QU'EST-CE QUE FAIRE DE LA GEOMETRIE ?

Evelyne BARBIN
Iufm de Créteil et Irem de Paris 7

Nous démontrons les
figures géométriques
parce que
nous les faisons.

Giambattista Vico

Qu'est-ce que faire de la géométrie ? Poser cette question signifie que nous allons nous interroger, non pas sur ce que serait la géométrie, mais sur ce que fait le géomètre. Ou encore que nous mettons en avant l'acte de pensée mathématique plutôt que les savoirs mathématiques. Cette priorité peut jouer un rôle essentiel dans les débats actuels sur l'enseignement des mathématiques, à commencer par celui portant sur la légitimité de cet enseignement, puisqu'il s'agit d'en préciser la portée. Cette priorité implique une façon particulière d'interroger l'histoire, que je nommerai ici «histoire épistémologique».

L'épistémologie visée dans cette histoire n'est pas celle des fondements, ni celle du fonctionnement interne des concepts et des théories, ni celle des problématiques, mais celle de l'activité mathématique conçue dans sa spécificité. L'une des principales vertus de l'histoire vis-à-vis de l'enseignement est de permettre de «s'étonner de ce qui va de soi»[2]. Cela signifie que les textes anciens ne doivent pas être considérés comme des pièces dans l'échafaudage des savoirs constitués, mais comme des évènements, en tant que traces d'une pensée en acte. Ce n'est pas en termes de tradition, de développement, d'évolution ou de conception que nous lirons ces textes, mais en

1 ceci reprend en partie l'article à paraître dans Actes du 2ème Colloque en Didactique des Mathématiques, (eds) M. Kourkoulos, G.Troulis, C. Tzanakis, 21-22 Avril 2000, Université de Crète.

2 cette vertu de l'histoire est indiquée par Paul Veyne dans Comment on écrit l'histoire. Essai d'épistémologie, Le Seuil, Paris, 1971, p.18. Sur son importance pour une réflexion sur l'enseignement, lire Evelyne Barbin, Sur les relations entre épistémologie, histoire et didactique des mathématiques, in Repères-IREM, n°27, avril 1997, pp.63-80.

termes de différences et de ruptures que nous lirons un auteur.

Les réponses à la question «qu'est-ce que faire de la géométrie ?» peuvent être historiquement datées : on peut dire, par exemple, que pour les géomètres grecs du 3ème siècle avant J.-C. faire de la géométrie c'est travailler sur des figures, mais que pour Klein au 19ème siècle c'est travailler sur un espace. Du point de vue de l'acte de pensée qui nous intéresse, il s'agira pourtant de saisir, dans quelques façons de «faire», un invariant historique, qui serait le «savoir-faire» du géomètre.

Schématiser un « réel » pour en faire une réalité géométrique

Il n'y a pas toujours eu des triangles, des cercles, des carrés, etc. Les figures géométriques ont d'abord été introduites comme schémas pour résoudre des situations problématiques, comme des problèmes de distances inaccessibles. Avant d'avoir le statut de représentation d'un objet idéal d'une théorie mathématique, elles ont eu pour fonction de représenter des éléments d'une réalité simplifiée, construite à partir d'un «réel» complexe. Le statut de schéma de la figure est négligé dans l'enseignement, et nous y voyons l'une des principales sources des difficultés dans le primaire.

Les plus anciens traités de géométrie à notre disposition datent du 3ème siècle avant J.-C., comme les *Eléments* d'Euclide. Mais il ne faut pas oublier que cet ouvrage est l'aboutissement de trois siècles d'une activité géométrique qui a d'abord été un mode d'intelligibilité du monde, et que la construction des objets de la géométrie s'est faite en même temps que la construction de raisonnements, qui n'ont atteint que par étapes le raffinement des démonstrations euclidiennes. Les figures géométriques sont des schémas sur lesquels s'élaborent des explications, elles sont inventées comme moyens de représenter les éléments d'une réalité et de résoudre des problèmes.

Ce que nous connaissons de la géométrie pré-euclidienne nous vient d'écrits de commentateurs. Ce qui y est rapporté, sur la mesure de la hauteur de la pyramide par Thalès ou sur la mesure de la distance en mer d'un bateau par les Ioniens, indique le rôle essentiel du problème des distances inaccessibles dans l'élaboration des figures. Dans le Moyen-Age occidental qui ignore le traité euclidien, Gerbert d'Aurillac (10ème-11ème siècle) propose de mesurer des distances inaccessibles à l'aide de bâtons. À titre de remplacement, reportons-nous à Gerbert pour examiner le rôle de la figure en tant que schéma. Examinons, par exemple, le problème de mesurer la largeur d'une rivière à l'aide d'un bâton, distance qui est inaccessible par un simple arpentage. Gerbert utilise un bâton plus court que sa taille, le plante sur le bord accessible de la rivière, et recule jusqu'à ce que l'extrémité supérieure du bâton et le bord non accessible de la rivière coïncident [3].

Pour répondre au problème et pour expliquer la solution, il faut schématiser, c'est-à-dire ne retenir du «réel» que des éléments pertinents pour la situation, et ramener ces éléments à de simples longueurs. Autrement dit, il faut construire une réalité géométrique, en supposant que le réel matériel est «à peu près» comme cette réalité, par exemple que le bord de la berge est bien horizontal. Faire un schéma, dessiner une figure, c'est abstraire une réalité d'un réel, c'est construire une abstraction (fig.1).

3 voir Émile Fourrey, Curiosités géométriques, 1907, Rééd. Vuibert, Paris, 1994, p.180.

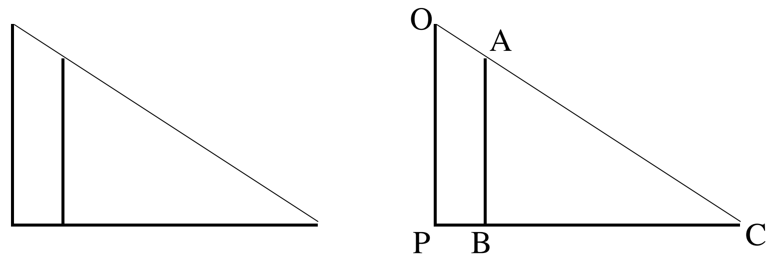

fig.1

Nommer les extrémités des segments, c'est se donner la possibilité de construire un discours sur la figure, un discours raisonné visant à expliquer. Ce discours commence par désigner : O désigne l'œil de Gerbert, P le pied de Gerbert (Gerbert n'est lui-même plus qu'un segment), AB le bâton, BC la largeur de la rivière. Il faut ensuite raisonner sur la figure pour expliquer que la connaissance des longueurs de OP, AB et PB est suffisante pour connaître BC.

Dans l'enseignement, du primaire au secondaire, l'élève passe sans beaucoup de transition de figures dessinées sur une feuille à la démonstration logique de propositions sur des figures représentant des objets idéaux. L'activité de schématisation est négligée alors qu'elle permet de donner un sens à des figures abstraites et d'élaborer des raisonnements sur ces figures. En effet, schématiser c'est produire des abstractions pour résoudre des problèmes concernant des objets réels qui ne sont pas là sur la feuille mais qui y sont représentés. C'est inventer des figures en exhibant leur pertinence et relier des figures entre elles par des raisonnements. Ceci est particulièrement important si l'enseignement vise une activité géométrique comme moyen d'intelligibilité du monde, celle d'un physicien qui ne s'intéresserait qu'aux formes et aux grandeurs. Au-delà de la géométrie, on vise ainsi plus généralement la compréhension d'une activité mathématique qui consiste à modéliser.

Il faut noter que l'idée de similitude intervient d'emblée dans toute schématisation, par l'acte même d'assimiler la situation à une figure homologue. Quant à ce que nous appelons en France le «théorème de Thalès», il intervient aussitôt dans les problèmes de distances inaccessibles, comme dans le problème de Gerbert. Le «théorème de Thalès» apparaît ainsi au fondement de la géométrie mesurante. Nous reviendrons plus loin sur cette remarque.

Couper et coller des figures

Le premier livre des *Éléments* d'Euclide se termine avec le théorème de Pythagore (proposition XLVII) et sa réciproque, qui sont ainsi comme un premier aboutissement dans la structure axiomatico-déductive de l'ouvrage euclidien. Le théorème de Pythagore concerne des grandeurs aires : il énonce que si l'on accole les deux carrés construits sur les deux côtés d'un triangle rectangle, on obtient une aire (grandeur) égale à celle du carré construit sur l'hypoténuse de ce même triangle. De manière générale, les figures d'Euclide sont des figures «pleines», elles sont à la fois forme et grandeur. Ainsi, un triangle, un cercle ou un rectangle sont toujours à regarder comme des aires.

