LA GEOMETRIE ET LA NATURE DES CHOSES

Nicolas ROUCHE
CREM Nivelles

Si peu que nous sachions encore du monde environnant historique des premiers géomètres, il est toutefois certain [...] que c'était un monde de «choses» (parmi lesquelles les hommes eux-mêmes en tant que sujets de ce monde).

EDMUND HUSSERL

Un grand avantage de la géométrie, c'est précisément que les sens peuvent y venir au secours de l'intelligence, et aident à deviner la route à suivre.

HENRI POINCARÉ

Résumé : *Les perceptions portent sur des choses particulières, individuelles. Mais les symétries et les parentés de symétries induisent la formation d'objets mentaux géométriques, qui sont des classes d'objets parcourus en imagination et aussi cernées par le langage. Les déterminismes géométriques reconnus dans l'action (par exemple le dessin aux instruments) fournissent des inférences, dont les premières sont évidentes, relèvent de la «lumière naturelle». Et celles-ci ensuite se combinent en inférences non évidentes, en preuves discursives. Nous essayons ici de comprendre ce cheminement, en nous appuyant sur quelques auteurs du XXème siècle, en particulier E. MACH, qui ont contribué à en éclairer certaines étapes.*

[*] Cet article a fait l'objet d'un exposé à l'Université d'Eté européenne d'histoire et épistémologie des mathématiques de Louvain-la-Neuve en 1999, dont les Actes sont en cours de publication. Il est reproduit ici avec l'aimable autorisation des organisateurs de cette Université.

1 Introduction : la lumière naturelle

PASCAL écrivait en 1658 : «[L'ordre de la géométrie] ne suppose que des choses claires et constantes par la lumière naturelle, et c'est pourquoi il est parfaitement véritable, la nature le soutenant au défaut du discours.»

Cette citation appelle plusieurs commentaires. Le premier est que l'adjectif *constant* n'a pas ici son sens habituel d'*invariable*. Dans le dictionnaire de FURETIERE [1694], le premier sens de *constant* est «ce qui est certain de toute certitude», et il en donne pour exemple : «Il est constant que deux et deux font quatre». Ainsi la géométrie dit la vérité, elle est selon les termes de PASCAL «parfaitement véritable».

En l'occurence il s'agit d'abord de la vérité des premières assertions géométriques, celles que l'on suppose et ne démontre pas. En effet, on ne peut tout démontrer, donc il faut bien supposer des propriétés «sans discours», ce qui veut dire sans preuve. Ces propriétés sont garanties par «la nature», ou plutôt elles sont reconnues sans prêter au doute par «la lumière naturelle». Dans *lumière naturelle*, il y a *naturelle* qui renvoie à la nature, siège des propriétés, et *lumière* qui renvoie à l'esprit qui comprend, qui souscrit à l'évidence.

Passons maintenant du XVIIème siècle à notre époque, et demandons-nous si la lumière naturelle au sens de PASCAL existe encore aujourd'hui. Est-ce qu'un être humain de nos jours conviendra comme PASCAL de l'existence de plans, de droites et de points, de leurs intersections, de l'existence des parallèles et des perpendiculaires, etc. ? Oui sans doute, à condition qu'il n'ait entendu parler ni des géométries non euclidiennes, ni de RIEMANN, ni de la relativité. Il doit s'agir d'un être humain naïf, quelqu'un qui, armé de son seul bon sens, commencerait à s'intéresser aux phénomènes géométriques et les soumettrait à l'expérience et au raisonnement.

Il existe encore aujourd'hui, comme au XVIIème siècle, des évidences communes. La différence — considérable il est vrai —, est qu'elles n'ont plus la même valeur de vérité. Nous savons dorénavant que la nature ne se révèle pas dans sa vérité profonde au regard naïf. La lumière naturelle n'est plus ce qu'elle était. Mais les évidences communes engendrent encore une géométrie naturelle à l'homme. Elles ne sont pas vraies au sens de la physique, mais elles le paraissent. Elles sont le fondement d'une géométrie approximative adaptée à l'échelle humaine.

Si on accepte qu'un savoir ne peut commencer à se construire que dans l'univers intelligible de celui qui apprend, alors la géométrie, quelles que soient les révisions radicales par lesquelles elle devra passer pour rejoindre ce qu'on appelle aujourd'hui les géométries, commence par les évidences communes, par la lumière naturelle.

L'objet de ce travail est de remonter, dans la mesure du possible, aux origines des évidences communes de la géométrie. PASCAL constatait ces évidences. Nous essayerons de les expliquer en partant de la notion d'objet invariable chez MERLEAU-PONTY [1947] et des observations de MACH [1997] sur la perception des objets symétriques. Notre espoir est que ces explications aident à comprendre et organiser les cheminements des élèves dans les débuts de la géométrie.

La substance de cet article est tirée d'une étude réalisée par le CREM [1]. Pour ne pas allonger l'exposé, nous avons décidé — non sans regret — de n'évoquer ici que des objets plans. Nous renvoyons à CREM [1999] les lecteurs qui voudraient approfondir la question, entre autres en prenant en compte les objets à trois dimensions.

2 Percevoir

2.1 La constance de la grandeur et de la forme

Considérons un objet plan (par exemple une forme découpée dans du carton), d'une taille telle que le regard puisse l'embrasser lorsqu'il se trouve devant l'observateur, en position frontale, à distance de toucher. Nous avons l'impression que lorsque l'objet est dans cette position, nous le voyons véritablement tel qu'il est. *Nous privilégions cette position de perception commode*, par rapport à toutes celles correspondant à des distances et des orientations différentes. Toutefois, notre connaissance de l'objet englobe les souvenirs de toutes ces positions variées.

Que faisons-nous pour bien voir un objet de ce type rencontré par hasard ? Nous tournons notre regard vers lui, nous l'éloignons ou le rapprochons de nos yeux pour le voir sous un angle approprié, nous ajustons la courbure de nos cristallins pour le voir nettement, nos ajustons l'ouverture de nos pupilles pour qu'il ne nous paraisse ni trop sombre, ni trop brillant, et nous l'amenons en position frontale [2].

Aucune de ces manœuvres n'est inspirée par des *considérations scientifiques* relatives à la distance, l'orientation, l'éclairement, etc. Selon MERLEAU-PONTY, elles se situent à *un niveau prélogique*, et la position privilégiée est perçue comme un point de maturité de la perception, comme la position qui équilibre les influences de l'objet sur l'observateur. R. ARNHEIM [1976] parle en l'occurence de *l'intelligence visuelle*. Toutes les manœuvres décrites ci-dessus s'enchaînent en tout cas dans un ordre approprié au résultat escompté et sont guidées par une intention de connaître.

On acceptera sans doute volontiers que la grandeur et la forme objectives d'un objet du type considéré soient celles que nous lui attribuons dans la position privilégiée. Mais alors comment reconnaissons-nous que l'objet *conserve sa grandeur et sa forme*, bien que son apparence change selon les positions qu'il occupe par rapport à nous ? En fait, l'ensemble de ses apparences liées aux conditions de sa présentation forme un système structuré et, selon MERLEAU-PONTY, la constance de cette structure — nous pouvons toujours retrouver une apparence particulière quelconque — s'identifie à ce que nous appelons la constance de la grandeur et de la forme.

Qui plus est, les changements de position de l'objet par rapport à nous et les changements correspondants de la perception sont continus, ce qui contribue à assurer l'identité de l'objet perçu. Comme le dit R. ARNHEIM : «Dans la perception, les divers aspects d'un objet, loin de constituer une «déroutante variété», s'enchaînent en séquences continues. Ce sont plus qu'une multitude de cas éparpillés au hasard, des transformations progressives». Et il

---

1 Voir CREM. [1999]

2 D'autres manœuvres s'ajoutent à cela, qui dépendent de la forme particulière de l'objet. Par exemple, s'il a la forme d'une lettre, nous le tournons dans le plan frontal pour que la lettre apparaisse dans la position normale de lecture. Sur certains de ces phénomènes qui dépendent de la forme de l'objet, voir section 3.

conclut : «l'identité n'a donc pas à être extrapolée au hasard».

2.2 Reconnaître les congruences

Continuons à nous intéresser à des objets plans indéformables et de dimensions modérées. Jusqu'à présent, nous avons cherché à voir comment nous connaissons et arrivons à connaître un tel objet. Mais nous n'avons envisagé qu'un objet quelconque. Autrement dit, nous n'avons pas pris en compte le rôle joué par les diverses formes possibles de l'objet.

Or notre environnement — minéral, végétal, animal, humain, fabriqué — est peuplé d'objets présentant des régularités, des symétries. Nous avons tendance à l'oublier à force de vivre au milieu d'eux. Or ce sont seulement ces objets qui ont permis la constitution de la géométrie. Celle-ci n'aurait pas eu de matériau dans un univers complètement désordonné.

