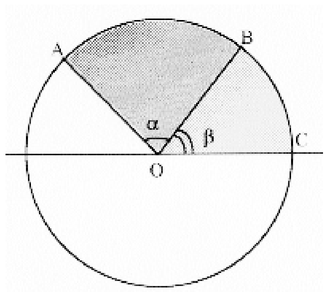
Nous en étudierons quatre démonstrations successives dans le temps et qui mettent en évidence quatre manières très différentes de traiter les grandeurs mathématiquement.

3. Quatre manières différentes pour démontrer un même résultat.

1. La manière euclidienne.

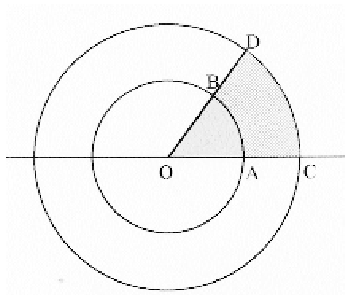
C'est une géométrie des grandeurs, des proportions, des figures : le continu est pris dans sa globalité ; tout est statique.

Il s'agit de démontrer l'égalité en aire de la lunule délimitée par le demi cercle de diamètre [AB] et le quart de cercle de centre O de rayon [OA] d'une part, et le carré de diagonale [OA] d'autre part. Cette démonstration s'appuiera sur les deux théorèmes de proportionnalité rappelés ci-contre.



pour un même rayon et des angles distincts

$$\frac{aire(OAB)}{aire(OBC)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

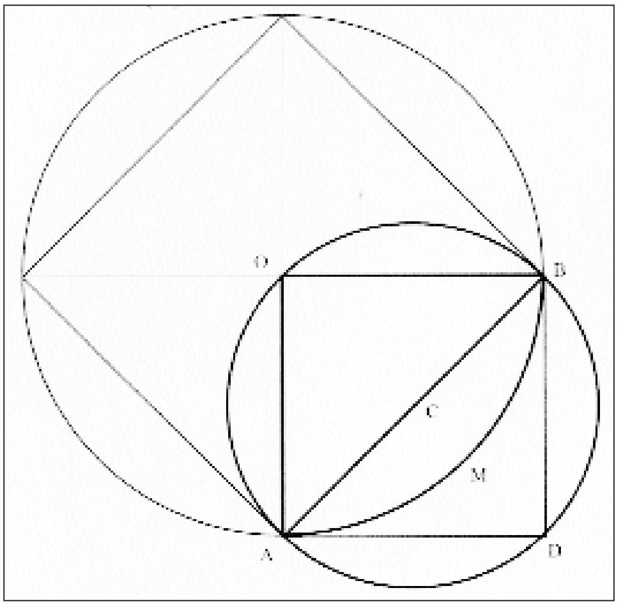


pour un même angle et des rayons distincts

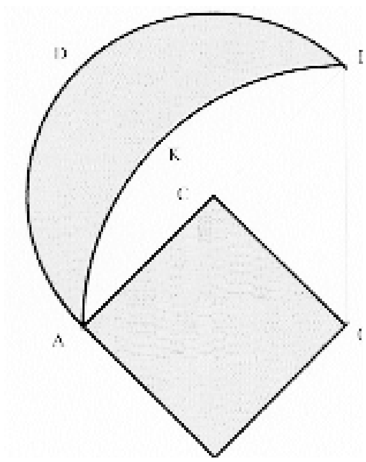
$$\frac{aire(OAB)}{aire(OCD)} = \left(\frac{OA}{OC}\right)^2$$

Comme dans la figure du haut de la page suivante, en désignant les cercles par leur centre, on a : $\frac{airecercle\,(C)}{airecercle\,(O)} = 2$; alors le quart de cercle OAB est égal au demi-cercle de diamètre [AB]

21 cf. Caveing La figure et le nombre : recherches sur les premières mathématiques des Grecs, Septentrion, PUF, 1997, Chap. II, p.77



