DERRIERE LA DROITE, L'HYPERPLAN

Maryse MAUREL,
Irem de Nice

I. Introduction

Le travail présenté dans cet article s'est effectué au sein d'un groupe de recherche de l'IREM de Nice, nommé CESAME, il se réfère à un enseignement proposé en 1998-1999 à des étudiants de première année de DEUG.

L'une des questions de départ de notre groupe était : dans une situation de débat scientifique, qu'est-ce que le maître institutionnalise à la fin du débat ? Qu'y a-t-il dans les mathématiques à savoir, à apprendre, à transmettre de plus que ce qui est écrit dans les livres et dans les cours polycopiés ? Que faut-il institutionnaliser en classe de plus que ce texte ? Et comment se modifie l'acte d'enseignement lorsqu'on prend cela en compte ? Quel est alors le rôle du maître et de son propre rapport aux mathématiques ?

Nous cherchons comment enseigner des mathématiques à nos élèves et à nos étudiants en les faisant travailler comme des mathématiciens. Dans cette optique, nous recherchons les contours d'un contrat didactique qui permettrait aux étudiants de se désassujettir de l'autorité magistrale : qu'est-ce qui pourrait pousser l'étudiant en proie au doute ou au conflit à se soumettre davantage aux « règles du jeu mathématique » (le principe de non contradiction et de la nécessité des assertions mathématiques) plutôt qu'à attendre du maître qu'il tranche entre le vrai et le faux, le pertinent et le hors sujet.

Pour que cela soit possible, il nous semble indispensable que l'étudiant accepte la position paradoxale suivante : d'une part les mathématiques lui sont externes - les solutions d'un problème mathématiquement bien posé ne dépendent ni de la volonté propre ni de l'habileté de celui qui le résout (caractère de nécessité des énoncés mathématiques) - et d'autre part, et contradictoirement, les mathématiques qu'il connaît lui sont internes - la portée et le sens des résultats que l'on manipule ne sont pas indépendants de celui qui manipule (il ne suffit pas que le maître dise le sens, donne de l'importance à ceci ou à cela, que ce soit écrit en toutes lettres dans les livres, il faut que lui-même étudiant en fasse l'expérience).

Nous proposons aux élèves, comme le fait Marc Legrand dans le débat scientifique*, des situations de confrontation avec la réalité mathématique en interaction avec autrui, situations où se construit ce double aspect du savoir mathématique. Nous insistons sur l'importance de ce double aspect : d'un côté des résultats objectifs en quelque sorte indépendants et externes aux personnes qui les pensent (ce qu'on appellera le savoir officiel), et d'un autre côté des significations et des portées attachées à ces résultats, significations et portées profondément subjectives car intimement liées à l'expérience de chacun (savoirs subjectifs et internes dont nous institutionnalisons la production, c'est-à-dire la façon dont se constitue ce type de savoir).

Nous voulons faire entrer nos élèves dans une problématique de mathématicien en leur proposant de douter d'une proposition et de prendre la responsabilité du vrai et du faux de cette proposition. Comme dans le débat scientifique [6], les interlocuteurs de l'élève sont ses pairs, et l'élève doit acquérir une conviction personnelle forte qui lui permette d'argumenter pour obtenir leur adhésion ; le maître reste neutre sur ce qui se dit mais continue à contrôler la situation du triple point de vue épistémologique, didactique et social ; l'erreur a un statut officiel ; le maître montre aux élèves qu'ils ont tout à gagner à entrer dans ce contrat didactique : ils ont à y gagner plus précisément un apprentissage du travail mathématique et une compréhension en profondeur des mathématiques. Mais, comme le montre ce texte, nous avons adapté la mise en œuvre de ces principes à notre pratique d'enseignants et de chercheurs en regardant l'évolution des connaissances pour les étudiants pris individuellement et non seulement pour le groupe.

L'énoncé proposé pour le travail en classe est un énoncé que nous avons repéré comme erreur résistante et nous voulons amener nos élèves à réorganiser leurs connaissances pour remplacer cette connaissance locale par une connaissance plus adaptée, donc à «corriger leur erreur». Nous savons que le discours du maître n'y suffit pas. Il faut donc amener les élèves à la remettre en question, non parce que le maître le dit ou met une mauvaise note, mais parce qu'elle produit une contradiction au sein des mathématiques.

Dans une première partie, je vais décrire un dispositif d'enseignement construit sur cette analyse. Dans une deuxième partie, je m'intéresserai à des phénomènes observés au cours ou à la suite de cet enseignement. Une troisième partie sera consacrée à une réflexion sur le travail et le rôle de l'enseignant.