Voyons maintenant comment nous arrivons à reconnaître les symétries les plus simples, à savoir certaines congruences [3]. Dans l'immédiat, nous examinerons deux objets congruents, mais nos conclusions s'appliqueront à deux parties congruentes d'un même objet.

Soient par exemple les deux taches noires de la figure 1. Elles sont congruentes, mais on ne s'en aperçoit pas au premier regard. Par contre, si on les découvre en position symétrique comme sur la figure 2, ou translatées l'une de l'autre comme sur la figure 3, on voit d'emblée qu'elles sont congruentes. Sur la figure 2, l'axe de symétrie est «vertical», et de ce fait il est dans le plan de symétrie de l'observateur. Sur la figure 3, la direction de la translation est horizontale. Sur les deux figures, le regard se déplace horizontalement chaque fois qu'il passe d'une partie d'une des deux taches à la partie homologue de l'autre (voir figures 5 et 6). Par contre, les segments joignant des points homologues sur la figure 1 paraissent disposés de manière anarchique (voir figure 4).

La congruence de deux taches se perçoit encore aisément — un peu moins toutefois que dans le cas des figures 2 et 3 — lorsqu'elles sont symétriques avec un axe horizontal (figure 7), ou lorsqu'elles sont en situation de symétrie centrale (figure 8). Dans le premier de ces deux cas, le regard se meut verticalement [4] pour passer d'un point à son homologue (figure 9), et dans le second, il passe par le centre de symétrie [5] (figure 10).

En conclusion, il y a des situations où la congruence se reconnaît aisément, ou sans trop de peine. Il en existe d'autres où elle ne se reconnaît pas : le regard est impuissant. D'où la question : que peut-on faire pour établir la congruence de deux objets lorsqu'on ne la perçoit pas directement ? On peut d'abord recourir à des *opérations mécaniques*, comme de les amener dans une position où on perçoit leur congruence, ou encore de les superposer. Mais on peut aussi, si on en dispose, recourir à un *critère intellectuel*. C'est ce qu'illustre l'exemple suivant. Soient deux triangles disposés de telle façon qu'on ne peut pas les

3 Nous préférons le terme congruent à isométrique, parce que ce dernier renvoie à des mesures, qui sont hors de notre propos. Deux objets plans sont congruents s'ils sont superposables, fut-ce après retournement de l'un deux.

4 Il semble établi (cf. CREM [1999]) que l'être humain compare plus facilement deux objets lorsqu'ils sont situés sur une horizontale que lorsque le regard doit descendre ou monter pour passer de l'un à l'autre.

5 Voir CREM [1999] pour une analyse plus détaillée des perceptions de congruences.

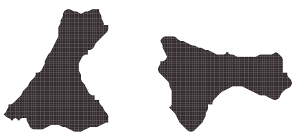

Figure 1

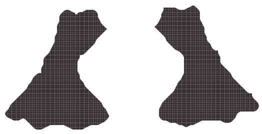

Figure 2

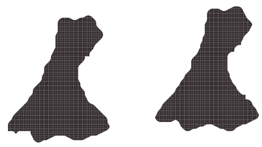

Figure 3

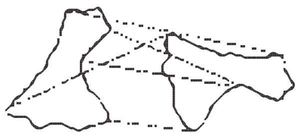

Figure 4

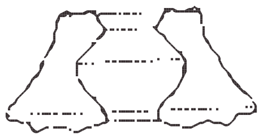

Figure 5

Figure 6

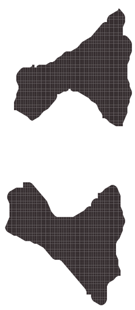

Figure 7

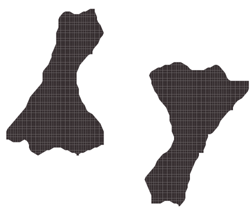

Figure 8

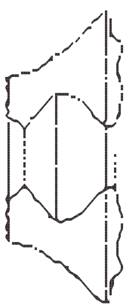

Figure 9

Figure 10

comparer à vue. Si on sait que leurs côtés sont égaux deux à deux, alors on sait aussi que les deux triangles sont congruents. La figure 11 illustre une situation de ce type.

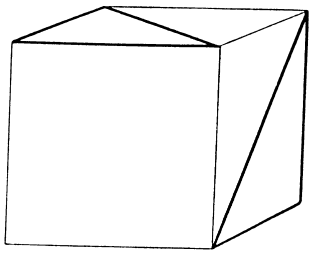

Figure 11

Faisons le point. Nous observons dès à présent, dans le cadre de notre analyse, un registre élémentaire de la pensée géométrique. Nous nous sommes en effet posé la question suivante : quand peut-on dire que deux objets ou deux parties d'un objet sont «les mêmes» du point de vue de la grandeur et de la forme ? On peut croire que c'est là l'un des premiers problèmes d'une géométrie naturelle. Les critères perceptifs et mécaniques, qui permettent parfois d'y répondre, relèvent de la vie et de l'intelligence pratiques. On peut dire que la géométrie intervient dès que des critères intellectuels permettent d'*inférer* la congruence.

Vue sous cet angle, la géométrie apparaît comme un système d'instruments intellectuels qui pallie les insuffisances de la perception et permet de les dépasser. Elle étend notre connaissance des objets au delà des limites, à vrai dire étroites, de notre perception [6]. Elle est comme un instrument d'optique qui donnerait plus de puissance à notre vue. En ce sens on peut dire qu'elle nous aide à *saisir l'espace*. Comme dit H. FREUDENTHAL [1973], «la géométrie au niveau de base, c'est saisir l'espace». En éclairant les situations spatiales, elle nous met à l'aise dans l'espace.

Toutefois, si la géométrie commence avec les opérations intellectuelles, il faut souligner avec force qu'elle se constitue sur le terrain des expériences sensorielles et mécaniques et serait impossible sans ces dernières. MACH insiste beaucoup sur cet ancrage de la géométrie dans la réalité sensible et l'action. Il écrit : «Ce sont [...] les sensations d'espace [...] qui servent de point de départ et de fondement à toute géométrie». Et encore : «Les propriétés physiologiques ont probablement donné la première impulsion à la recherche en géométrie». Cette affirmation nous renvoie sans doute à une préhistoire mystérieuse où les êtres humains, reconnaissant les configurations symétriques les plus simples, ont commencé à explorer plus avant l'espace à la force de leur esprit.

MACH affirme enfin que la géométrie, née sur le terrain des perceptions et du fait de leurs limitations, ne perd pas le contact avec elles. «Une géométrie scientifique, écrit-il, est impensable hors de la coopération de l'intuition sensible et de l'entendement».

Ces affirmations ont des conséquences importantes, entre autres pour les enseignements maternel et primaire. C'est sur le terrain des perceptions et de l'action que *se prépare* l'apprentissage de la géométrie.

6 Nous percevons mal, ou nous ne percevons pas du tout, non seulement les objets trop proches ou trop éloignés, ou mal orientés dans le champ de notre regard, mais encore ceux qui sont trop petits ou trop grands. Il est par exemple impossible percevoir la forme et les dimensions d'une parcelle de terrain, à moins de la survoler. C'est bien pour cela qu'on en dresse un plan à échelle humaine.

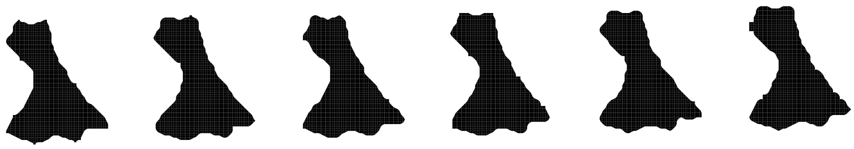

Figure 12

2.3 Symétries perçues et esthétique

Il nous reste à expliquer un dernier aspect des perceptions, avant de passer de celles-ci aux concepts : il s'agit de leur valeur esthétique. Commençons par quelques observations. Bien que le motif de base de la figure 1 — une tache quelconque — soit irrégulier, on éprouve une sensation d'équilibre et d'agrément lorsqu'on en découvre deux en position symétrique comme sur la figure 2. Une sensation analogue émane de la figure 3, et davantage encore lorsqu'on la reproduit plusieurs fois pour former une frise (figure 12).

A contrario, cette sensation agréable s'évanouit lorsque les deux objets congruents sont orientés de façon quelconque : ils donnent alors au contraire une sensation de déséquilibre, de désordre.

Cette sensation esthétique est liée à la présence des droites virtuelles qui joignent chaque point à son homologue, au parallélisme de ces droites et à leur horizontalité. D'autre part, comme le note MACH, le droite provoque par elle même une sensation d'équilibre, particulièrement vive lorsque son orientation s'accorde aux éléments de symétrie de l'appareil perceptif de l'observateur. Il écrit : «La *ligne droite* [7] en tous ses éléments, conserve la même direction, et excite partout la même sensation d'espace. D'où son avantage esthétique évident. Par ailleurs les lignes droites qui se trouvent dans le plan médian [8] ou qui lui sont perpendiculaires bénéficient d'une situation intéressante, en ce qu'elles occupent une situation de symétrie et se comportent de la même manière par rapport aux deux moitiés de l'appareil visuel. On ressent toute autre position des lignes droites comme une distortion par rapport à la symétrie et comme “allant de travers”».