A partir de ce résultat, il est facile de démontrer l'égalité en aire de la lunule AKBD avec le carré ACOE :



En effet le demi-disque ADB est égal au quart de disque OAKB (la moitié est égale au quart du double). Aux deux grandeurs égales OAKB et ADB, on enlève une même partie (AKB). On obtient donc des grandeurs de même aire (OAB) et (ADBK) ou encore (OCBE) et (ADBK)

2. Manière pré-infinitésimale ou méthode des indivisibles (Cavalieri)

Le continu est découpé en un nombre infini d'éléments indivisibles infiniment petits.

Cette méthode [22] a été proposée à Leibniz par Tchirnhaus, dans une lettre du 27 janvier 1678 : sur la figure qui suit (cf. page suivante), le point M décrit le quart de cercle AB.

On construit le point K de la manière suivante : la parallèle à [CA] passant par M coupe [CB] en N et [AB] en L. Le point K est tel que KN = ML.

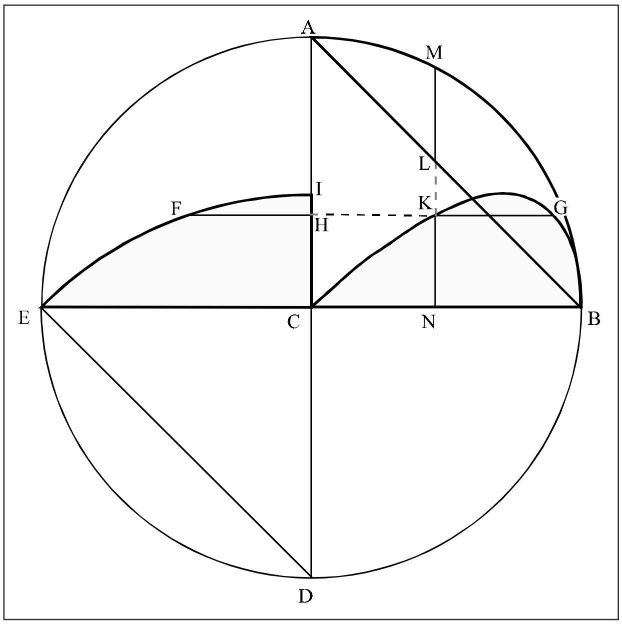
On appelle Γ la courbe décrite par le point K. Soit à présent la parallèle à [EB] passant par K qui coupe l'arc de cercle EI en F, [CA] en H, la courbe Γ en K et en G.

Alors on a, en prenant comme repère (CB,CA) dans lequel le cercle (C) a pour équation :

$$x^2 + y^2 = 1 ,$$

ML = y = $\sqrt{1-x^2} - (1-x)$ = KN (ordinatim).

22 cf. pour l'ensemble de l'étude qui suit l'article de Jos. E. Hofmann : Aus der Frühzeit der Infinitesimalmethoden ; Arch. Hist. Exact Sci. Vol. 2 p. 271 à 343



la surface (AMB) est constituée de toutes les lignes (ML), dont la somme est égale à la somme de toutes les lignes (KN), c'est-à-dire la surface (CKGBN) ; considérant ensuite que la somme de toutes les lignes (KG) qui constituent d'une autre manière la surface (CKGBN) est égale à la somme de toutes les lignes (FH) c'est-à-dire la surface (ECIF), au total :

$$\sum ML = \sum KN = \sum KG = \sum FH$$

Donc aire(AMBA) = aire(CKBC) = aire(EHCE) .

Donc, par soustraction d'aires égales aux deux quarts de cercles (ECA) et ACB) nous avons bien l'égalité de la demi lunule (EAIE) avec le triangle (ABCA) .

On en déduit l'équation de la courbe décrite par le point K :

$(y + 1 - x)^2 = 1 - x^2$

ou :

$2x^2 - 2x(y + 1) + y^2 + 2y = 0$;

c'est une ellipse.