Nous allons examiner les propositions qui précèdent celle du théorème et permettent d'en assurer la démonstration. Ceci, en regard du travail sur les figures et non pas par rapport au discours déductif. La proposition IV doit être comprise comme «un cas d'égalité d'aires» : si deux triangles ont des angles égaux compris entre des côtés égaux alors ils sont égaux, car ils peuvent s'adapter l'un sur l'autre (fig.2). La proposition XXXIV énonce que la diagonale coupe les parallélogrammes en deux parties égales (en aire). La figure peut être regardée de deux façons : comme un parallélogramme coupé en deux triangles par la diagonale, ou comme l'accolement de deux copies d'un triangle (fig.3). La proposition XXXV énonce que «les parallélogrammes qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux (en aire)»[4] (fig.4).

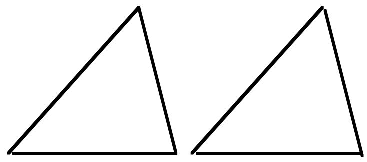

fig.2

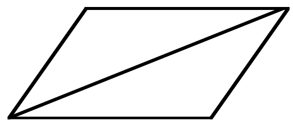

fig.3

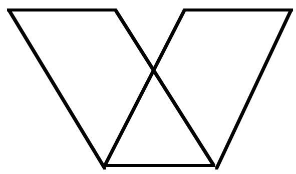

fig.4

Cette proposition résulte d'un travail sur les figures, d'une manipulation mentale et d'une perception des figures. Faisons glisser deux copies d'un même triangle sur une droite, ou encore, regardons deux triangles ayant deux angles égaux compris entre deux côtés égaux deux à deux, alors ils sont égaux (en aire) (fig.5). Arrachons à ces deux aires (ou retranchons géométriquement) leur partie commune (fig.6), puis collons (ajoutons géométriquement) un même triangle (fig.7) et nous obtenons l'égalité entre les aires de deux parallélogrammes. Le texte de la démonstration des *Éléments* ne suit pas cet ordre heuristique, il part de la figure immobile des deux parallélogrammes et il discourt sur cette figure, il nécessite de nommer ses points et il convainc de la nécessité logique du résultat.

La proposition XXXVII énonce que «les triangles qui sont sur la même base et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux (en aire)» (fig.8)[5]. Le discours de la démons-

4 Euclide, Les éléments, trad. Vitrac, vol.1, PUF, Paris, p.262.

5 Euclide, op.cit., p.264.

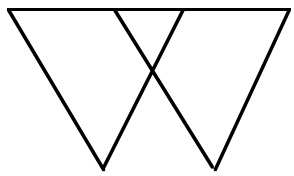

fig.5

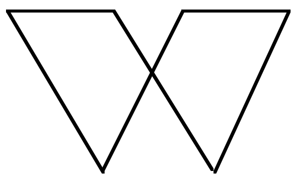

fig.6

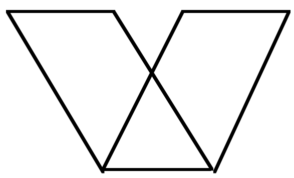

fig.7

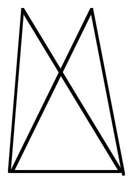

fig.8

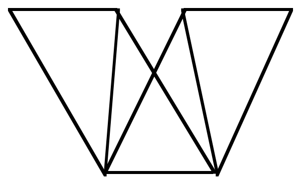

fig.9

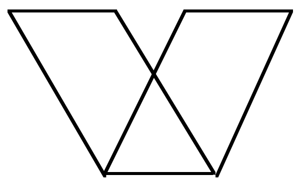

fig.10

tration est assez long, mais l'acte géométrique consiste seulement à copier deux triangles (fig.9) (ce qui est l'autre façon de regarder la figure de la proposition XXXIV), et à retrouver du regard la figure de la proposition XXXV (fig.10). La figure de deux triangles de même base (ou de bases égales) et comprises entre les mêmes parallèles est une brique essentielle dans le travail de couper-coller du géomètre, il est important qu'il la regarde, en un acte porteur d'intention, pour la retrouver.

La démonstration du théorème de Pythagore consiste en un découpage des figures carrées, de sorte à retrouver du regard les figures précédentes (fig.2 à fig.10). Le fait que nous les ayons ici débarrassées de leurs lettres peut éventuellement y aider. Le carré construit sur l'hypoténuse est découpé en deux rectangles en menant depuis le sommet opposé à l'hypoténuse une parallèle aux côtés du carré construit sur celle-ci (fig.11). Chacun des rectangles est (re)connu égal à l'un des carrés construit sur les côtés de l'angle droit,

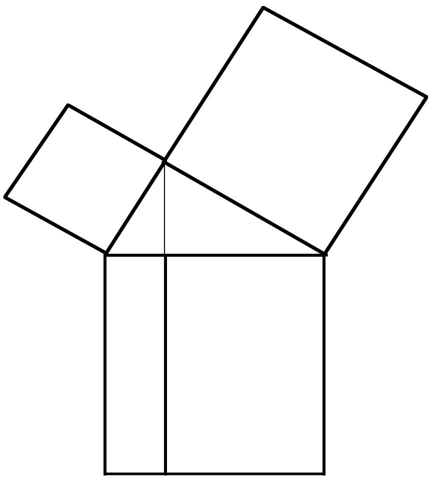

fig.11

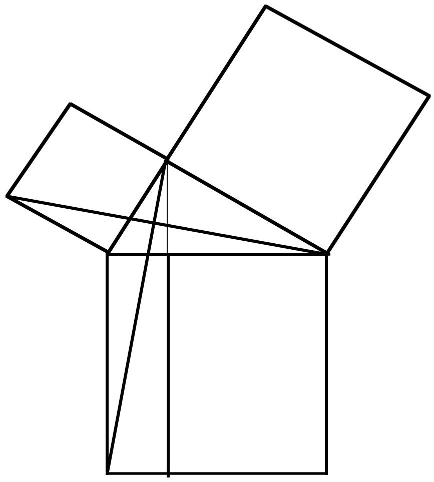

fig.12

parce que les deux quadrilatères sont les doubles (en aire) de deux triangles égaux (fig.12).

En mettant en avant la manière dont le géomètre construit la figure du théorème plutôt que le résultat lui-même, deux remarques s'imposent. D'une part, la construction passe par celle d'une parallèle, dont on ne sait comment elle a été «inventée», ce qui peut la faire juger «captieuse»[6]. D'autre part, la construction n'utilise que des formes faibles des figures 7 et 8, qui en sont les briques, puisque ces figures concernent n'importe quel parallélogramme (pas seulement rectangle ou carré) et n'importe quel triangle (pas seulement rectangle). Ces deux remarques se résorbent l'une en l'autre. En effet, il est possible de démontrer un résultat plus puissant, qui se trouve dans la *Collection mathématique* de Pappus[7]. Si on construit sur deux côtés d'un triangle quelconque deux parallélogrammes quelconques (fig.13), alors on peut considérer deux parallélogrammes qui leur sont respectivement égaux et qui ont des côtés parallèles (fig.14).

Ces nouveaux parallélogrammes sont égaux à deux autres qui constituent un parallélogramme construit sur le côté restant du triangle de départ (fig.15).

6 en reprenant l'expression de Schopenhauer dans Le monde comme volonté et comme représentation, PUF, Paris, 1966, pp.106-110.

7 proposition I du Livre IV de Pappus, Collection mathématique, trad. Ver Eecke, Blanchard, Paris, 1982.

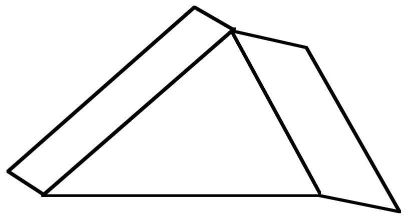

fig.13

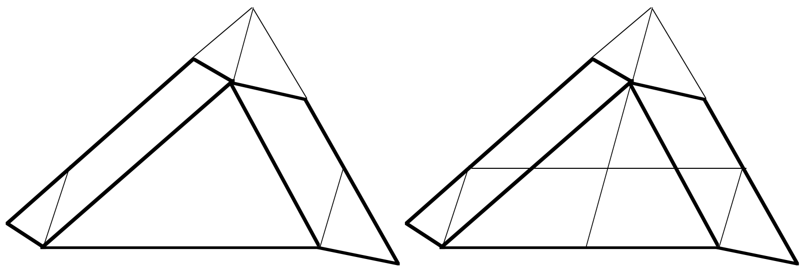

fig.14 fig.15

Dans le cas particulier où le triangle est rectangle, nous avons une figure (fig.16 page suivante) où la parallèle fait partie intrinsèque de la construction, et ne semble plus être un élément étranger. Cette figure rappelle celles de traités indiens ou arabes, par exemple celle de la version arabe des *Éléments* de Nassir-ed-Din [8].