S'il est vrai, comme nous l'avons vu, que la reconnaissance perceptive de certaines symétries simples soit au seuil d'une emprise mentale sur l'ordre des choses, qu'elle soit la porte d'entrée et la condition d'intelligibilité géométrique du monde, cela nous paraît d'une grande importance, entre autres sur le plan pédagogique, que les symétries perçues facilement soient aussi porteuses d'un pouvoir esthétique élémentaire [9].

7 Dans cette citation, c'est MACH qui souligne.

8 MACH entend par là le plan de symétrie du corps humain.

9 Il semble bien que les symétries aisément perçues, non seulement soient à l'origine de la pensée géométrique, mais encore soient le matériau de base des arts plastiques et de la musique. Comme l'écrit PICASSO (cité par R. ARNHEIM [1976]) en ce qui concerne son art : «La peinture est poésie ; elle s'écrit toujours en vers avec des rimes plastiques, jamais en prose. Les rimes plastiques sont des formes qui riment entre elles ou qui créent des assonances avec d'autres formes ou l'espace qui les entoure.» Cette comparaison de la géométrie et des arts du point de vue de leur matériau de base est approfondie et illustrée dans CREM [1999].

3 Concevoir

3.1 Les deux faces des concepts

Lorsqu'on reconnaît une congruence visuellement ou mécaniquement, il s'agit toujours de deux objets congruents particuliers. Par contre les critères intellectuels, c'est-à-dire géométriques, sont eux applicables à des catégories d'objets, à des concepts. Nous en arrivons maintenant à l'étude de ceux-ci. Mais comme nous nous occupons des origines de la géométrie, nous envisagerons plutôt les *objets mentaux*, au sens de FREUDENTHAL [1983], que les concepts inscrits dans une théorie mathématique de grande ampleur. Les objets mentaux sont des concepts encore assez proches de ceux de la pensée commune et toutefois assez élaborés pour être déjà des instruments efficaces d'organisation d'un champ de phénomènes [10].

Un objet mental renvoie à un ensemble de choses possédant des caractères communs [11]. Selon la distinction classique, un tel ensemble peut en principe être saisi de deux façons : soit *en extension*, c'est-à-dire par passage en revue de tous ses éléments, soit *en compréhension*, c'est-à-dire par l'ensemble des propriétés que possèdent ses éléments et qu'ils sont seuls à posséder.

Chaque objet mental géométrique est inévitablement saisi des deux façons. La saisie en extension est première, l'esprit se représentant les objets un à un. Mais elle devient difficile lorsque le nombre d'objets va croissant, et impossible lorsque ce nombre est infini. La saisie en compréhension est seconde, elle s'exprime dans une définition, elle renvoie au langage. Les objets saisis en extension sont les référents de la définition, ils constituent son *domaine de sens*. Ils sont les sources de l'intuition, tandis que la définition se situe du côté symbolique et formel de la pensée.

Ceci dit, il devient assez clair que le savoir géométrique aura tendance à se constituer d'abord là où l'accès au sens — la vue des concepts en extension — est le plus facile. Essayons donc, en nous bornant dans un premier temps aux objets mentaux qui renvoient à des figures, de discerner précisément les types de figures dont les variantes possibles peuvent être imaginées sans trop de difficulté, celles par conséquent qui opposent peu d'obstacles à un parcours en extension.

3.2 Formes libres à symétrie simple

La tache arbitraire de MACH (voir section 2.2), prise isolément, ne renvoie à aucune catégorie particulière d'objets géométriques. Par contre, l'univers quotidien offre à notre perception une foule d'objets ou d'assemblages d'objets de formes libres — des formes non géométriques au sens ordinaire de ce terme — et qui pourtant manifestent une de ces symétries simples dont parle MACH : symétrie orthogonale, translation, symétrie centrale. Ces formes symétriques libres sont tellement répandues qu'il est à peine utile d'en donner des exemples. Mentionnons, pour les symétries orthogonales, les papillons, de nombreuses feuilles, les photos du visage humain de face [12],... ; pour les translations, les frises, les

10 Sur la notion d'objet mental et celle de phénomène, cf. H. FREUDENTHAL [1983] ou CREM [1999].

11 Nous n'envisageons pas ici les concepts primitifs dont parle par exemple L. VYGOTSKI [1997]. Observés surtout chez les petits enfants, ils regroupent des objets ayant entre eux des liens parfois fortuits, et qui en tout cas ne se réduisent pas à un ensemble de caractères communs.

12 Nous nous bornons ici à des objets faciles à décrire en deux dimensions.

papiers peints, des mots écrits tels que *flonflon*,... ; pour les symétries centrales, d'assez nombreux motifs ornementaux.

A propos des objets de ce type, renversons maintenant le point de vue de MACH. Celuici disait : si deux formes sont transformées l'une de l'autre par une de ces symétries simples, et si en outre elles se présentent à l'observateur en position privilégiée, alors celui-ci reconnaît sans peine leur congruence. Or ce qui se passe aussi, c'est que dans les situations décrites, non seulement la congruence des figures est reconnue, mais encore *le type de symétrie dont elles sont le siège est identifié lui aussi*.

Un objet présentant une symétrie orthogonale est reconnu, en position privilégiée, moins par l'évocation du retournement (ou du mouvement de pliage) qui envoie un côté de l'axe sur l'autre et réciproquement, que par la correspondance immédiatement perçue entre ses parties gauche et droite. Les objets symétriques forment une catégorie, un objet mental, correspondant à ce type de perception.

Une translation est reconnue comme telle, c'est-à-dire comme correspondant à un glissement d'une forme vers l'autre sans changement de direction. Les objets ou figures se présentant sous forme de parties translatées les unes des autres forment une catégorie, un objet mental, le lien entre eux étant précisément ces glissements sans changement de direction, un type de mouvement qui se retrouve dans tous.

La parenté des objets présentant une symétrie centrale est sans doute reconnue par l'évocation mentale, pour chacun d'eux, du demi-tour qui applique l'objet sur luimême.

Insistons, car c'est important, sur le fait que les reconnaissances dont nous parlons ne portent que sur les symétries simples, celles identifiées par MACH [13], et qu'elles exigent en outre la présentation en position privilégiée. Les lois mathématiques plus compliquées de correspondance entre formes ne sont pas *perçues*, et ne sauraient être considérées au stade naissant de la géométrie.

3.3 Formes simples à symétrie modérée

Bornons-nous aux formes polygonales [14], et commençons par les rectangles. Si on partitionne l'ensemble des rectangles en classes de similitude, ce qui revient à considérer que deux rectangles sont *les mêmes* s'ils ont même proportion, alors un rectangle est déterminé par un seul paramètre, à savoir le rapport de grandeur de ses côtés. Ainsi, la classe des rectangles considérés *à similitude près* est *une famille à un paramètre*.

Cette propriété est importante : elle se traduit par le fait que l'on peut représenter l'ensemble des rectangles par une vue ordonnée de certains d'entre eux, en les disposant en une seule rangée. C'est ce que montre la figure 13, qui se parcourt aisément. Une manière naturelle d'appréhender l'ensemble des rectangles consiste à partir de l'un d'entre eux et, dans un premier temps, à faire tendre sa base mentalement de manière continue vers zéro, puis dans un deuxième temps à faire tendre sa base vers l'infini. On s'efforce en ce faisant de parcourir l'ensemble des rectangles en extension.

13 Celles-ci s'étendent jusqu'à certaines similitudes, que nous n'avons pas mentionnées pour ne pas allonger l'exposé (cf. CREM [1999]).

14 Pour une examen plus complet de la question, voir CREM [1999].

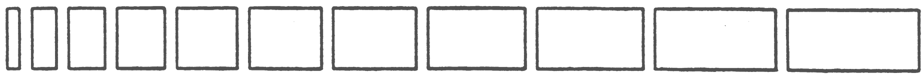

Figure 13

Par ailleurs, les propriétés du rectangle sont nombreuses. Seules les plus prégnantes, celles qui s'imposent le plus facilement à l'observateur, vont jouer lorsqu'on s'efforce de le saisir en compréhension. Mais encore chaque observateur a-t-il sans doute sa manière de connaître un rectangle. Par exemple, le rectangle en position privilégiée peut être saisi par le fait qu'il a deux côtés verticaux et deux horizontaux. Ou encore parce qu'il a deux paires de côtés égaux et quatre angles droits.