Si nous résolvons l'équation en x , pour une valeur fixée de y nous aurons deux solutions : $\left\{\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right. = \frac{1}{2}(y+1 \pm \sqrt{2-(y+1)^2})$

Nous en déduisons la longueur KG :

$KG = \sqrt{2-(y+1)^2} = FH$ (abscissim),

puisque l'équation du cercle (D) de rayon [DB] est :

$$x^2 + (y + 1)^2 = 2 ,$$

soit $x = \pm\sqrt{2-(y+1)^2}$. En considérant que

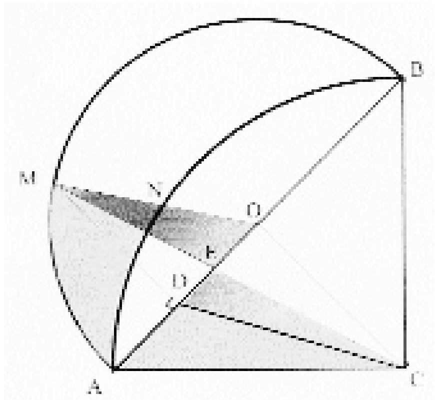
Dans ces deux premières manières, les grandeurs continues sont traitées dans leur globalité **statique**, même si la seconde découpe le continu en atomes infiniments petits. L'exemple qui suit pourrait encore se traiter de manière statique ; pourtant l'on y voit s'esquisser un mouvement qui engendre la lunule complète ainsi que le triangle qui lui est égal par la rotation de deux rayon solidaires.

3. Irruption de la variabilité.

La généralisation est proposée par un dénommé Artus de Lionne en 1610 dans un article intitulé *Amoenior curvilineorum contemplatio* [23] (mais imprimé seulement en 1654). Leibniz en a eu connaissance lors de son séjour à Paris.

23 Cf. Jos. E. Hofmann

Une droite variable issue de C coupe le demi-cercle en M et le quart de cercle en N .



Il s'agit de démontrer que pour n'importe quelle position de la droite (CNM) le triangle curviligne AMNA est égal au triangle rectiligne ADC, où D est le pied de la perpendiculaire issue de M sur [AB]. Comme cas particulier, lorsque M est en B on retrouve le résultat de la lunule d'Hippocrate.

En reprenant les deux types de proportionnalité dans le cercle présentés plus haut la démonstration de l'égalité de la lunule tronquée (AMN) avec le triangle (ACD) se fait alors facilement en trois étapes :

1) *Aire du secteur (OAM) = aire du secteur (CAN)* car :

a) l'angle $\widehat{AOM}$ au centre O est le double de l'angle inscrit $\widehat{ACM}$.

b) le carré du rayon OM est la moitié du carré du rayon CA.

2) *Aire du triangle (MEO) = aire du triangle (DEC)* car :

aire (OMC) = aire (ODC) parce que ces triangles ont même base (OC) et des sommets situés sur une même parallèle (MD) à cette base.

Or : aire (MEO) = aire (OMC) – aire (OEC)
et : aire (DEC) = aire (ODC) – aire (OEC)
d'où l'égalité.

3) *Aire (AMN) = Aire (ACD)* car :

(AMN) = secteur (OAM) – (ANE) – (MEO)

(ACD) = secteur (CAN) – (ANE) – (DEC)

d'où l'égalité souhaitée.

4. Considération de cette variabilité dans son engendrement même, par le calcul différentiel

Leibniz cite le problème de la lunule dans son « *Histoire des origines du calcul différentiel* ». Voici comment il le traite, dans une lettre à Bodenhausen (1678) (figure page suivante)

L'aire variable considérée est prise maintenant, non plus seulement comme un continu dont la grandeur varie avec le temps, mais saisie en plus dans l'instantané de son engendrement.