Notre manière de «lire» les *Éléments* d'Euclide semble paradoxale puisque nous regardons les figures plus que nous ne lisons les énoncés et les démonstrations. Expliquons nous maintenant sur cette façon de «lire», en nous rappelant que notre propos est l'acte de pensée du géomètre. Il est clair que nous aurons ainsi à confronter l'acte à un savoir qui trouve sa nécessité dans l'écriture d'un texte démonstratif.

Commençons par interroger cette nécessité par un dépaysement historique [9]. Car ce que nous avons proposé n'est pas sans rappeler l'attitude des mathématiciens chinois lorsque, au 17ème siècle, les jésuites leur firent connaître l'ouvrage d'Euclide [10]. Ils rejetèrent les longues démonstrations grecques, incompatibles avec leur souci de concision, et n'acceptèrent pas non plus, pour la même raison, que les déductions fassent appel à des énoncés trop éloignés. Exa-

8 donnée par Émile Fourrey, op.cit., pp.72-73.

9 comme l'écrit Paul Veyne, «l'histoire a la propriété de nous dépayser», op.cit., p.257.

10 Jean-Claude Martzloff, A history of chinese mathematics, Springer Verlag, 1997, pp.112-113.

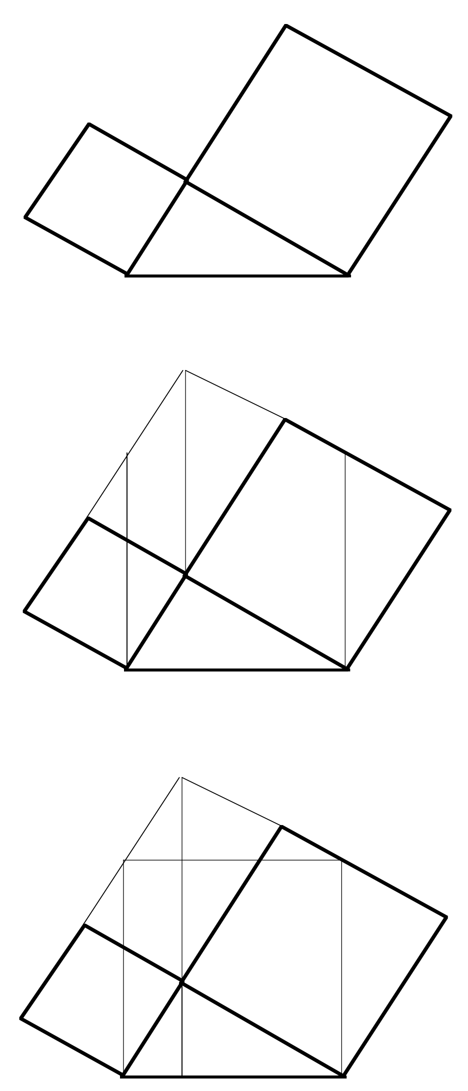

fig.16

minons donc la démonstration du «théorème de Pythagore» du commentaire du *Jiuzhang suanshu* de Liu-Hui, un mathématicien chinois du 3ème siècle de notre ère [11]. Il s'agit d'un réel découpage de deux carrés (fig.17), dont les parties sont réassemblées pour former un nouveau carré. La figure contient les mots suffisants à la preuve.

La figure de Liu Hui est semblable à celle que propose Clairaut dans ses *Éléments de géométrie* au 18ème siècle [12]. Pour ce dernier, le théorème de Pythagore est une conséquence de la solution au problème de construire un carré dont l'aire est la somme (géométrique) de deux carrés, ce problème faisant lui-même suite à celui du carré double d'un autre [13]. La démonstration de Clairaut consiste donc à calquer la construction de la duplication d'un carré, qui résulte d'un découpage très simple, par découpage et mise en mouvement de rotation de triangles.

Ces dépaysements nous rendent sensibles à la priorité du geste (acte intentionnel) de collage-découpage du géomètre sur la mise en écriture du savoir et de sa preuve. Comme l'écrit Maurice Merleau-Ponty, «que la formalisation soit toujours rétrospective, cela prouve qu'elle n'est jamais complète qu'en apparence et que la pensée formelle vit de la pensée intuitive. Elle dévoile les axiomes non formulés sur lesquels on fait que le raisonnement repose, il semble qu'elle lui apporte un surcroît de rigueur et qu'elle mette à nu les fondements de notre

11 Jean-Claude Martzloff, op.cit., pp.296-297.

12 Alexis-Claude Clairaut, Eléments de géométrie (1765), réed. Gauthier-Villars, Paris, 1920, pp. 76-78.

13 voir Évelyne Barbin, La démonstration : pulsation entre le visuel et le discursif, in Produire et lire des textes de démonstrations, IRM, Université de Rennes 1, 1998, pp.39-67.

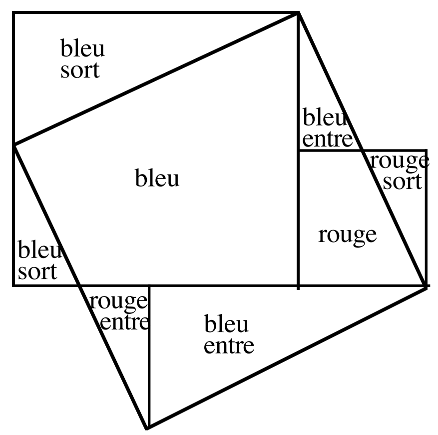

fig.17

certitude, mais en réalité le lieu où se fait la certitude et où apparaît une vérité est toujours la pensée intuitive, bien que les principes y soient tacitement assumés ou *justement pour cette raison*» [14]. Cet effort de rétrospection joue un rôle essentiel pour le géomètre, aussi bien pour la possibilité future de réactiver sa pensée ou pour accroître sa perspicacité, c'est-à-dire son intuition. Mais l'écriture du géomètre ne peut pas venir de rien : «la pensée hypothétique présuppose une expérience de la vérité de fait. [...] La conclusion dérive avec nécessité de l'hypothèse parce que, dans l'acte de construire, le géomètre a éprouvé la possibilité de la transition» [15]. Il y a une pulsation entre une évidence visuelle et une raison discursive, dans laquelle se forge son sentiment de rigueur. René Guitart écrit que la rigueur est «un affect intellectuel, à savoir *le sentiment du tombé-pile entre une intuition et son écriture*» [16].

Premiers apports pour l'enseignement de la géométrie élémentaire

Même si la meilleure façon de saisir l'acte de pensée du géomètre est de faire soi-même de la géométrie, l'histoire épistémologique a un rôle de substitution essentiel [17]. Ici, le premier apport de cette histoire vient directement du propos ci-dessus : il est impossible d'écrire une démonstration géométrique sans en avoir d'abord une intuition visuelle, ou encore, écrire une démonstration ce n'est pas manipuler des phrases, ni remplir des tableaux de phrases. Certaines pratiques pédagogiques, qui se veulent novatrices et qui sont malheureusement en vogue de nos jours, sont à ce point désastreuses, qu'il semble nécessaire de le rappeler.

Demandons-nous maintenant plus précisément ce que peut apporter le geste de couper-coller des figures. Ludwig Wittgenstein parle du jeu de tangram qui consiste à recomposer une figure déterminée, par exemple un rectangle, à partir de figures données. Il prend un exemple d'arrangement (fig.18) et il écrit : «Que trouve celui qui réussit cet arrangement ? - Il trouve : une disposition à laquelle il n'avait pas pensé auparavant». Il demande aussi ce qu'on peut dire, au contraire, de celui qui n'arrive à aucune solution après avoir cru tenter toutes les solutions possibles, et il écrit : «Ne peut-on dire : la figure qui te montre la solution dissipe un aveuglement ; ou bien également qu'elle modifie

14 la mise en italiques est de l'auteur, Maurice Merleau-Ponty, Phénoménologie de la perception (1945), rééd. Gallimard, Paris, 1968, pp.441-442.

15 Maurice Merleau-Ponty, op.cit., p.142.

16 lire à ce sujet René Guitart, La pulsation mathématique, L'Harmattan, Paris, 1999, p.47.

17 voir Évelyne Barbin, Histoire et enseignement des mathématiques : pourquoi ? comment ?, in Bulletin de l'AMQ (Association Mathématique du Québec), vol. XXXVII, n°1, pp.20-25, mars 1997.

ta géométrie ? Elle te montre en quelque sorte une nouvelle dimension de l'espace» [18]. Cette solution modifie «ta» géométrie, c'est-à-dire qu'il y a un savoir nouveau qui résulte d'un «faire» : tu l'as faite ou quelqu'un l'a faite devant toi.