Venons-en maintenant aux triangles isocèles. Ils sont caractérisés, à similitude près, par le rapport de leur base à leur hauteur. Ils forment donc aussi *une famille à un paramètre*. La figure 14, aisée à parcourir d'un bout à l'autre, donne une idée raisonnable de tous les triangles isocèles possibles : il s'agit d'un essai de parcours en extension. Une autre idée de ces triangles s'obtient à partir de l'un d'eux, dont on maintient la base constante, en faisant tendre sa hauteur de manière continue successivement vers zéro et vers l'infini.

Par ailleurs on saisit les triangles isocèles en *compréhension*, en évoquant l'une ou l'autre de leurs propriétés simples : par exemple, en position privilégiée, l'égale inclinaison de deux côtés sur la base horizontale et la propriété de symétrie orthogonale.

Considérée de même à similitude près, la classe des parallélogrammes est *une famille à deux paramètres*. Pour déterminer un parallélogramme, on doit se donner le rapport de deux côtés adjacents, et l'angle qu'ils font entre eux. Du fait qu'il dépend de deux paramètres, le parallélogramme est une figure plus compliquée que le rectangle ou le triangle isocèle. La figure 15 se présente sous forme d'un tableau à double entrée. Ce tableau, évidemment moins aisé à parcourir que la rangée des rectangles ou celle des triangles isocèles, n'oppose néanmoins pas trop de difficulté à l'imagination : on accède sans trop de peine en extension à la catégorie des parallélogrammes.

Pour saisir les parallélogrammes en compréhension, on considérera par exemple, en position privilégiée, l'horizontalité et la congruence de deux côtés, l'égale inclinaison et la congruence des deux autres.

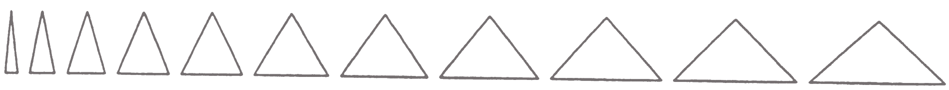

Figure 14

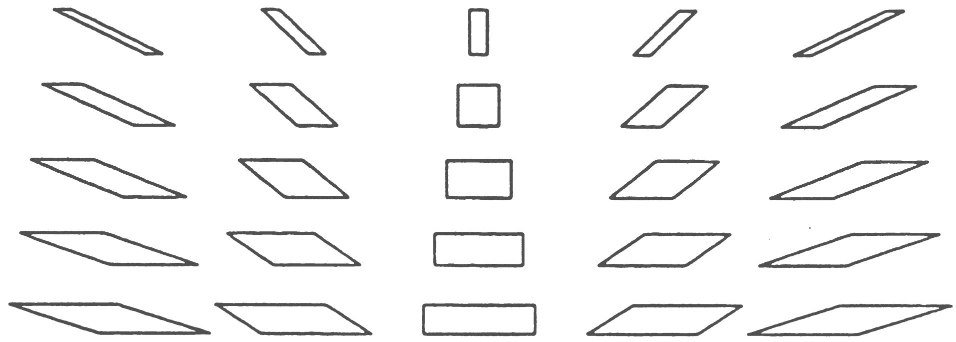

Figure 15

Il est raisonnable de penser que la première géométrie raisonnée va se constituer à partir de figures simples telles que le rectangle ou le triangle isocèle, ou relativement simples comme le parallélogramme. Ces trois exemples suffisent à illustrer ce que nous entendons par figure simple : une *figure simple* est une figure aisément accessible en extension et en compréhension, donc une figure dont les variétés se parcourent sans peine en imagination et dont certaines propriétés caractéristiques sont saisies facilement.

Il existe, outre les rectangles, les triangles isocèles et les parallélogrammes, d'autres exemples de figures simples à symétrie modérée. Par exemple, les figures formées de deux droites sécantes (un paramètre), ou de deux parallèles et une sécante (un paramètre), les triangles (deux paramètres) [15]. Pour montrer par contraste ce qu'est une figure simple, montrons deux sortes de figures compliquées.

D'abord on ne reconnaît pas à vue un heptagone (ou un octogone), même s'il est régulier. Il faut pour l'identifier une intervention de l'intelligence, que ce soit par comptage du nombre des côtés ou par analyse détaillée des symétries. Il en va de même pour toutes les classes de polygones réguliers comportant beaucoup de côtés.

Considérons maintenant la classe des quadrilatères. Montrons qu'elle est *une famille à quatre paramètres*. Soit par exemple, à la figure 16, un quadrilatère quelconque *ABCD*, et soit à construire un quadrilatère semblable à celui-là. On pourra se donner un côté [*A'B'*] quelconque pour correspondre à [*AB*]. Ensuite on reproduit l'angle a. On construit [*B'C'*] avec un rapport à [*A'B'*] égal au rapport de [*BC*] à [*AB*]. On reproduit ensuite l'angle b, puis on construit le côté [*D'C'*] avec un rapport à [*B'C'*] égal au rap-

15 Pour être complet, il faudrait encore citer les figures à zéro paramètres, c'est-à-dire celles qui sont toutes semblables entre elles : c'est le cas des carrés, des cercles, des paires de parallèles, etc. (cf. CREM [1999]).

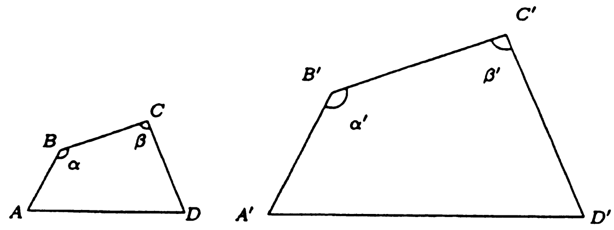

Figure 16

port de $[DC]$ à $[BC]$. Comme nous avons dû nous donner quatre mesures (deux angles et deux rapports de côtés) pour construire la figure, la famille a bien quatre paramètres.

A cause du nombre de paramètres (on pourrait dire aussi de *degrés de liberté*), des phénomènes nouveaux apparaissent, que l'on n'avait pas rencontrés dans le rectangle, le triangle isocèle ou le parallélogramme, à savoir la non-convexité et les points doubles (lorsque deux côtés se croisent).

La variété des quadrilatères, dont la figure 17 ne donne qu'une faible idée, défie l'imagination. On ne peut pas représenter cette famille par une figure analogue à celle que nous avons proposée pour les parallélogrammes : il faudrait ici construire un réseau de figures à quatre dimensions.

Ainsi la famille des quadrilatères, aisée à saisir en compréhension (quatre côtés rectilignes enchaînés) est extrêmement difficile, sinon impossible, à saisir en extension. Seule la géométrie raisonnée permettra d'acquérir des connaissances générales sur cette famille.

3.4 Le sens étroit et le sens large

Nous avons vu à la section précédente que les figures simples à symétrie modérée, celles qui sont au départ du savoir géométrique, sont saisies en compréhension par quelques propriétés caractéristiques. Toutefois, dès que nous réfléchissons à une telle figure, nous pouvons faire état de toute l'expérience que nous en avons et d'une foule d'autres propriétés. Celles-ci s'expriment en termes de perceptions, de relations aux directions privilégiées du monde physique, aux symétries de notre corps, et à toutes sortes d'expériences que nous avons de la figure en question.

Prenons l'exemple du rectangle. Nous savons qu'il possède quatre angles droits, des côtés opposés parallèles et égaux, que si deux de ses côtés opposés sont verticaux, les deux autres sont horizontaux. Mais nous nous connaissons bien d'autres propriétés du rectangle, acquises lors de constructions, dessins, pliages divers.

Par exemple :

chaque médiane d'un rectangle le divise

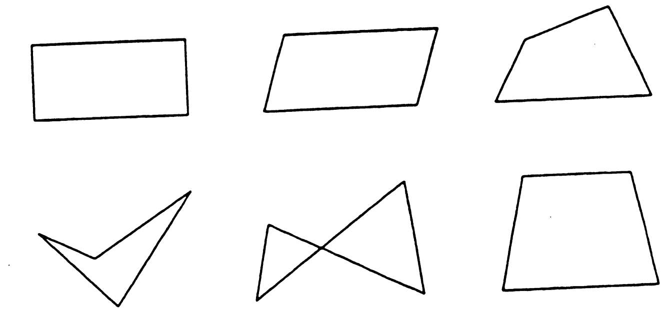

Figure 17

en deux rectangles congruents (figure 18(a) et (b));
les deux médianes d'un rectangle divisent celui-ci en quatre rectangles congruents (figure 18(c));
les médianes d'un rectangle sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu;
le rectangle possède deux axes de symétrie orthogonale ; ces deux axes sont orthogonaux entre eux.