Dans la figure, le quart de cercle OPP_0MO est rapporté au repère (Ox ; Oy). Un second quart de cercle de centre N et passant par O est, lui, rapporté au repère (Nv ; Nz). Le point P décrit l'arc OP_0, entraînant le mouvement de Q sur l'arc OQ_0 et celui de F, projection orthogonale de P sur Ox.

Un mouvement infinitésimal du point P en $\overline{P}$ se traduit par des accroissements différentiels dx et dy sur les coordonnées de P et entraîne un mouvement infinitésimal de Q en $\overline{Q}$ et de F en $\overline{F}$. L'égalité de la demi lunule $Q_0OP_0Q_0$ avec le triangle OMN découle alors de l'égalité de leurs différentielles, mise en évidence par le calcul ci-dessous.

On prendra en compte le fait que TP $\overline{P}$ est tangente au cercle de centre M et que MPTS est un rectangle.

1. P(x,y) : $y = \sqrt{2hx - x^2}$

ou $x = h - \sqrt{h^2 - y^2}$;

2. Q(v,z) : $z = \sqrt{2h^2 - v^2}$

ou $v = \sqrt{2h^2 - z^2}$

3. $P\overline{P} = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \dfrac{hdy}{\sqrt{h^2 - y^2}}$;

4. $Q\overline{Q} = \sqrt{dv^2 + dz^2} = \frac{h\sqrt{2}}{z}dv$

5. Similitude des triangles PKN et QGN :

$$\frac{QG}{QN} = \frac{PK}{PN} \text{ ou : } \frac{v}{h\sqrt{2}} = \frac{y+h}{PN} = \frac{y+h}{\sqrt{2h(h+y)}} \ ;$$

ce qui donne $v^2 = h^2 + hy$; $z^2 = h^2 - hy$

6. Aire $P\overline{P}\,\overline{Q}Q$ = AireNP$\overline{P}$ - AireNQ$\overline{Q}$ =

$$= \frac{1}{2}\ \frac{hydy}{\sqrt{h^2 - y^2}} = \frac{h}{2}dx$$

car :

$$\text{Aire } NP\overline{P} = \frac{1}{2}(NT \times P\overline{P}) = \frac{1}{2}(y+h)\frac{hdy}{\sqrt{h^2 - y^2}}$$

et

$$\text{Aire } NQ\overline{Q} = \frac{1}{2}(NQ \times Q\overline{Q}) =$$

$$= \frac{1}{2}h\sqrt{2} \times \frac{h\sqrt{2}}{z}dv = \frac{1}{2}\frac{h^2}{\sqrt{h^2 - y^2}}dy$$

Ainsi est-on passé progressivement d'une manière de traiter le continu des grandeurs à une autre :

— Chez les Grecs celui-ci était pris « en blocs » bien délimités et finis, puis traités globalement par des démonstrations logiques, où le raisonnement par l'absurde tenait un rôle déterminant par exemple dans la méthode d'exhaustion ; c'est un traitement global.

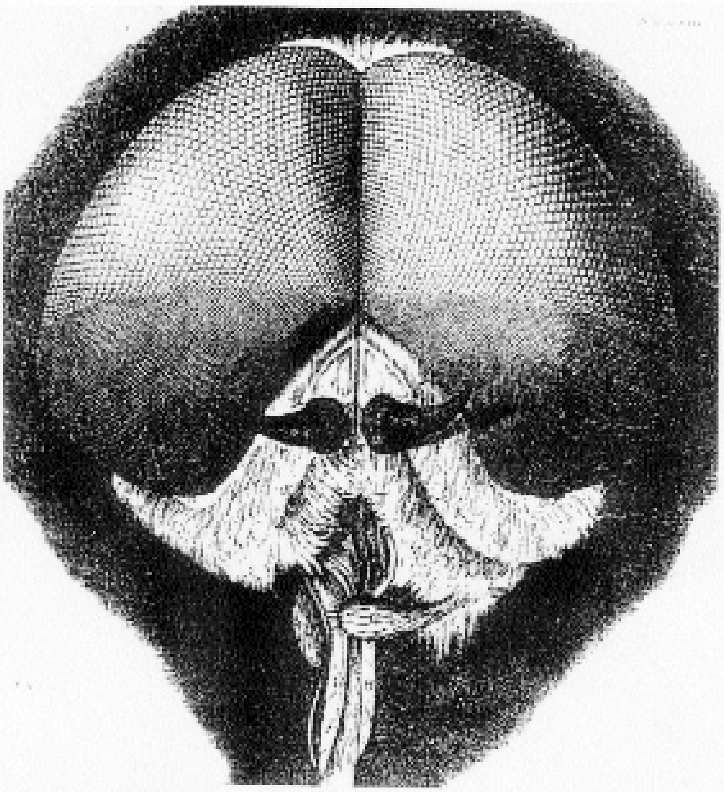
— Au 17ème siècle se développe une gestion du continu par division à l'infini et recomposition, les deux au moyen du calcul algébrique ; c'est un traitement local suivi d'un traitement global : calcul différentiel et intégral.