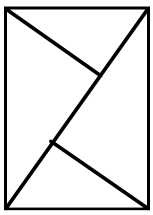

fig.18

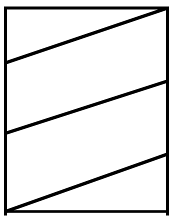

fig.19

Wittgenstein s'intéresse aussi au couper-coller en tant que preuve [19] : «On peut composer un rectangle à partir de deux parallélogrammes et deux triangles. Preuve : (fig.19). Un enfant parviendrait difficilement à la composition d'un rectangle à partir de ces éléments et serait surpris que deux côtés d'un parallélogramme tombent en ligne droite alors que les parallélogrammes sont obliques». Ce qui étonne n'est pas *dans* la figure mais dans la juxtaposition de l'oblique et du rectiligne. «Demande-toi comment l'image (ou le processus) que tu me montres peut me contraindre à ne juger jamais que de cette façon !». Il me faut, répond Wittgenstein, reconstituer le puzzle, douter de pouvoir réussir, que l'on me montre l'image de la solution, pour que je puisse ne plus douter que «maintenant je sais le faire». Je n'en doute plus. «Et l'on pourrait dire : la preuve m'a convaincu de ce qui peut aussi me surprendre».

Cette conclusion accorde à cette figure le statut d'une figure-axiome, qui pourrait être une brique dans la preuve d'une figure-construction plus complexe. Revenons, de ce point de vue, à la démonstration euclidienne de Thalès. Nous avons vu que la figure-construction du théorème est faite de briques, qui sont les figures des propositions précédentes (fig.2 à fig.10). Il y a un enchaînement structuré de la construction auquel correspond un enchaînement de raisons. Ainsi, l'acte de «couper-coller» des figures peut être un accès à la pensée argumentative et déductive [20].

Dans *Formes et mouvements. Perspectives pour l'enseignement de la géométrie*, du CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Belgique), l'assemblage des figures est pris comme fil conducteur pour montrer comment «à partir de figures et de mouvements simples, on peut aborder une géométrie plus structurée, plus argumentée» [21]. Il est important de noter que cette proposition intervient dans un enseignement des mathématiques en spirale, c'est-à-dire où chaque notion et chaque théorie sont revues plusieurs fois, de sorte à se généraliser et à s'approfondir. Il s'agit d'abord d'assembler deux triangles quelconques, la famille des parallélogrammes est alors identifiée à celle

18 Ludwig Wittgenstein, Remarques sur les fondements des mathématiques, trad. Lescourret, Gallimard, Paris, 1983, pp.51-52.

19 op.cit., pp.53-59.

20 René Guitart, op.cit., p.181.

21 CREM, Formes et mouvements. Perspectives pour l'enseignement de la géométrie, Nivelles, Belgique, 1998, pp.135-160.

des figures obtenues par assemblages de triangles superposables par déplacement. Ensuite, les deux triangles assemblés seront rectangles, puis isocèles. Puis le nombre de triangles assemblés est plus important (fig.20 et fig.21).

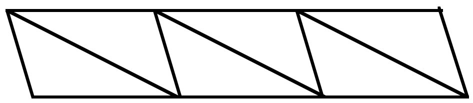

fig.20

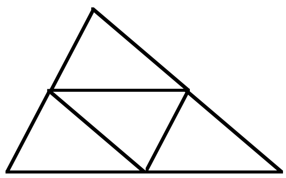

fig.21

Outre cet intérêt pour l'initiation à une géométrie argumentée, le découpage-collage d'aires est un argument pour les démonstrations [22].

Donnons un exemple élémentaire, celui de la position barycentrique du point d'intersection G des médianes d'un triangle ABC, à savoir que les aires des trois triangles AGB, BGC, CGA sont égales (fig.22). En effet, les aires des triangles BGM et MGC sont égales car les triangles ont des bases égales et même sommet, les aires des triangles BAM et MAC sont égales pour la même raison, donc les aires des triangles AGB et CGA sont égales. Etc.

22 voir Jean-Pierre Friedelmeyer, Les aires : outil heuristique, outil démonstratif, Repères IREM, n°31, avril 1998, pp.39-62.

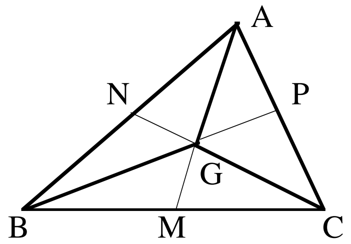

fig.22

Mettre en rapport des figures

Il y a des grandeurs géométriques dont le rapport ne peut pas être dit comme rapport d'un nombre (entier) à un autre. D'après Proclus, commentateur du Livre I d'Euclide du 5ème siècle, ce serait un pythagoricien qui aurait réalisé cette impossibilité, mettant ainsi à mal le dogme de sa secte, «tout est nombre». Le rapport entre la diagonale et le côté d'un carré ne peut pas être dit comme rapport de deux nombres (entiers), ou encore la diagonale et le côté sont des grandeurs incommensurables. Le Livre V des *Éléments* d'Euclide expose la théorie eudoxienne des grandeurs, à partir de laquelle pourront être mises en rapport des grandeurs, commensurables ou non, pourvues qu'elles soient homogènes. Ainsi, la proposition I du Livre VI énonce que «les triangles et les parallélogrammes qui sont sous la même hauteur sont l'un relativement à l'autre comme leurs bases» [23]. Ce résultat donne une autre façon de faire de la géométrie, qui est aussi une autre façon de voir les figures. Alors que dans les couper-coller de

23 Euclide, Les éléments, trad. Vitrac, vol.2, PUF, Paris, p.155.

figures, leurs formes et leurs grandeurs interviennent, ici le géomètre va regarder les formes indépendamment des grandeurs.

La proposition II est ce qu'on appelle en France le «théorème de Thalès» : «si une certaine droite est menée parallèle à l'un des côtés d'un triangle, elle coupera les côtés en proportion» [24] et sa réciproque. Maintenant, il n'est plus possible de se borner à regarder des figures, il faut désigner la figure par des lettres pour considérer des rapports (fig.23). Il faut tracer DC et BE pour mettre en rapport des triangles. Le rapport du triangle ADE au triangle DBE est égal au rapport de AD à DB, celui du triangle ADE au triangle DEC est égal au rapport de AE à AC. Un coup d'œil sur ces égalités indique que l'égalité des deux rapports de longueurs dépend de l'égalité des aires des triangles DBE et DEC. Or, en regardant cette fois la figure, ces triangles ont même base et sont compris entre les mêmes parallèles.

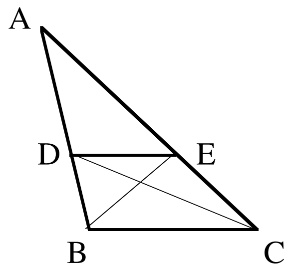

fig.23

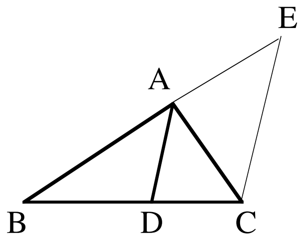

fig.24

De ce théorème résulte, en particulier, la caractérisation de la bissectrice d'un angle d'un triangle en termes de rapport : «si l'angle d'un triangle est coupé en deux parties égales et que la droite coupant l'angle coupe aussi la base, les segments de la base auront le même rapport que les côtés restants du triangle» [25] et réciproquement. Il faut tracer CE parallèle à AD (fig.24). Ici encore, le géomètre doit regarder aussi bien la figure, en particulier les angles égaux qui viennent du parallélisme, que les égalités de rapports, car les rapports de BA à AC et de BD à DC se trouvent égaux à celui de BA à AE.

A partir du «théorème de Thalès» s'obtiennent aussi les critères de similitude des triangles, et plus généralement les matériaux de la pensée du géomètre avec les formes identiques. Rudolf Bkouche est effaré de voir tout ceci disparu de l'enseignement, et il cite Émile Borel qui écrivait en 1907 : «Il convient dans l'enseignement élémentaire, de considérer la notion de similitude comme une notion première ; c'est une notion des plus simples que chacun a sans faire de la géométrie ; il suffit d'avoir constaté que l'idée de forme est indépendante de l'idée de grandeur» [26]. Si, comme le dit Borel, la notion de similitude est première, cela ne signifie pas qu'elle corresponde à aucun «faire». L'idée de similitude est effectivement centrale, nous avons déjà noté qu'elle intervient d'emblée dès qu'il

24 Euclide, op.cit., p.159.

25 Euclide, op.cit., p.161.

26 Bulletin de la Société française de Philosophie, tome VII, voir Rudolf Bkouche, L'achèvement de l'enseignement des mathématiques, in Repères IREM, n°21, oct.1995, pp.79-89.

s'agit de schématiser, ou de représenter des situations. Or c'est ce faire du géomètre qui n'est plus considéré dans l'enseignement, un faire nécessaire au métreur, à l'architecte et à la couturière.

Réaliser des schémas demande de construire des figures. Or, l'enseignement doit considérer le travail de construction à sa juste mesure, à savoir comme l'exécution d'une rationalité, qui peut se traduire par un discours si l'enseignant demande à l'élève d'expliquer sa construction. Celle-ci s'effectue nécessairement par étapes : il faut d'abord construire telle perpendiculaire pour mener telle parallèle, etc., ainsi l'explication demande une mise en ordre rationnelle. Cette mise en ordre est nécessaire si l'enseignant demande que le discours produit par l'élève puisse à son tour être utilisé pour produire de nouvelles figures.