Les diagonales font apparaître de nouvelles propriétés :

chaque diagonale d'un rectangle décompose celui-ci en deux triangles rectangles congruents (figure 18(d) et (e)) ; l'un quelconque des deux est superposable à l'autre par un mouvement d'un demi-tour autour du milieu de la diagonale en question.
Les deux diagonales décomposent le rectangle en deux couples de triangles isocèles congruents (figure 18(f)) ; dans chaque couple, les deux triangles sont symétriques orthogonaux l'un de l'autre.

Si on trace les médianes et les diagonales d'un rectangle, on obtient une nouvelle décomposition intéressante :

les médianes et les diagonales d'un rectangle décomposent celui-ci en huit triangles rectangles congruents (figure 18(g)).

Comme nous l'avons dit, toutes ces propriétés contribuent à la connaissance familière du rectangle, plus ou moins riche d'une personne à l'autre. Les structurations plus complexes du rectangle n'en font habituellement pas partie. Par exemple, la plupart des gens ne pensent pas spontanément au losange que l'on obtient en joignant les milieux des côtés d'un rectangle (figure 18(h)), et beaucoup moins encore au carré que forment les bissectrices d'un rectangle (figure 18(j)). L'essentiel pour nous maintenant et pour ce qui va suivre, est que le rectangle possède pour chaque personne un visage familier fait d'un certain nombre de traits fondamentaux, un paquet de propriétés. Il ne se réduit pas à la définition qu'en donnent les dictionnaires : un quadrilatère à quatre angles droits. Cette définition cerne son *sens étroit*. Mais il possède un *sens large*, soutien de la pensée créative.

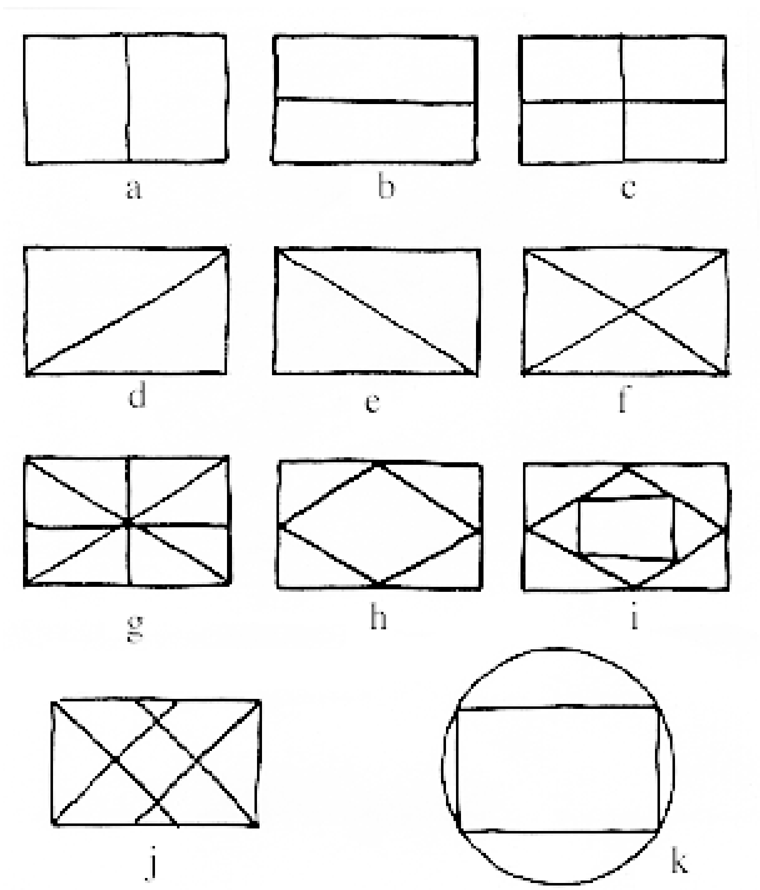

Figure 18

Notons enfin que le rectangle saisi en compréhension ne se ramène pas à un ensemble de propriétés juxtaposées, immobiles dans l'esprit, vouées à la seule contemplation. En effet, ces propriétés, acquises dans le registre perceptivo-moteur, manifestent d'emblée des liens de causalité, d'implication. On sait par exemple que si on a dessiné une médiane d'un rectangle, lorsqu'on dessinera l'autre, on la trouvera perpendiculaire à la première. Par exemple encore, *si* on coupe un rectangle suivant une diagonale, *alors* on obtient deux triangles et on peut superposer l'un à l'autre par un demi-tour autour du milieu de la diagonale. Ou encore, *si* on joint les milieux des côtés successifs d'un rectangle, *alors* on obtient un losange.

Ainsi la constitution des objets mentaux en compréhension fournit immédiatement des amorces d'une pensée déductive. Regardons maintenant ce phénomène de plus près, en tâchant d'expliquer comment naissent les premières inférences.

4. Inférer

Pour nous éclairer, commençons par quatre exemples d'implications, en regardant pour chacune ce qui en fonde l'évidence. Les trois premières sont des conditions suffisantes pour qu'un quadrilatère soit un rectangle. La dernière est une condition suffisante pour qu'on puisse assembler trois segments en forme de triangle.

4.1 Quatre exemples

DEUX COTÉS CONGRUENTS
PERPENDICULAIRES À UN TROISIEME

Dans un plan frontal (un tableau noir par exemple), on fait le dessin suivant (figure 19) :

on trace un segment vertical [*AB*] ;
à partir de *A* et de *B*, et du même côté de [*AB*], on dessine deux demi-droites horizontales ;
on porte une même distance sur chacune d'elles, ce qui détermine deux points *C* et *D* ;
on joint *C* et *D* ; le quadrilatère *ABCD* est un rectangle.

Cette construction faite ou refaite — en réalité de nombreuses fois refaite en pensée — suffit à m'assurer de la propriété suivante :

Si un quadrilatère possède deux côtés congruents perpendiculaires à un même troisième et situés du même côté, il est rectangle.

DIAGONALES CONGRUENTES
SE COUPANT EN LEUR MILIEU

On articule en leur milieu deux tiges d'égale longueur. On dispose l'objet ainsi obtenu dans un plan frontal, de sorte que les deux tiges aient une pente égale, en deux sens opposés (figure 20(a)). Les extrémités *A* et *B* sont alors sur une horizontale, de même que les extrémités *D* et *C*. De même *A* et *D* sont sur une verticale, ainsi que *B* et *C*. Si on des-

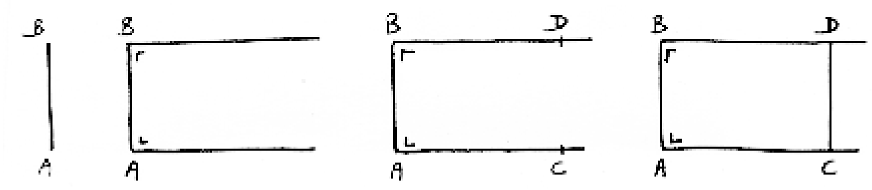

Figure 19

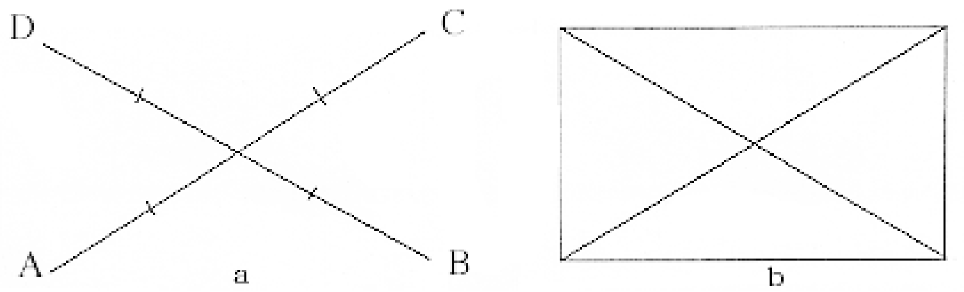

Figure 20

sine le quadrilatère *ABCD*, on trouve un rectangle (figure 20).

D'où la propriété suivante :

Si les diagonales d'un quadrilatère sont congruentes et se coupent en leur milieu, le quadrilatère est un rectangle.

DÉFORMER UN PARALLÉLOGRAMME

Voyons maintenant comment un mouvement continu peut aussi suggérer une détermination de la forme rectangulaire. On réalise un parallélogramme avec des tiges articulées, et on le dispose devant soi de manière que deux de ses côtés soient horizontaux. Les deux autres ont un certaine inclinaison par rapport à la verticale. Mais ils sont parallèles, et qui plus est, ils le demeurent lorsqu'on déforme continûment l'objet.

On redresse un de ces deux côtés en le faisant tendre vers la verticale. L'autre arrive à la verticale en même temps, et le quadrilatère obtenu ainsi est bien un rectangle. On arrive ainsi à la propriété suivante :

Si un parallélogramme possède un angle droit, il est rectangle.

L'INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

Considérons trois segments (ou trois tiges) dont l'un est plus grand que la somme des deux autres. Distinguons trois cas.