4. A quelles modifications de pensée correspondent ces modifications de traitement ?

1. Un autre regard sur l'infini, en particulier sur l'infiniment petit, réhabilitant une conception atomistique de la matière.

En 1471 l'italien Poggio Bracilioni découvrait en Allemagne un manuscrit de Lucrèce et ressuscitait l'atomisme antique sévèrement critiqué par Aristote. Un des principaux arguments de celui-ci était l'impossibilité de penser le continu en termes d'atomes indivisibles. Un paradoxe célèbre rapporté par Plutarque, le paradoxe du cône, témoigne de cette impossibilité. Imaginons dans un cône deux sections parallèles à la base et infiniment voisines, représentant deux des « indivisibles » contigus dont il est constitué. Dirons nous que ces deux sections sont égales ou inégales ? Si elles sont égales, on n'aura pas un cône mais un cylindre, en mettant les sections bout à bout. Si elles sont inégales, les génératrices du cône ne seront pas des droites et sa surface aura des aspérités. Galilée travaillera beaucoup sur ce type de paradoxes mais pour en inverser la fonction de preuve et les tourner contre l'enseignement d'Aristote, donnant à Leibniz la possibilité d'inventer un calcul sur des infinitésimaux.

L'atome sera remplacé chez Leibniz par la **monade**, unité substantielle origi-



Ill. 27. Les yeux d'une espèce commune de mouche magnifiés par le microscope de Robert Hooke. Hooke y compta près de quatorze mille éléments (ou « perles ») et ne doutait pas « qu'il puisse y avoir une structure et une disposition aussi curieuse dans chacune de ces perles, que dans l'œil d'une baleine ou d'un éléphant, que le Fiat tout-puissant pourrait aussi facilement susciter l'existence de l'un que de l'autre ; et comme un jour ou un millier d'années sont la même chose pour lui, de même un œil ou dix mille ». Source : Robert Hooke, *Micrographia* (1665).

nale, sans étendue, sans divisibilité, donc sans figure, *un indécomposable dynamique.* La monade ne peut se définir par elle même, mais par ses rapports avec les autres monades. Il n'est sans doute pas indifférent qu'à la même époque était découvert le microscope qui permettait de **voir** l'infiniment petit, comme l'illustre à merveille le dessin ci-contre de Hoocke[24] (dessin entièrement fait à la main, faut-il le rappeler ?) . Comme le dit Michel Serres, Leibniz pense ce que Hoocke observe…

2. Un élargissement du concept de nombre

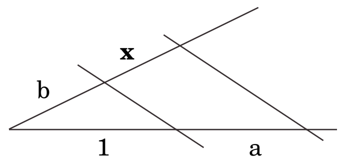
Celui-ci est l'aboutissement d'une multitude d'activités pratiques et théoriques, et résumé dans ces « thèses » de Stevin : *Qu'une racine quelconque est nombre ; Qu'il n y a aucuns nombres absurdes, irrationnels, irréguliers, inexplicables ou sourds*[25].