Déconstruire les figures en droites

La méthode de Descartes bouleverse la manière dont le géomètre regarde et pratique les figures. Cette méthode consiste à une mise en ordre des choses, des choses simples aux choses composées, les choses composées devant être déduites des choses simples par des relations simples. La déduction du géomètre cartésien n'est donc pas une déduction logique de propositions, mais une déduction relationnelle de choses [27]. Pour Descartes, les choses simples de la géométrie sont les droites (finies). Il écrit dans la Règle XIV des *Règles pour la direction de l'esprit* : «En géométrie presque tout le monde conçoit à tort trois espèces de quantités : la ligne, la surface et le corps.[...] Les trois dimensions des corps, la longueur, la largeur et la profondeur ne diffèrent entre elles que par les mots». Il procède donc à une homogénéisation dimensionnelle en ramenant toutes les grandeurs à celles des droites. Pour comparer entre elles toutes les grandeurs, il faut introduire une grandeur unité : «l'unité est cette nature commune de laquelle [...] doivent également participer toutes les choses que l'on compare entre elles» [28].

Au début de *La géométrie*, essai qui suit son *Discours de la méthode* de 1637, Descartes exhibe d'emblée ce que sont les choses simples du géomètre, à savoir les droites (finies), et les relations simples par lesquelles elles seront reliées, à savoir les opérations arithmétiques. Il commence l'essai en expliquant que tous les problèmes, et donc toutes les figures, géométriques se ramènent à la considération de droites : «Tous les Problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes, qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes, pour les construire» [29]. Puis il montre comment les opérations de l'arithmétique, à savoir les quatre opérations usuelles et l'extraction des racines carrées, correspondent à des constructions géométriques et opèrent sur les droites. Ainsi, Descartes procède à une déconstruction des figures géométriques, — par exemple les triangles ne sont plus des aires mais un assemblage de trois droites —, et à une arithmétisation de la géométrie.

L'addition et la soustraction de deux droites s'obtiennent facilement comme des droites par la simple opération géométrique de juxtaposition. Mais pour que les autres opérations deviennent internes, c'est-à-dire opèrent sur des droites pour produire encore des

27 voir Évelyne Barbin, La méthode analytique de Descartes et l'évidence comme détermination de la vérité, in Analyse et démarche analytique, IREM de Reims, 1998, pp.79-101.

28 René Descartes, Règles pour la direction de l'esprit, trad.Sirven, Vrin, Paris, 1970, pp.120-121.

29 René Descartes, La géométrie (1637), in Discours de la méthode, rééd. Fayard, Paris, 1987, p.333.

droites, il faut introduire une droite unité. Ainsi, par exemple, pour multiplier deux droites BD et BC, il faut introduire une droite unité AB. Alors, la droite BE obtenue en menant AC et la parallèle ED à AC est le produit de la multiplication de BD par BC (fig.25). Alors que le géomètre grec voit le rectangle de deux droites comme une aire, pour le géomètre cartésien le produit de deux droites est une droite. Pour le géomètre grec, le carré est une aire, et il peut parler du côté d'un carré. Par exemple, il dit que GI est le côté d'un carré qui a même aire que celle du rectangle de côtés FG et GH (fig.26). Mais le géomètre cartésien peut dire qu'une droite est la racine carrée d'une autre droite. En effet, en prenant FG l'unité, alors GI est la racine carrée de GH.

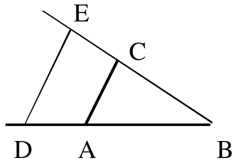

fig.25

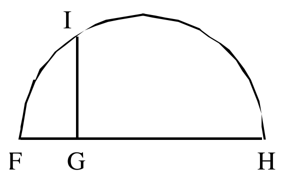

fig.26

Descartes utilise ensuite le calcul littéral, en désignant une droite (finie), non plus par les deux lettres qui nomment ses extrémités, mais par une seule lettre. Le calcul littéral donne à voir la succession des déductions (de choses) qui permettent de passer de la figure, chose composée, aux droites, choses simples. Par exemple, si on désigne BD par a et BC par b, alors le produit de la multiplication BE s'écrit ab, et, si on désigne GH par a, alors la racine carrée GI s'écrit $\sqrt{a}$.

Descartes explique enfin que «voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes, qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé un moyen d'exprimer une même quantité en deux façons ce qui se nomme une équation» [30].

Le géomètre cartésien décompose la figure en distinguant deux sortes de choses simples, les droites connues et les droites inconnues, et nomme ces droites différemment. Il faut donner des noms à «toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire», et donc introduire éventuellement de nouvelles droites à la figure initiale. Ces nouvelles droites seront déterminées systématiquement comme parallèles ou perpendiculaires des droites de la figure. Puis le géomètre écrit toutes les relations qui relient toutes les droites, autrement dit il recompose la figure de façon littérale. Le regard sur la figure doit être extrêmement attentif, car il ne faut oublier aucune des circonstances de la figure et du problème. Maintenant, le calcul littéral lui donne à voir, en un coup d'œil, la succession des opérations qui lui ont permis de passer du problème aux relations entre droites connues et droites inconnues. Il peut cesser de regarder la figure,

30 René Descartes, op.cit., p.335.

mais il doit regarder des enchaînements de symboles, afin de résoudre les équations.

Comme le géomètre euclidien qui compare des grandeurs, le géomètre cartésien regarde des figures et des écritures. Dans le premier cas, le regard sur les écritures de rapports est nécessaire et il se mêle au regard sur la figure. Tandis que, dans le second cas, le regard sur les écritures littérales est suffisant et il succède au regard sur la figure. A condition d'avoir regardé avec suffisamment d'attention la figure, la méthode cartésienne affirme qu'il suffit ensuite de résoudre des équations pour parvenir à la solution du problème. Le «théorème de Thalès» joue en rôle central pour le géomètre cartésien, qui a maintenant la possibilité de penser tous les rapports de grandeurs comme des rapports de droites, grâce à l'introduction d'une droite unité. Le «faire» du géomètre euclidien est radicalement différent de celui du géomètre cartésien. Il suffit de se souvenir que l'essai de Descartes fut incompris de ses contemporains, habitués aux textes euclidiens, pour s'en persuader. Cet essai n'est pas un traité, et encore moins un traité d'enseignement, mais des héritiers de Descartes vont écrire des traités pour tenter d'initier leurs lecteurs à cette nouvelle façon de faire de la géométrie.

Seconds apports pour l'enseignement de la géométrie

Bernard Lamy est un oratorien, adepte et défenseur de la philosophie et de la géométrie cartésiennes. En 1685, il publie *Les éléments de géométrie ou de la mesure des corps*, qu'il reprend à plusieurs reprises en modifiant notablement les approches et les contenus. Ceci, en particulier dans le sixième et dernier livre de son ouvrage, intitulé «De la

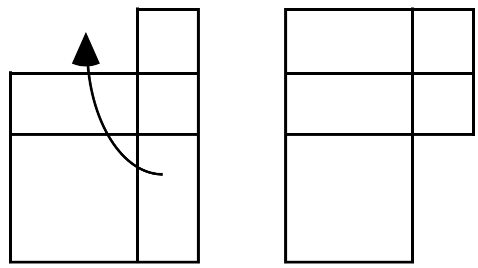

fig.27

méthode», où il s'efforce d'enseigner la méthode cartésienne.

Dans la seconde édition de 1695, Lamy adopte un point de vue très «algébriste». Ainsi, il présente les résultats du Livre II des *Eléments* d'Euclide en n'utilisant aucune figure : c'est une géométrie «sans image». Par exemple, la septième proposition de ce Livre est énoncée par Lamy sous la forme suivante : «le quarré de la grandeur entière z plus le quarré de l'une de ses parties b, sont égaux au quarré de son autre partie d, plus deux fois le plan fait de z multiplié par b». La démonstration correspondante d'Euclide repose sur un couper-coller d'une figure géométrique (fig.27), alors que celle de Lamy consiste à démontrer que

$$zz + bb = dd + 2\ zb.$$

Dans les «Eclaircissements» donnés à la fin de son ouvrage, Lamy défend cette présentation du Livre II en écrivant : «ces dix propositions d'Euclide seraient sans doute plus évidentes si je les avais accompagnées de figures ; mais outre qu'il est facile de les faire, comme on le voit dans celles qui sont [dans

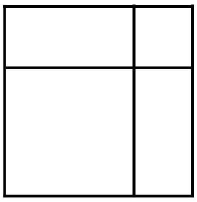

fig.28

la section I], j'ai cru qu'il était bon de s'accoutumer à concevoir ces sortes de vérités sans se représenter des figures». Il prend pour exemple la proposition IV du Livre II, dont l'énoncé n'est pourtant que le discours de la figure [fig.28] : «Elles [les figures] ne sont point nécessaires ; car pour comprendre que le carré b + d est égal aux quarrés de ses parties, savoir à bb et à dd, plus deux fois le plan de ses parties, c'est-à-dire à 2 bd ; il suffit que je conçoive b + d multipliée par b + d produit bb + 2 bd + dd, où je vois aussi évidemment et aussi sensiblement que dans une figure ce qu'il fallait prouver. Je prie qu'on y fasse réflexion, on verra dans la suite qu'il est important de s'accoutumer à se passer de figures, qui en plusieurs occasions ne peuvent être que confusion» [31].