Soit les deux plus petits mis bout à bout forment un segment plus petit que le troisième. Dans ce cas, on n'arrive pas à les assembler en triangle (figure 21(a)).

Soit les deux plus petits mis bout à bout forment un segment égal au troisième. Alors on n'arrive pas non plus à les assembler en triangle. En effet, lorsqu'on essaie, les deux plus petits ne se touchent que lorsqu'ils viennent s'aligner sur le grand (figure 21(b)).

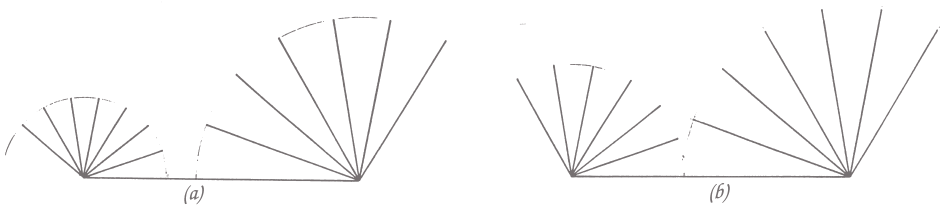

Figure 21

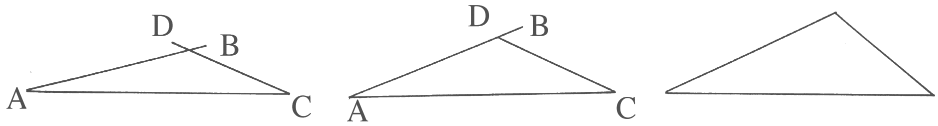

Figure 22

Soit les deux plus petits mis bout à bout forment un segment plus grand que le troisième. Alors on peut les assembler en triangle. En effet, on peut disposer les deux plus petits (appelons-les [*AB*] et [*CD*]) de sorte qu'ils se coupent.

Tournons ensuite le segment [*AB*] jusqu'à ce qu'il passe par *D*. Faisons ensuite glisser *D* sur [*AB*] jusqu'à ce que D vienne coïncider avec *B*. Nous avons obtenu un triangle (figure 22).

Ces manipulations conduisent à la proposition suivante :

Si trois segments (inégaux) sont tels que le plus long est plus petit que la somme des deux autres, alors on peut les disposer en triangle. Sinon ce n'est pas possible.

4.2 Des conditions déterminantes évidentes

Après avoir parcouru ces quatre exemples d'inférence élémentaire, voyons maintenant ce qu'elles ont en commun. Dans chaque cas, on a sous les yeux — ou comme image mentale —, un objet, une situation : un rectangle que l'on cherche à dessiner, deux tiges que l'on assemble, un parallélogramme articulé, trois tiges que l'on cherche à assembler en triangle. Il s'agit de situations simples, d'objets que l'on reconnaît sans analyse, dont on connaît par ailleurs diverses propriétés et que l'on sait manipuler. Dans chaque cas, on réalise réellement ou en pensée une expérience, une action, un dessin et on conclut de la même façon : quand on fait telle ou telle chose, on obtient tel ou tel résultat. En d'autres termes, telles ou telles propriétés que l'on mobilise entraînent que l'on obtient (ou que l'on ne peut obtenir) la figure souhaitée. On reconnaît celle-ci sans analyse, ou au moins de manière implicite, sans recourir à une définition. Par exemple, on n'a pas besoin de *formuler* que si deux côtés sont horizontaux et les deux autres verticaux, on a bien un rectangle. Ou encore on reconnaît un triangle à vue.

Nous appelons *conditions déterminantes* d'un type de figure ou de configuration géométrique, des conditions suffisantes obtenues ainsi par expérience réelle ou mentale.

Les conditions déterminantes ne portent bien entendu pas sur une seule figure, une seule situation. Lorsqu'il était ci-dessus question du rectangle, il s'agissait de tous les rectangles, et dans le quatrième expérience, il s'agissait de tous les triplets de tiges. En d'autres termes, l'inférence porte dans chaque cas sur une infinité de figures, même si l'objet sur lequel on expérimente en réalité ou en pensée est un objet singulier. Il représente tous les autres objets de son espèce. Il est *paradigmatique*.

A. ARNAULD [1683] observait déjà au XVIIème siècle que les ensembles de figures dont traite la géométrie sont infinis : «On peut dire que toutes les propositions géométriques sont de même infinies en étendüe ; parce que l'on n'y conclut pas ce qu'on démontre d'une seule ligne, d'un seul angle, d'un seul cercle, d'un seul triangle, mais de toutes les lignes, de tous les angles, de tous les cercles, de tous les triangles ; et qu'ainsi l'esprit les renferme et les comprend tous en quelque sorte quelques infinis qu'ils soient».

Mais qu'est-ce qui permet, dans le cas des expériences que nous avons décrites, d'étendre la conclusion d'une figure à toutes celles de la même espèce ? Deux circonstances rendent cette extension possible et naturelle : le première est que nous faisons l'expérience en position privilégiée, c'est-à-dire que nous nous mettons dans les conditions les meilleures pour voir ce qui se passe ; la seconde est que les figures ou situations sur lesquelles nous expérimentons sont simples. Elles sont définies, à similitude près, par un ou deux paramètres. L'imagination glisse facilement d'une figure à une autre de la même famille, et ceci d'autant plus que les paramètres définissant la famille peuvent varier continûment. L'imagination entame en douceur le parcours de tous les cas possibles.

Notons cependant que tout le monde ne partage pas les mêmes évidences.

Il est sans doute vrai que certains phénomènes très simples et très symétriques s'imposent comme évidents. Ce pourrait être le cas par exemple pour l'égale inclinaison des deux montants d'une échelle à montants égaux dressée sur un sol horizontal. Mais il existe des phénomènes évidents pour certains esprits, et non pour tous.

Ainsi les évidences ne sont pas nécessairement des données immédiates. Elles s'appuient fréquemment sur un vécu, sur une expérience. Il semble clair que certains phénomènes apparaissant comme non évidents à certaines personnes, deviennent évidents pour elles à la suite d'observations, de constructions, de manipulations appropriées. C'est ainsi que peut être installé, dans un groupe d'élèves hétérogène, un consensus minimal pour servir de base aux premiers éléments d'une géométrie raisonnée.

4.3 Des inférences inductives

Il semble assez clair que les conditions déterminantes trouvent leur fondement dans la causalité physique. Comme nous venons de le voir, le schéma est constant : on construit, on dessine, on dispose des objets de telle ou telle façon, puis on constate tel résultat. Et ensuite la propriété observée est étendue à l'ensemble des figures du même type. Il s'agit donc au départ d'inférences inductives.

Mais qu'est-ce que cela veut dire au juste ? «La méthode des sciences physiques, écrit HENRI POINCARÉ [1943], repose sur l'induction qui nous fait attendre la répétition d'un phénomène quand se reproduisent les circonstances où il avait une première fois pris naissance.» Cette définition énonce le principe même de l'induction. Mais il faut la compléter pour en discerner la portée. Tout d'abord les circonstances de lieu d'un phénomène peuvent varier, en particulier sa situation par rapport à l'observateur : nous reviendrons sur ce point à la section 4.4. Mais, et ceci est important, la forme de l'objet en cause peut aussi varier.

Reprenons l'un de nos exemples. Nous observons une première fois qu'en dessinant deux segments congruents qui se croisent en leur milieu, nous obtenons les diagonales d'un rectangle. Quel serait l'intérêt de cette observation si nous n'en tirions que ceci : chaque fois que nous dessinons deux segments de même longueur que ceux de la première expérience et que nous les faisons se croiser en leur milieu, de sorte en outre qu'ils fassent entre eux le même angle que dans la première expérience, nous obtenons un rectangle (congruent à celui obtenu la première fois). Ce n'est pas cela qui nous intéresse. L'inférence utile et productive est ici celle qui nous dit ceci : quelle que soit la longueur commune des deux segments, et quelle que soit l'angle qu'ils font entre eux, nous obtenons bien un rectangle. Ainsi, nous maintenons certaines circonstances de l'expérience, mais nous en libérons d'autres, ce qui nous permet d'étendre la propriété observée à la catégorie tout entière des rectangles, de nous dire que les choses se passeront *forcément toujours* comme cela. Seul un tel type d'induction nous permettra d'enclencher des raisonnements géométriques intéressants. On qualifie de *paradigmatiques* les expériences de cette sorte, qui sont représentatives d'une infinité d'expériences analogues.

Montrons *a contrario* une expérience non paradigmatique, c'est-à-dire dont on ne voit pas avec évidence qu'elle donnera le même résultat dans tous les cas de figure possibles. Il n'est pas d'emblée évident que la somme des angles d'un triangle soit égale à deux droits. Constater cette propriété sur quelques triangles particuliers, par exemple en mesurant les angles et faisant la somme des mesures, n'aide en rien à se convaincre que les choses se passeront toujours de la même façon. Il faut aménager l'expérience de sorte qu'on voit l'*inéluctabilité* du résultat, sa *nécessité*. Il faut créer les conditions qui rendent la généralisation — autrement dit l'induction — évidente.