3. Cet élargissement du concept de nombre s'accompagne d'une élimination du principe d'homogénéité

Ce principe veut que l'on ne compare que des grandeurs de même nature.

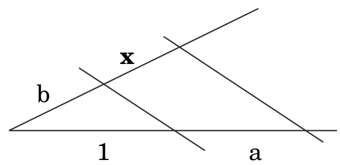
Descartes en particulier va établir un parallélisme étroit entre grandeurs continues et nombre, lequel va intégrer le continu à l'algèbre et dégager peu à peu le concept de nombre réel. Ainsi pourra-t-on penser le concept de vitesse comme le rapport d'une distance à un temps. Plus généralement, toutes les grandeurs peuvent se penser comme grandeur ligne, en introduisant une unité ; par exemple :

- La grandeur **rectangle :**



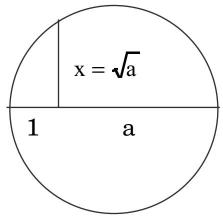
$$\boldsymbol{x} = a \times b \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{b}{1}$$

- La grandeur **quotient :**



$$x = \frac{a}{b} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{1}{b}$$

- La grandeur « **racine** » :



$$x = \sqrt{a} \Leftrightarrow \frac{a}{x} = \frac{x}{1}$$

De sorte que l'on peut réaliser l'identification des nombres avec les points d'une droite.

24 tiré de Shapin ; La révolution scientifique ; Flammarion ; 1996

25 Stevin, Traité des incommensurables grandeurs ; Arithmétique, 1585

4. L'Algèbre

Elle élabore un langage et une écriture capables de traduire indifféremment les relations entre nombres, les relations entre grandeurs, les relations entre grandeurs et nombres. Dans *La Géométrie* Descartes élargit implicitement le concept d'équation. Jusque là simple relation numérique entre données et inconnues d'un problème, avec lui, l'équation devient générique en reliant les coordonnées d'un point caractéristique d'une courbe.

La courbe se transforme en l'élément d'articulation entre **les trois domaines constitutifs d'une physique mathématique** que sont la physique, la géométrie, l'algèbre :

D'un côté la physique, où le phénomène est décrit par une loi qui régit ses variations dans le temps ;

De l'autre côté les mathématiques , avec une structure de raisonnement ancienne : celle de la géométrie d'Euclide, mais des méthodes et un outil nouveau : l'algèbre ;

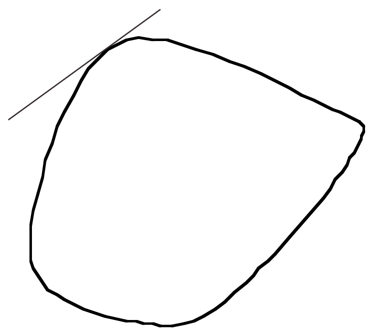
Entre les deux, la courbe ; la courbe est un objet physique, mais qui peut s'étudier géométriquement au moyen de l'algèbre, tout en intégrant l'idée de variabilité lorsqu'on la considère comme **trajectoire** (d'un point mobile) et non plus comme **lieu** (d'un ensemble de points fixes)

Or la courbe est l'ancêtre de la fonction en ce que son équation permet d'écrire la variabilité au moyen d'une (ou plusieurs) lettre(s), x, y … appelée(s) justement **variable(s)**.