Dans ce texte, je distinguerai la connaissance subjective construite par un sujet (objet d'étude en psychologie que je nommerai *connaissance locale* ou *connaissance*) de la *connaissance mathématique* (ou *savoir* mathématique).

Les astérisques renvoient au glossaire qui est à la fin de ce texte. Les rubriques de ce glossaire présentent de façon succincte, et sans doute un peu abrupte, notre cadre d'interprétation théorique, sans le justifier ; ce travail fera l'objet d'un autre article actuellement en cours d'écriture. La lecture du glossaire n'est pas nécessaire pour une première lecture de l'article.

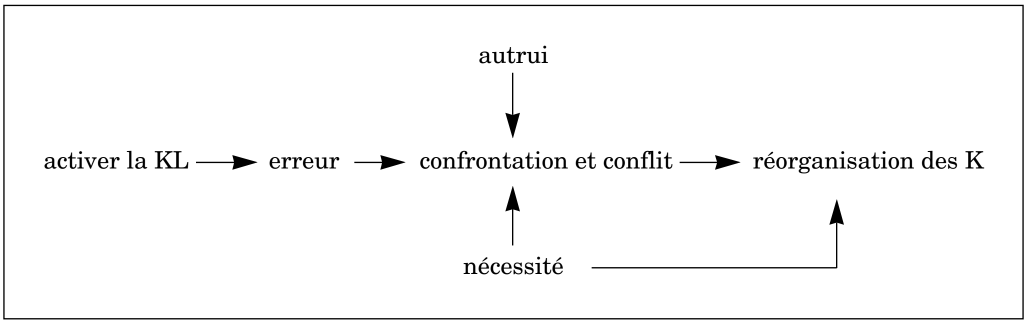
II. L'enseignement

II.1. *Avant d'aller en classe*

Le but de l'expérimentation

Nous cherchons donc à créer une situation où les étudiants peuvent faire, en TD, l'*expérience** de la *nécessité** en mathématiques. Nous leur proposons de réactiver le sens d'une *expression algébrique* (un polynôme du premier degré à plusieurs variables), d'*un objet géométrique* (le plan mathématique) et de leur mise en correspondance. Nous voulons les amener à modifier une *connaissance locale* [5] [8] produisant des erreurs, en utilisant le levier de la *confrontation* au sein d'un travail en petit groupe, pour qu'ils acquièrent la certitude qu'une équation linéaire (non dégénérée) à trois variables est nécessairement, quelle que soit sa forme, l'équation d'un plan dans l'espace géométrique, celui du lycée. Nous terminons ce travail avec les étudiants en *institutionnalisant* le caractère nécessaire de ce savoir à la fin d'une séance de synthèse.

Si K désigne une connaissance et KL une connaissance locale, on a le schéma ci-dessous :



Nous utilisons l'idée que la rencontre avec la *réalité mathématique** peut être facilitée par une confrontation avec *autrui*, dans un dialogue durant lequel se fait l'expérience de la nécessité. Nous pointons ici le rôle de l'intersubjectivité dans la construction des connaissances et du savoir mathématiques et de leur sens*.

Le contexte

D'abord qui sont les étudiants concernés ? Ce sont des étudiants inscrits dans un DEUG scientifique (MASS1, Mathématiques Appliquées aux Sciences Sociales, première année, à Nice, en 1998-99). Ils sont environ 90, répartis dans trois groupes de TD. Ils viennent essentiellement d'une Terminale S, un sur dix a passé un bac ES. En plus des mathématiques, ils apprennent de l'économie et de l'informatique. Cette année, le DEUG MASS a dû entrer dans un Tronc Commun de six semaines, réunissant tous les DEUG scientifiques de Nice, et les contraintes liées à la gestion simultanée de 700 étudiants ne m'ont pas permis de travailler à ma guise pendant les six premières semaines. L'enseignement du Tronc Commun a porté sur les nombres complexes, les polynômes et les systèmes d'équations linéaires, en allant à peine plus loin que le programme du lycée. Le 16 novembre donc, je reprends l'enseignement de l'algèbre avec les étudiants du MASS1 qui ont suivi le Tronc Commun et, puisque j'ai retrouvé ma liberté de professeur, je veux initialiser une nouvelle forme de travail en TD ; pendant le TD, ce sont eux qui travaillent, moi je travaille avant et après. Pendant le TD, je travaille sur un autre mode, je joue des rôles différents selon ce qui est demandé aux étudiants, et à la fin, j'institutionnalise les résultats obtenus. J'appellerai TD de démarrage ce premier TD réparti sur trois séances d'une heure et demie (voir plus loin § II.4.).