Dans la cinquième édition, en même temps qu'il accorde à la figure géométrique une nouvelle place, Lamy s'attache encore plus à expliciter la différence entre les deux façons de «faire de la géométrie», celle d'Euclide et celle de Descartes. Il écrit au début du Livre «De la méthode» : «Ce n'est que par application de l'esprit qu'on atteint la vérité : on se distrait facilement. Pour remédier à ce défaut, il faut arrêter son esprit, exprimant par une figure ce qu'il doit considérer [...]. L'important est que cette expression soit nette, qu'on y voie ce qu'il faut chercher [...]. Cela se comprendra mieux dans les exemples suivants, où l'on va voir que la seule expression résout souvent des questions difficiles, j'entends les expressions qui se font par des figures, aussi bien que par des discours» [32]. Le second exemple consiste à démontrer que dans un triangle ABC de hauteur AD, le rapport de la somme des côtés AB et AC au côté BC est égal au rapport de la différence de CD et BD à la différence de AC à AB (fig.29). Lamy écrit que «pour faciliter l'invention», «je fais» un cercle de centre A et de rayon AB (fig.30). Ce faisant, il traduit par une figure géométrique les sommes et les différences des segments de la question, c'est-à-dire qu'il procède à l'inverse de la méthode cartésienne. «Ainsi voilà une expression, ou une figure, qui marque ce que l'on cherche» [33]. L'égalité initiale est transformée par la figure en une nouvelle égalité de rapport : le rapport de CE à CB est égal à celui de CG à CF, ce qui correspond, en termes modernes, à la puissance du point C par rapport au cercle.

En inversant le propos de Descartes, Lamy montre au géomètre comment être à la fois géomètre euclidien et cartésien. Il le fait explicitement en présentant, plus loin, deux manières de résoudre un même problème, où se mêlent discours, figure et lettre. Il faut couper les deux côtés égaux d'un triangle isocèle ABC par une parallèle DE à BC de sorte que DB égale DE : ceci est le discours de ce

31 Bernard Lamy, Les éléments de géométrie ou de la mesure des corps, 2ème éd., Pralard, Paris, 1695, p.381.

32 Bernard Lamy, Les éléments de géométrie ou de la mesure des corps, 5ème éd., Nion, Paris, rééd. 1731, p.375-76, reproduit par l'IREM Paris 7, 1997.
33 Bernard Lamy, op.cit., p.377.

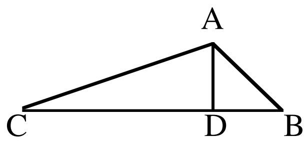

fig.29

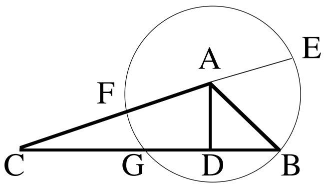

fig.30

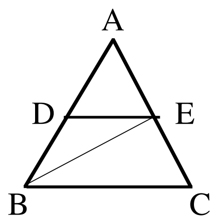

fig.31

que l'on cherche. Dans les deux cas Lamy procède par «analyse», c'est-à-dire en supposant «la chose faite».

La première manière consiste à «exprimer par une figure» ce que l'on cherche, et donc ici à exprimer l'égalité de DB et de DE par la construction du triangle isocèle BDE (fig.31). L'égalité des angles DBE et DEB, et celle des angles DEB et EBC permettent de conclure que BE doit être la bissectrice de l'angle ABC. La seconde manière consiste à exprimer par des expressions lettrées ce que l'on cherche, donc à poser AB = a, BC = d et AE = x, et traduire le discours par l'équation aa = dx + ax. Alors en posant c = d + a, l'inconnue x est la troisième proportionnelle entre c et a, et x est connu et constructible.

Dans l'enseignement actuel, la «géométrie analytique» et «la géométrie» (l'autre) sont enseignées de manière indépendante, alors qu'il s'agit bien pour l'une ou l'autre de «démontrer». De sorte que, ni les supposés sur lesquels l'une repose (l'existence d'un segment unité, les théorèmes et Pythagore et de Thalès), ni le fondement de l'autre (l'enoncé d'axiomes) ne sont explicités. Plus grave, de notre point de vue, la différence des savoir-faire en jeu n'est pas abordée. C'est en confrontant géométrie et algèbre sur un même problème que du sens peut être accordé à l'une et à l'autre, conjointement. René Guitart écrit : «Dire ce que l'on voit donne du sens à ce qui est vu, comme voir ce que l'on dit donne du sens au dit. Et, de façon analogue à cela, quoique différente, on conçoit que mettre en algèbre une figure, mettre en figure de l'algèbre, cela donne du sens» [34].

L'esprit de la méthode cartésienne se trouve aussi dans les *Nouveaux éléments de géométrie* d'Arnauld. Dans cet ouvrage de 1667, destiné à l'enseignement des écoles de Port-Royal, Arnauld considère que l'un des buts de la géométrie est d'accoutumer à réduire ses pensées à un ordre «naturel». L'ouvrage euclidien ne peut pas remplir cette fonction : «Les Eléments d'Euclide [sont] tellement confus et brouillés, que bien loin de pouvoir donner à l'esprit l'idée et le goût du véritable ordre, ils ne pouvaient au contraire que l'accoutumer au désordre et à la confusion» [35]. Il faut suivre

34 René Guitart, op.cit., n°57, pp.257-260.

35 Antoine Arnauld, Nouveaux éléments de géométrie, Savreux, Paris, préface, p.xii.

l'ordre «naturel», c'est-à-dire l'ordre cartésien du simple et du composé : traiter d'abord des lignes simples avant de passer aux autres figures, traitées elles-mêmes selon leur ordre de composition vis-à-vis des lignes. Cela nécessite de donner de nombreuses nouvelles démonstrations, par exemple pour les résultats sur les droites qui étaient démontrés par Euclide en utilisant des aires, et donc aussi de nouvelles propositions. Par exemple, Arnauld donne une nouvelle démonstration du théorème de Thalès, dont l'esprit sera repris dans beaucoup d'ouvrages de géométrie des siècles suivants.

L'ouvrage commence par quatre livres sur les grandeurs où, comme Descartes, Arnauld arithmétise et algébrise les grandeurs en utilisant librement les symboles des opérations arithmétiques et les lettres. Les autres livres sont ainsi ordonnés : d'abord les lignes simples, droites ou circulaires, puis les angles rectilignes qui sont déterminés par deux droites, puis les lignes proportionnelles et réciproques, puis les figures considérées, d'abord comme des compositions de droites, puis comme des aires. Démontrer des propriétés sur des droites, sans se servir des angles ni des triangles, est un véritable tour de force qu'Arnauld réalise en introduisant une «théorie des droites perpendiculaires et obliques». Son ouvrage aura un tel retentissement que l'on retrouve cette théorie dans l'édition de 1947 des *Leçons de géométrie élémentaire* d'Hadamard [36]. Cette théorie se retrouve aussi dans les propositions [37] du CREM en 1998.

Du point de vue d'Arnauld, le théorème de Pythagore est démontré par Euclide en utilisant les «voies étrangères» que sont les triangles. Dans le livre XIV, consacré aux figures planes considérées selon leurs aires, il démontre le théorème en utilisant les lignes proportionnelles [38]. Soit un triangle rectangle de côtés b, d, h, et de hauteur p (fig.32).