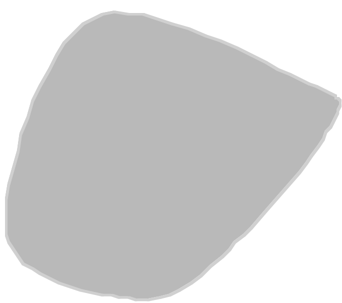
C'est la réunion de tous ces facteurs :

- Considération de l'infinitésimal, avec un autre regard sur l'infini
- Conception élargie du nombre et son identification au continu géométrique de la droite (appelée aujourd'hui ***droite réelle)***
- Mise en place de l'outil algébrique,
- Prise en compte du mouvement dans les mathématiques

Tous ces facteurs vont permettre l'identification de deux problèmes forts anciens mais fondamentaux des mathématiques, jusque là compris et étudiés de façon totalement étrangère l'un à l'autre :

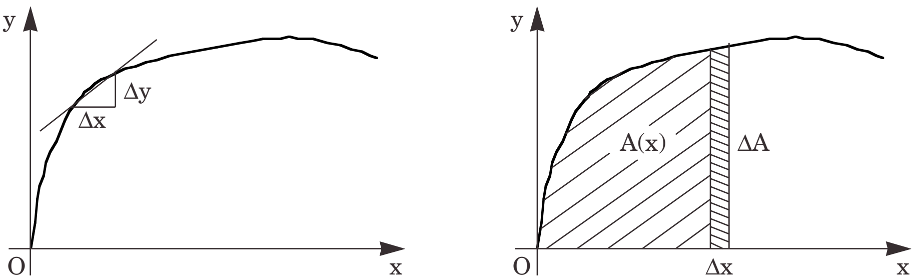


1) celui de la détermination de la tangente en un point d'une courbe,



2) celui de la mesure de l'aire limitée par une courbe. (cf. encadré ci-contre)

Deux problèmes dont la résolution se ramène à un traitement identique par l'introduction de la variabilité et l'algébrisation



La pente de la tangente est : La variation de l'aire ΔA est :

$$p = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{(pour } \Delta x \text{ infiniment petit)} \qquad \Delta A = y\Delta x \ \text{ ou } \ \frac{\Delta A}{\Delta x} = y$$

D' où l'identification des deux problèmes telle que l'énonce Newton[26] en termes cinématiques mais tout à faits équivalents :

Problème 1 : *La longueur de l'espace décrit étant continuellement donnée, trouver la vitesse du mouvement à un temps donné.*

Problème 2 : *La vitesse du mouvement étant donnée, trouver la longueur de l'espace décrit en un temps donné quelconque.*

Le calcul différentiel et intégral est né.

Il y aurait un troisième moment à raconter : celui de la mise à l'écart du concept de grandeur par son exclusion du cadre strict des mathématiques pures, comme relevant trop de la sensibilité et donc élément physique incompatible avec les nouvelles exigences de rigueur développées au XIXème siècle. Elle rallongerait considérablement cet article déjà suffisamment long. Nous nous contenterons de citer en conclusion cette page de Jean Cavaillès qui ouvre ses *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles* et qui résume bien mieux que je ne pourrais le faire la nouvelle donne au moment où j'arrête ma propre histoire…

Conclusion

Le XIXème siècle mathématique s'ouvre par une crise de l'infini : aux premières objections contre infiniment grand et infiniment petit, le XVIIIème avait fait succéder une confiance aveugle, pour le passage à la limite, par exemple, et l'emploi des

26 Newton, La méthode des fluxions et des suites infinies, Traduction française par Buffon, p.20

séries. En 1826, ABEL pouvait se plaindre encore qu'on raisonne sur des séries divergentes : « elles sont quelque chose de bien fatal et c'est une honte qu'on ose y fonder une démonstration… Ce sont elles qui ont fait tant de malheurs et causé tant de paradoxes » Des malheurs et des paradoxes la méthode d'exhaustion avait su se garder tant que réservée à la géométrie, garantie contre les absurdités par l'intuition sensible. La révolution cartésienne, en assurant un parallélisme complet entre nombres et étendue, en inaugurant l'étude des variations de fonctions, incorporait le continu à l'algèbre : celle-ci, devenue autonome, devait définir par ses propres moyens les objets employés, préciser, étendre elle-même les modes d'emploi. D'où deux sortes de problèmes : donner un fondement purement analytique aux notions et propriétés assurées jusque là seulement par l'évidence de leur corrélat géométrique ; développer les unes et les autres hors des limites arbitraires imposées par l'intuition. Etablissement rigoureux de la théorie des fonctions continues, extension des opérations analytiques, double travail du XIXème siècle qui exigeait, pour remplacer l'intuition défaillante, la création des notions essentielles de la théorie des ensembles.