4.4 Extension aux situations non privilégiées

On peut se demander à quoi servent les conditions déterminantes. Par exemple, à quoi bon considérer des conditions qui déterminent la forme rectangulaire, puisque nous reconnaissons habituellement les rectangles sans analyse ? Il est vrai que nous les reconnaissons sans analyse, mais à condition qu'ils soient en position privilégiée. Qui plus est, nous l'avons dit, c'est aussi et forcément en position privilégiée que nous reconnaissons l'évidence des conditions déterminantes. *Mais ces conditions sont exportables en position non privilégiée*. En d'autres termes, si nous savons par une raison quelconque — ou un raisonnement — qu'un quadrilatère situé n'importe comment répond à des conditions déterminantes de la forme rectangulaire, nous en concluons — sans aucun besoin de nous en convaincre par la vue — que ce quadrilatère est un rectangle. Ceci montre par quel mécanisme les conditions déterminantes augmentent notre capacité de saisir l'espace.

Un exemple concret suffira à illustrer cela. Supposons que nous doutions de la forme rectangulaire d'une vaste place publique bordée de maisons. Impossible d'amener cette place en position privilégiée : elle est trop grande et trop lourde ! Mais nous pouvons vérifier par des opérations de visée que ses bords sont rectilignes, et par des mesures exécutées localement, qu'elle a deux côtés égaux et perpendiculaires à un troisième. Nous saurons alors que la place est rectangulaire, sans pourtant avoir jamais pu la saisir d'un coup d'œil comme un rectangle.

Pour pouvoir exporter dans toutes les situations possibles une inférence constatée en situation privilégiée, il faut être assuré que les objets que nous éloignons de nous, que nous orientons arbitrairement, que nous ne percevons que partiellement, demeurent inchangés pendant qu'on les transporte ou qu'on les soumet à des observations particulières. Nos inférences seraient inopérantes dans un univers de terre glaise humide ou de caoutchouc. Il nous arrive d'ailleurs de nous laisser surprendre par des variations inattendues d'un objet. Autrement dit, notre géométrie débutante s'applique à des objets *qui se conservent*, à des objets, comme dit FREUDENTHAL [1983], qui ne subissent que des *gentle transformations*, des transformations douces [16].

4.5 Du réel à l'idéal

Nous avons parlé jusqu'ici des objets et des figures géométriques comme de choses réelles obtenues en dessinant, en articulant des tiges, en découpant et pliant des papiers, etc. Or aucune de ces choses ne s'identifie à une figure idéale. Par exemple nous ne pouvons jamais dire si un rectangle réel est un rectangle, absolument parlant. Il y a des cas où nous sommes incapables de discerner si deux segments bout à bout sont à eux deux plus longs, égaux ou plus courts qu'un segment donné. Rappelons qu'il y a deux raisons à cela. La première est physiologique : nos sens ne nous communiquent que des images approximatives. La seconde est physique : les objets réels se résolvent en atomes et particules qui leur enlèvent, dans le monde microscopique, toute possibilité de correspondre exactement aux objets idéalisés de la géométrie.

Il est par conséquent exclu que l'évidence de la première condition déterminante cidessus (cf. 4.1) se ramène à ceci : si je suis sûr,

16 Cette affirmation provoque un paradoxe. En effet, comment pourrions-nous nous convaincre que les objets qui nous occupent se conservent, ou en d'autres termes ne subissent que des transformations douces, sans leur appliquer des mesures relevant de la géométrie que nous sommes précisément en train de construire ? Ce paradoxe se résout pratiquement au niveau du bon sens : nous verrons bien à l'usage quand notre géométrie ne fonctionnera plus. On le résout au niveau théorique en postulant l'existence des transformations douces.

absolument, qu'une figure est un quadrilatère, et si j'ai vérifié, *sans marge d'erreur*, qu'elle a deux côtés égaux et perpendiculaires à un troisième, alors je sais *sans erreur possible* que le quatrième angle est droit. L'évidence n'est pas de cet ordre-là.

L'évidence n'ayant pas un tel fondement absolu, elle s'appuie sur une *expérience* entourée d'une marge d'indétermination. À propos du rectangle par exemple, je pourrais dire ceci, ou quelque chose d'approchant : chaque fois que j'ai construit un quadrilatère avec trois angles dessinés soigneusement à l'équerre, j'ai pu vérifier que le quatrième angle correspondait, aussi précisément que je pouvais le voir, à l'angle de l'équerre. Dans tous les cas où, peut-être parce que j'étais fatigué ou distrait, j'ai obtenu un «rectangle» un peu bancal, j'ai recommencé la construction et j'ai obtenu un rectangle que j'estimais satisfaisant. Bien sûr je n'ai jamais, et pour cause, construit un rectangle d'un kilomètre de long et d'un millimètre de large. Qui plus est, j'ai même rarement pensé à un tel rectangle. Pourtant j'arrive un peu à l'imaginer.

Ainsi mon sentiment d'évidence est tempéré par ma conscience des imprécisions des objets réels et de mes sens, et par mon impuissance à saisir la famille infinie des quadrilatères, et celle des rectangles. Mon évidence au départ est d'ordre pratique et s'étend à des catégories d'objets à mon échelle [17].

Mais bien que nos premières implications ne soient jamais vérifiables qu'approximativement, elles s'énoncent avec des mots (des concepts) qui ne sont guère connotés par l'indétermination des choses. Quand nous pensons à un rectangle, un angle droit, une égalité de segments, nous ne nous embarrassons pas spontanément du fait qu'il n'existe ni rectangle, ni angle droit, ni égalité absolue. Les concepts sont univoques par nature. Et puisque nous savons d'expérience que les propriétés que nous évoquons, quoique vérifiées imparfaitement par les objets réels, sont néanmoins vérifiées par eux avec une marge d'erreur d'autant plus petite qu'ils ont été construits ou dessinés avec plus de précision, nous appliquons spontanément ces propriétés à des objets infiniment précis.

Les choses et les phénomènes s'installent donc dans la pensée avec une netteté qu'ils n'ont pas dans la réalité. Ce qui prend la forme d'une idée devient par là même idéal. Il en résulte que les ensembles infinis d'objets auxquels renvoient les mots sont moins réels qu'imaginaires.

L'évolution de la physique au XXème siècle nous a fait perdre par ailleurs l'illusion que cet idéal pourrait aussi être vu dans la nature «si nous disposions d'instruments infiniment précis». En ce sens la géométrie est une construction de l'esprit [18].

17 De telles indéterminations laissent la porte ouverte à d'autres géométries. Si l'espace est doté d'une courbure imperceptible à mon échelle, il se pourrait bien que mon évidence sur les quadrilatères possédant deux côtés égaux perpendiculaires à un troisième soit mise en défaut. Mais ces phénomènes étranges se passeraient sous le seuil de mes perceptions claires.

18 Le phénomène constaté de manière imprécise dans la réalité se mue en évidence précise dans l'esprit. C'est ce dont témoigne d'ALEMBERT lorsqu'il écrit, évoquant la congruence de deux figures : «Ce dernier principe n'est point, comme l'ont prétendu plusieurs Géomètres, une méthode de démontrer peu exacte et purement mécanique. La superposition, telle que les Mathématiciens la conçoivent, ne consiste pas à appliquer grossièrement une figure sur une autre, pour juger par les yeux de leur égalité ou de leur différence, comme l'on applique une aune sur une pièce de toile pour la mesurer ; elle consiste à imaginer une figure transportée sur une autre, et à conclure de l'égalité supposée de certaine parties des deux figures, la coïncidence du reste : d'où résulte l'égalité et la similitude parfaite des figures. Cette manière de démontrer a donc l'avantage non seulement de rendre les vérités palpables, mais d'être encore la plus rigoureuse et la plus simple qu'il est possible, en un mot de satisfaire l'esprit en parlant aux yeux.» (Cité par R. BKOUCHE). Le mode de preuve évoqué par d'ALEMBERT n'a plus cours dans les mathématiques d'aujourd'hui. On peut penser toutefois qu'il demeure un palier incontournable dans l'apprentissage de la preuve en géométrie.

4.6 Vers une théorie

Nous sommes passés de quelques expériences paradigmatiques à des évidences portant chaque fois sur une famille infinie de figures en situation privilégiée. Nous avons ensuite étendu les conditions déterminantes ainsi obtenues à toutes les figures en situation quelconque. Mais la vocation des conditions déterminantes est de servir de points de départ pour une géométrie qui prouve des propositions non évidentes, des propriétés de figures compliquées.