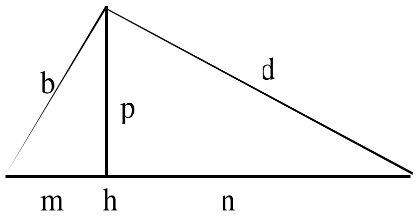

fig.32

Arnauld stipule qu'il est important, dans cette nouvelle géométrie, de désigner les droites, non plus par les deux lettres de ses extrémités, mais par une seule lettre. Grâce au neuvième théorème sur les proportions, qui a été démontré (similitude des trois triangles rectangles) au Livre XI, Arnauld écrit :

$$p : n : : m : p,$$
$$d : h : : n : d,$$
$$b : h : : m : b.$$

d'après «la principale propriété de la proportion géométrique» du Livre II, il en déduit :

$$p\ p = m\ n,$$
$$d\ d = h\ n,$$
$$b\ b = h\ m.$$

et

$$b\ b + d\ d = h\ m + h\ n = h\ (m + n) = h\ h.$$

Ceci correspond à la proposition XLVII du Livre I d'Euclide, à condition toutefois d'assu-

36 Jacques Hadamard, Leçons de géométrie élémentaire, Armand Colin, Paris, 13ème éd., 1947, pp.32-35.

37 CREM, op.cit., pp.69-83.

38 Antoine Arnauld, op.cit., p.294.

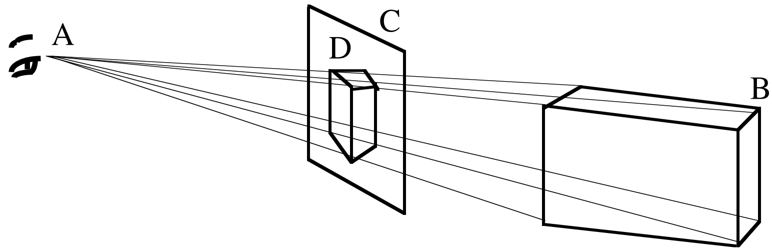

fig.33

rer que l'aire d'un carré est égale à la puissance deux de son côté. C'est donc au point le plus fondamental que se situe le «faire» du géomètre avec les figures et les lettres. En fait, tout se joue au moment où Arnauld décide d'assimiler les opérations «carré» d'une grandeur, ou «rectangle» de deux grandeurs, aux figures géométriques du carré et du rectangle. Cette assimilation est d'autant plus facile que les droites sont désignées par une seule lettre : à de nouvelles visions des figures correspondent de nouvelles façons de les dire. Arnauld y insiste, certainement plus que l'enseignement aujourd'hui.

Transformer des figures

Nous nous bornerons ici à montrer, à l'aide de quelques textes historiques, comment notre propos, s'intéresser à l'acte plutôt qu'au savoir, va à l'encontre de certaines conceptions actuelles de l'enseignement de la géométrie. Cet enseignement prend les transformations, quand ce n'est pas une transformation, comme objet de savoir. Il oublie ou laisse de côté l'acte de transformer des figures, l'intention de représenter une figure par une autre figure ou de démontrer un résultat concernant une figure à partir d'une autre figure.

Dans son *Essai de perspective* de 1711, Gravesande définit ainsi la perspective : «La perspective nous enseigne à dessiner par les règles des mathématiques ; c'est-à-dire, qu'elle nous apprend à tracer géométriquement sur un plan, la représentation des objets, selon leurs dimensions, et leurs situations différentes : en sorte que ces représentations fassent sur nos yeux le même effet, qu'auraient pu faire les objets mêmes dont elles ne sont que les images» [39]. Il explique que des règles de géométrie permettent de déterminer exactement, dans le plan C, les points de la figure D par où passent les rayons visuels allant de l'objet B à l'œil du spectateur A (fig.33). «Sans le secours des mathématiques on ne peut trouver cette représentation qu'à la simple vue, c'est-à-dire, à tâtons».

Gaspard Monge débute son traité de *Géométrie descriptive* de 1799 en écrivant que la géométrie descriptive a deux objets : «Le premier, de donner les méthodes pour repré-

39 G.J.'s Gravesande, Essai de perspective, Troyel, La Haye, 1711, pp.1-2.

senter sur une feuille de dessin qui n'a que deux dimensions, à savoir, longueur et largeur, tous les corps de la nature qui en ont trois, longueur, largeur et profondeur, pourvu néanmoins que ces corps puissent être définis rigoureusement. Le second objet est de donner la manière de reconnaître, d'après une description exacte, les formes des corps, et d'en déduire toutes les vérités qui résultent de leur forme et de leurs positions respectives»[40]. La géométrie descriptive est un moyen de déduire une proposition relative à une figure à partir d'une autre proposition relative à une figure obtenue par projection. Ce moyen devient une méthode de démonstration pour les héritiers de Monge.

Ancien élève de Monge, Jean-Victor Poncelet, dans les prisons russes de Saratoff où il est en captivité, rédige plusieurs cahiers consacrés à la «nouvelle géométrie». Le troisième cahier concerne les propriétés descriptives des coniques et les principes de projection. Selon le quatrième principe, si on se donne une conique et une droite sur un même plan, alors il existe une infinité de manières de projeter la figure sur un nouveau plan de sorte que sa projection soit un cercle et que la droite se projette à l'infini. Poncelet examine le problème suivant : étant données dans un plan deux droites AM et AN, une conique et une tangente X'X", trouver le lieu du point P, intersection de deux autres tangentes PX' et PX" quand la tangente X'X" varie (fig.34).

Quand X'X" varie, la corde xx' est assujettie à passer par un point fixe m (le pôle de AM) et la corde xx" est assujettie à passer par un point fixe n (le pôle de AN). D'après le quatrième principe, il existe une projection telle que le projeté de la conique soit un cercle et

40 Gaspard Monge, Géométrie descriptive (1799), 5ème éd., Bachelier, Paris, 1827.

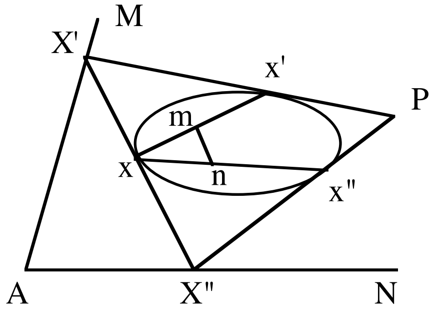

fig.34

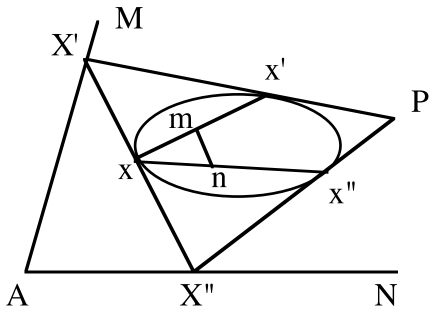

fig.35

que la droite mn se projette à l'infini. Le géomètre peut transformer la figure en une autre figure, où le problème initial devient : étant donnés un cercle, un point x de ce cercle et deux cordes xx' et xx" parallèles à des directions données, trouver le lieu du point P, intersection des tangentes Px' et Px" quand x parcourt la circonférence (fig.35). L'angle x'xx" est constant, donc la corde x'x" est constante, et le point P, étant à une distance constante du centre C du cercle, parcourt un cercle concentrique au premier. Par conséquent, le point P du problème initial parcourt une conique.

Les géomètres du 19ème siècle introduisent d'autres moyens de transformer des figures pour démontrer des propositions. Ainsi, les transformations sont enseignées dans la seconde moitié du siècle en tant que méthodes de démonstration. Dans ses *Questions de géométrie élémentaire, méthodes et solutions,* ouvrage de 1875 destiné aux élèves des lycées de la classe de troisième jusqu'à celle de mathématiques spéciales, Desboves explique, à propos de l'inversion, que «certaines propriétés des figures peuvent être transformées en propriétés nouvelles»[41]. Alors que le géomètre qui projette une figure obtient une figure déformée, le géomètre qui transforme par inversion obtient une figure qui paraît complètement différente. Dans le premier exemple donné par Desboves, un triangle devient trois cercles passant par le centre d'inversion.

Dans ses *Leçons de géométrie élémentaire*, destinées à la classe de mathématiques, Jacques Hadamard écrit une note sur «la méthode en géométrie». Il note, à propos de la résolution de problèmes, que «toute méthode géométrique pourrait être légitimement appelée méthode de transformation». Donc, résoudre un problème c'est transformer une figure. Il remarque que les transformations «simples», déplacement, symétrie, homothétie et similitude, appliquées à toute la figure, conduisent à des problèmes qui ne sont «ni plus ni moins simples»[42]. Il vaut mieux, le plus souvent, transformer une partie déterminée de la figure. Il donne l'exemple suivant : on donne deux parallèles et deux points A et B, trouver la ligne brisée la plus courte joignant A à B de sorte que la portion MN ait une direction donnée

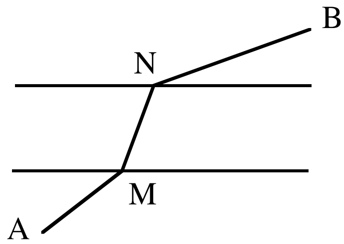

fig.36

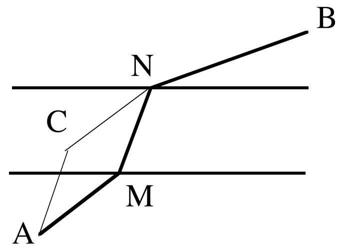

fig.37

(fig.36). Le point N se déduit du point M par une translation donnée. Cette translation appliquée à AM donne un segment CN de même longueur, donc il faut que C, N et B soient alignés (fig.37).