Ce travail sera effectué dans toute son ampleur et sa rigueur. Il consommera le divorce entre les grandeurs et les nombres en construisant toute l'analyse et, au-delà, l'intégralité des mathématiques, sur ces derniers, sans aucune référence à la notion de grandeur qui est renvoyée au domaine de la physique. Ce processus nécessaire et extraordinairement productif est quelquefois qualifié d'**arithmétisation des mathématiques.** Il pose néanmoins la question pédagogique fondamentale : l'enseignement des mathématiques doit il prendre acte de ce divorce et proposer une démarche d'apprentissage faisant l'impasse sur les grandeurs pour s'appuyer directement sur la compréhension des nombres (successivement entiers, décimaux, rationnels, réels etc.). C'est la voie qui avait été suivie tout au long de ces dernières décennies. L'histoire rapportée ci-dessus, si elle est pertinente, nous conduit à penser que c'est un appauvrissement, et que seul un enseignement des mathématiques liant nombres et grandeurs durant toute la scolarité primaire et une partie du secondaire, permet de préserver une compréhension en profondeur de la richesse et de la complexité du numérique, en même temps qu'il favoriserait l'application des mathématiques aux autres sciences du réel.

Bibliographie

Baruk Stella *; Dictionnaire de mathématiques élémentaires*, Seuil, 1992

Cavaillès Jean ; *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles* ;

Clavelin Maurice, *La philosophie naturelle de Galilée,* Albin Michel, 1968

Desanti Jean-Toussaint ; *Une crise de développement exemplaire : la découverte des nombres irrationnels* ; in Encyclopédie de la Pléïade : *Logique et connaissance scientifique*, 1967

Descartes René ; *La Géométrie,* 1637, *The Geometry of René Descartes,* Dover, (reprint) 1954, (contient le texte français)

Duhem Pierre ; *L'Aube du savoir,* Epitomé du *Système du Monde, Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*, Hermann, 1997

Euclide *Les Eléments* Livre V, définition 5, traduction B. Vitac, PUF, vol. 2

Galilée, *Discours concernant deux sciences nouvelles* ; traduction M. Clavelin ; Armand Colin ; Troisième journée ; pp. 126-130, Hermann ; 1962

Hofmann Jos. E: *Aus der Frühzeit der Infinitesimalmethoden* ; Archives for History of exact Sciences. Vol. 2 p. 271 à 343

Keller Olivier ; *Préhistoire de la géométrie : la gestation d'une science d'après les sources archéologiques et ethnographiques,* Thèse pour le doctorat de l'EHESS

Koyré Alexandre ; *La révolution astronomique,* Hermann, 1961

Lebesgue Henri ; *La mesure des grandeurs,* réedition A. Blanchard, 1975

Lévi-Strauss Claude ; *La Pensée sauvage* ; Plon ; 1962

Newton Isaac**,** *La méthode des fluxions et des suites infinies,* Traduction française par Buffon, rééd. Par A. Blanchard, 1966

Ronchi Vasco ; *Histoire de la lumière*, premier chapitre, A. COLIN, 1956

Rouche Nicolas; *Le sens de la mesure,* Didier Hatier, Bruxelles 1992

Shapin Steven ; *La révolution scientifique,* Flammarion, 1998

Simon Gérard ; *Sciences et savoirs aux XVIe et XVIIesiècles*, Septentrion, 1996

Wigner Eugen; Communications on Pure and Applied Mathematics ; XIII (1960) ;

1 - 14 ; cf. La Recherche, n° de janvier 1999 ; *Pourquoi les mathématiques sont-elles efficaces ?*