Les conditions déterminantes, basées sur des expériences, ont la forme d'implications entre propriétés, et donc elles se situent au niveau de la saisie des figures en compréhension. Toutefois, leur évidence est telle qu'on les voit assez clairement fonctionner en extension. On étend sans peine ces expériences en pensée à l'ensemble des cas de figure. Tel ne sera évidemment plus le cas pour les propriétés des figures compliquées, celles où l'imagination en est réduite à des parcours très partiels des cas de figure. La part de l'intuition se réduit ainsi par nécessité. Bien entendu, les intuitions appliquées à certains cas de figure demeurent essentielles sur le plan heuristique. Mais les cas de figure accessibles ne sont plus représentatifs de tous les cas possibles. Ainsi les intuitions se font hasardeuses et la pensée déductive s'impose comme unique alternative.

Montrons sur un exemple comment une propriété déterminante peut être appliquée à la preuve d'une propriété a priori non évidente. Quelques expériences montrent que, de quelques points d'un cercle, on voit un diamètre de celui-ci sous un angle droit. Mais deux questions se posent : est-ce qu'il en est toujours ainsi ? et si oui, à quoi est due cette propriété remarquable ? On dessine alors dans un cercle un angle inscrit interceptant un diamètre (figure 23). On ajoute à la figure le diamètre issu du sommet de l'angle. Les deux diamètres sont égaux et se coupent en leur milieu. Leurs extrémités sont donc les sommets d'un rectangle. L'angle inscrit de départ est donc bien un angle droit.

Remarquons qu'un telle preuve consiste essentiellement à amener la propriété en

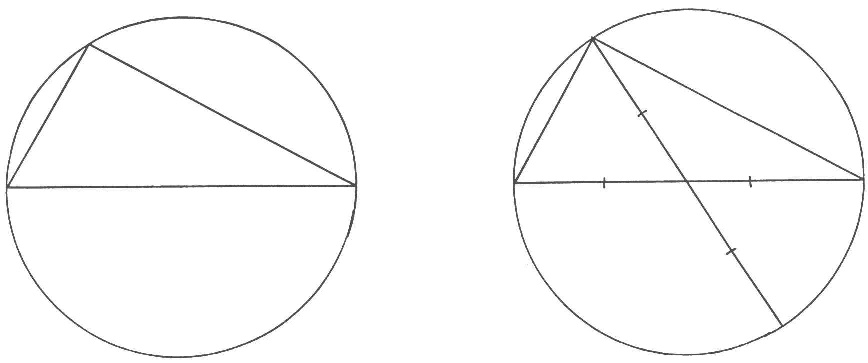

Figure 23

cause à l'évidence. Elle ne consiste pas *d'abord* à montrer que la propriété découle d'autres propriétés connues. Dans les débuts de la géométrie, on s'intéresse à des phénomènes, à des propriétés. Il faudra toute une évolution de la pensée pour qu'on s'intéresse à la cohérence d'une théorie, et que corrélativement la portée, la visée — sinon la nature — des preuves change, pour que l'attention se déplace de l'évidence du phénomène vers l'évidence des implications [19].

4.7 L'univers de la géométrie commençante

Nous avons structuré cet exposé en trois parties principales : percevoir, concevoir, inférer. Cette division marque les étapes d'une analyse, plutôt que des moments clairement discernables et successifs de la pensée géométrique en formation. Il est rare en effet que nous percevions un objet sans le rattacher à l'une ou l'autre catégorie. Par exemple un triangle particulier est sans peine rattaché — fut-ce implicitement —, à la forme triangulaire en général. Qui plus est, les formes géométriques simples ne sont pas seulement des objets de contemplation. Comme nous l'avons vu, la connaisssance que nous en avons comporte des expériences de déplacements, de constructions, de déformations, et plus généralement de manipulations génératrices d'inférences spontanées : quand je fais ceci, j'obtiens tel résultat. En cela consiste l'expérience des choses, sur laquelle se bâtit, entre autres, une première connaissance géométrique. Ainsi, les trois plans que discerne l'analyse,— percevoir, concevoir et inférer —, s'intègrent dans un mode spontané d'activité qui est à la fois manuel, perceptif et intellectuel.

19 Cf. N. Rouche [1990].

L'univers de cette activité, qui est aussi celui des premières acquisitions géométriques, n'est pas constitué d'un espace et de parties immobiles de cet espace, dont on étudierait les propriétés. Il est peuplé d'objets et de figures déplaçables soumises à des mouvements continus et comportant des symétries. Celles-ci sont mises en relation avec les symétries du corps humain et les directions physiques privilégiées — la verticale et l'horizontale. Comme nous l'avons annoncé, nous n'avons considéré dans cette étude que des objets plans. Observons, dans ce cadre restreint, que la géométrie plane n'est pas d'abord la géométrie *du plan*, mais bien la géométrie *des objets plans.* Il y a un long chemin à parcourir pour passer de la géométrie commençante à la géométrie constituée. Nous nous contentons ici d'évoquer ce parcours, en soulignant que ces étapes dans l'enseignement méritent d'être soigneusement motivées.

5 Mais aussi chercher

Examinons pour terminer un quatrième registre de la pensée géométrique à ses débuts. Il est évidemment déjà intéressant et utile de posséder quelques vérités géométriques évidentes. Mais pour avancer, il faut arriver à en trouver et prouver de nouvelles. On trouve en se posant des questions, en expérimentant, en tâtonnant. On prouve en construisant des preuves. Et pour prouver, il faut des arguments. L'exemple ci-dessus de l'angle inscrit interceptant un diamètre montre que l'argument clé d'une preuve — en l'occurence «deux segments égaux se coupant en leur milieu déterminent un rectangle» — n'est pas révélé d'office à qui contemple passivement la situation. Il faut puiser dans ses souvenirs, faire fonctionner son imagination, mobiliser sa pensée dans un univers bien peuplé de choses et de propriétés diverses, avec entre elles le plus possible de relations significatives. Il ne suffit pas d'avoir la tête bien faite, il faut aussi qu'elle soit bien pleine, et encore pas de n'importe quoi.

On retrouve ici le sens large, mentionné à la section 3.4. La pensée en recherche s'appuie sur le sens large, sur toutes les choses que l'on est capable d'associer à chaque figure, à chaque phénomène, à chaque mot, à chaque symbole. Une condition déterminante est une condition suffisante pour obtenir telle ou telle configuration. Mais elle apporte avec elle et rend disponible pour la recherche toutes les propriétés connues de la figure ou de la configuration.

Notons enfin l'importance, du point de vue heuristique, de ce que nous avons appelé les figures simples à symétrie modérée, celles qui forment des familles à un ou deux paramètres. On comprend leur rôle particulier dans la recherche des preuves en géométrie élémentaire. En effet, d'une part - nous l'avons abondamment expliqué - leur simplicité fait que l'on parcourt de telles familles en extension sans trop de difficulté. Mais d'autres part, comme elles sont plus variées que les figures à zéro degrés de liberté, on les retrouve plus souvent comme sous-figures dans des figures compliquées qui posent problème. Elles jouent donc plus souvent le rôle de *figures clés*, génératrices de clarté. Une figure compliquée est comme une forteresse qui décourage les attaques. Une manière efficace d'en percer les secrets consiste à y chercher, et bien souvent à y introduire (comme un cheval de Troie), une figure clé qui l'éclaire.

Bibliographie

ANTOINE ARNAULD, *Nouveaux élémens de géométrie*, Guillaume Desprez, Paris, 1683

RUDOLF ARNHEIM, *La pensée visuelle*, trad. C. NOEL ET M. LE CANNU, Flammarion, Paris, 1976

CREM, *Formes et mouvements, perspectives sur l'enseignement de la géométrie*, Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, 1999

HANS FREUDENTHAL, *Mathematics as an educational task*, Reidel, Dordrecht, 1973; traduction française partielle ...

EDMUND HUSSERL, *L'origine de la géométrie*, trad. J. Derrida, Presses Universitaires de France, Paris, troisième édition 1990

ANTOINE FURETIERE, *Dictionnaire universel*, nouvelle édition, Arnout et Reinier Leers, La Haye, 1694

ERNST MACH, *L'analyse des sensations, le rapport du physique au psychique*, trad. F. Eggers et J. Monnoyer, Jacqueline Chambon, Aix-en-Provence, 1997

MAURICE MERLEAU-PONTY, *Phénoménologie de la perception*, Gallimard, Paris, 1947

NICOLAS ROUCHE, Prouver: amener à l'évidence ou contrôler des implications, in E. BARBIN coord., *La démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Besançon et IREM de Lyon, 1990

BLAISE PASCAL, De l'esprit géométrique et de l'art de persuader (vers 1658), in *Œuvres complètes*, Seuil, Paris, 1963

HENRI POINCARÉ, *La science et l'hypothèse*, Flammarion , Paris , 1906

LEV VYGOTSKI, *La pensée et le langage*, trad. F. SEVE, La Dispute, Paris, 1997