Hadamard note que «les autres transformations [...] changent au contraire d'une façon plus ou moins notable les figures auxquelles on les applique». Il cite l'inversion, la transformation par polaires réciproques et la perspective. Il ajoute «qu'il convient de remarquer une différence essentielle qui sépare la transformation par polaires réciproques des autres transformations», celles-ci sont «ponctuelles» et la première fait correspondre, à un point d'une figure, une droite de l'autre. Puis il explique l'importance des propriétés inva-

41 M. Desboves, Questions de géométrie élémentaire, Delagrave, Paris, 1875, p.51.

42 Jacques Hadamard, Leçons de géométrie élémentaire (1898), Armand Colin, Paris, 13ème éd., 1947, p.272.

riantes des transformations pour transformer une courbe à bon escient, c'est-à-dire en simplifiant certaines propriétés sans compliquer les autres. Plus loin, Hadamard introduit l'idée de groupe de transformations, mais ses leçons ne sont pas guidées par cette façon de penser ensemble les transformations. En géométrie élémentaire, il s'agit d'opérer sur des figures pour résoudre des problèmes plutôt que de composer des opérations du plan. En portant plus d'attention sur les transformations comme objets d'un savoir (les groupes de transformations) que sur l'action de transformer une figure dans l'intention de représenter ou de démontrer, l'enseignement actuel garde l'esprit des programmes des mathématiques modernes.

Conclusion : histoire épistémologique, épistémologie historique et didactique

Qu'est-ce que faire de la géométrie ? Nous avons répondu ici que c'est un travail avec ou sur des figures : schématiser, coller ou découper des figures, les décortiquer en droites, ou encore les transformer. Nous posons cette question, parce que nous concevons les mathématiques comme un acte de pensée, et qu'elles devraient être enseignées d'abord comme cet acte de pensée plutôt qu'exclusivement comme un savoir institué.

L'épistémologie, à l'œuvre ici sur quelques exemples, s'intéresse à l'acte mathématique à partir de l'histoire. Encore faut-il préciser de quelle histoire il s'agit, d'autant que la terminologie «histoire épistémologique» est utilisée ici faute de mieux, et que le terme d'épistémologie accolé à celui d'histoire peut créer malentendu. Dominique Lecourt parle «d'épistémologie historique» à propos de l'œuvre de Gaston Bachelard, et il rappelle son caractère polémique, contre certains philosophes. Dans *Activité rationaliste de la physique contemporaine*, Bachelard écrit que «pour se maintenir au centre de l'esprit travailleur et de la matière travaillée, on doit abandonner bien des traditions philosophiques aussi bien sur la réalité du monde sensible que sur la clarté native de l'esprit» [43]. C'est donc bien aussi sur l'importance à accorder à l'acte qu'il s'oppose aux traditions philosophiques. C'est vers l'histoire qu'il se tourne pour être au plus près de la «réalité de la recherche». Cependant, ceci mériterait d'être compris dans sa paradoxalité, l'histoire des sciences qu'il propose est normative et récurrente, l'historien doit prononcer des jugements par récurrence [44]. Nous avons déjà dit que la vertu que nous accordons à l'histoire est celle du dépaysement. C'est donc pour lire des différences que nous lisons des textes anciens, et non pour juger le passé d'après nos connaissances actuelles.

La mise en avant de l'acte de pensée va à l'encontre d'une distinction entre un savoir et des savoir-faire, et elle disqualifie la distinction entre un savoir savant et un savoir enseigné. Celui qui résout un problème mathématique sait et sait faire, l'acte de pensée est le même, qu'il soit savant ou débutant.

A l'opposé de cette thèse unificatrice de l'acte mathématique, nous observons que faire une distinction radicale entre l'acte de pensée de l'élève et celui du mathématicien est présenté comme une «réalité incontournable» dans beaucoup de travaux d'un fort courant de la recherche actuelle en didactique. Dans ce courant, qu'on pourrait appeler le courant de la didactique institutionnelle ou sociale [45]

43 Gaston Bachelard, Activité rationaliste de la physique contemporaine, PUF, Paris, 1951.

44 Dominique Lecourt, L'épistémologie historique de Gaston Bachelard, Vrin, Paris, 1969, pp.76-77.

45 Voir René Guitart, op.cit., pp.283-305.

des mathématiques, il semble que l'essentiel de la fonction enseignante se réduise à maîtriser le commerce des savoirs. Il faut alors impérativement transposer les savoirs qui sont disponibles sur le marché savant : le mot «transposition» autorisant l'inversion d'un ordre ou la traduction d'une idée qui ne respectent pas nécessairement le sens profond initial.

Nous concevons alors que les savoirs livrés à la consommation des élèves puissent être grandement modifiés. Le commerce sacrifiant à la diversification, nous voyons aussi comment un tel point de vue didactique tend mécaniquement à nous éloigner de l'apprentissage des mathématiques que nous venons de présenter, c'est-à-dire vu principalement comme une initiation à l'acte de penser.

Bibliographie

Arnauld Antoine, *Nouveaux éléments de géométrie*, Savreux, Paris, 1667.

Bachelard Gaston , *Activité rationaliste de la physique contemporaine*, PUF, Paris, 1951.

Barbin Évelyne, Histoire et enseignement des mathématiques : pourquoi ? comment ?, in *Bulletin de l'AMQ* (Association Mathématique du Québec), vol. XXXVII, n°1, mars 1997, pp.20-25.

Barbin Évelyne, Sur les relations entre épistémologie, histoire et didactique des mathématiques, in *Repères-IREM*, n°27, avril 1997, pp.63-80.

Barbin Évelyne, La méthode analytique de Descartes et l'évidence comme détermination de la vérité, in *Analyse et démarche analytique*, IREM de Reims, 1998, pp.79-101.

Barbin Évelyne, La démonstration : pulsation entre le visuel et le discursif, in *Produire et lire des textes de démonstrations*, IRM, Université de Rennes 1, 1998, pp.39-67.

Bkouche Rudolf, L'achèvement de l'enseignement des mathématiques, in *Repères IREM*, n°21, oct.1995, pp.79-89.

Clairaut Alexis-Claude, *Eléments de géométrie* (1765), réed. Gauthier-Villars, Paris, 1920.

CREM, *Formes et mouvements. Perspectives pour l'enseignement de la géométrie*, Nivelles, Belgique, 1998.

Desboves, *Questions de géométrie élémentaire*, Delagrave, Paris, 1875.

Descartes René, *Règles pour la direction de l'esprit*, trad.Sirven, Vrin, Paris, 1970.

Descartes René, La géométrie (1637), in *Discours de la méthode*, rééd. Fayard, Paris, 1987.

Euclide, *Les éléments*, trad. Vitrac, vol.1, PUF, Paris.

Fourrey Émile, *Curiosités géométriques*, 1907, Rééd. Vuibert, Paris, 1994.

Friedelmeyer Jean-Pierre, Les aires : outil heuristique, outil démonstratif, *Repères IREM*, n°31, avril 1998, pp.39-62.

Gravesande, *Essai de perspective*, Troyel, La Haye, 1711.

Guitart René, *La pulsation mathématique*, L'Harmattan, Paris, 1999.

Hadamard Jacques, *Leçons de géométrie élémentaire*(1898), Armand Colin, Paris, 13ème éd., 1947.

IREM, *La figure et l'espace*, Actes du 8ème colloque inter-IREM Épistémologie, IREM de Lyon, 1993.

IREM, *Le Dessin géométrique de la main à l'ordinateur*, Actes du colloque inter-IREM Géométrie, IREM de Lille, 1994.

Kourkoulos M., Troulis G., Tzanakis C.(eds), *Actes du 2ème Colloque en Didactique des Mathématiques*, 21-22 Avril 2000, Université de Crète, à paraître.

Lamy Bernard, *Les éléments de géométrie ou de la mesure des corps*, 2ème éd., Pralard, Paris, 1695, p.381.

Lamy Bernard, *Les éléments de géométrie ou de la mesure des corps*, 5ème éd., Nion, Paris, rééd. 1731, p.375-76, reproduit par l'IREM Paris 7, 1997.

Lecourt Dominique, *L'épistémologie historique de Gaston Bachelard*, Vrin, Paris, 1969.

Martzloff Jean-Claude, *A history of chinese mathematics*, Springer Verlag, 1997.

Merleau-Ponty Maurice, *Phénoménologie de la perception* (1945), rééd. Gallimard, Paris, 1968.

Monge Gaspard, *Géométrie descriptive* (1799), 5ème éd., Bachelier, Paris, 1827.

Pappus, *Collection mathématique*, trad. Ver Eecke, Blanchard, Paris, 1982.

Schopenhauer, *Le monde comme volonté et comme représentation*, trad. Burdeau, PUF, Paris, 1966.

Veyne Paul, *Comment on écrit l'histoire. Essai d'épistémologie,* Le Seuil, Paris, 1971,

Wittgenstein Ludwig, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, trad. Lescourret, Gallimard, Paris, 1983.