En mathématiques, la majorité n'a pas toujours raison

Je suis sûre que tous les étudiants qui arrivent en DEUG scientifique sont prêts à mettre leur tête à couper que "l'équation $y = ax + b$ ou l'équation $ax + by = c$ est l'équation d'une droite dans un plan". Cette connaissance fait partie de ce que nous appelons le *socle de base*. Ce sont les connaissances dont l'élève ou l'étudiant est absolument sûr, même s'il ne sait pas d'où elles viennent (par exemple la règle des signes ou « un carré est positif » en Seconde). A ce sujet, il serait certainement intéressant pour chacun de nous, de même que pour les maîtres en formation, de nous demander d'où nous vient la certitude absolue que les points du plan dont les coordonnées vérifient une équation de la forme $y = ax + b$ sont alignés sur une même droite ? Comment allons-nous nous y prendre pour (re)trouver ce qui fonde cette certitude ? Comment pouvons-nous faire l'expérience de cette nécessité ? Mais le travail des étudiants ne portera pas sur l'équation d'une droite dans le plan, nous ne sommes pas dans un séminaire expérientiel de psychophénoménologie du GREX*, nous sommes dans une classe, leur travail portera donc sur la question suivante : *que représente cette même équation quand nous sommes dans l'espace* au lieu d'être dans le plan ?

Pourquoi cette question ? Parce que les étudiants ont la fâcheuse manie d'oublier les trois derniers mots « *dans l'espace* ». Beaucoup, beaucoup trop pour la suite de l'enseignement de première année, disent ou écrivent, en début de DEUG, que "l'équation $ax + by = c$ est l'équation d'une droite" dans l'espace, et dans un espace de n'importe quelle dimension plus tard. Notez la place du dernier guillemet. Mais les objets [1] mathématiques sont résistants*, et cette dernière phrase, vraie dans le plan, n'est pas vraie dans l'espace ; elle n'est pas vraie pour moi, mais elle ne peut pas être vraie non plus pour les étudiants. Dans l'espace, quoi qu'on y fasse, $ax + by = c$ est l'équation d'un plan, la règle démocratique n'est pas respectée et un sondage ou un vote ne donnera pas le bon résultat. Cette erreur est une erreur qui révèle très certainement l'existence d'un obstacle épistémologique, l'obstacle de la dualité. J'ai retrouvé les copies du partiel de MASS1 de l'année précédente (3/02/97, exercice III) ; dans plus d'un tiers des copies, deux connaissances cohabitent, la connaissance "dans l'espace, un système de deux équations linéaires de rang 2 est le système des équations d'une droite" et la connaissance locale ci-dessus "l'équation $ax + by = c$ est l'équation d'une droite dans l'espace".

C'est sur cette erreur que va donc porter le travail d'enseignement. Mais voyons d'abord comment apparaît l'erreur dans la copie d'une « bonne » étudiante.

1 Nous retenons également du travail des philosophes et des phénoménologues (Husserl, Desanti, Cavaillès) que les objets mathématiques sont des objets idéaux soumis à certaines règles : ils sont prévisibles, ils échappent à la contingence, et donc ils résistent. Et nous empruntons à Wittgenstein l'idée que faire des mathématiques, c'est accepter de suivre les règles du jeu mathématique.

II.2. *Une erreur indéracinable en première année de DEUG : la copie de Nadège et la double connaissance*

Un exercice de partiel

Voici le texte de l'exercice III du partiel du 3 février 1997

Question III *(sur 4 points)*

L'espace est rapporté à un système de coordonnées (x, y, z). Soit le système (S)

$$(S)\quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

1) Montrez que ce système est le système des équations d'une droite. Montrez que cette droite est parallèle à un plan de coordonnées. Lequel ?

2) Pouvez-vous fabriquer, et si c'est possible faites-le, un système d'équations de cette droite avec
   a) une seule équation ?
   b) deux équations autres que celles de S ?
   c) trois équations ?

3) Écrivez une représentation paramétrique de cette droite.

Une réponse parmi d'autres (nombreuses) : la copie de Nadège

[Mes commentaires sont en italiques, les réponses de Nadège en lettres droites.]

1) $$(S)\quad \begin{cases} x + y + z = 1 & (1) \\ x - y + z = 2 & (2) \end{cases}$$

(1) et (2) sont les équations de deux plans.

Vérifions que ces deux plans ne sont pas parallèles :

$$\frac{1}{1} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1}{2} .$$

Donc ces deux plans ne sont pas parallèles (ni confondus, ni parallèles distincts). Les deux plans n'étant pas parallèles : ils ne peuvent être que sécants : leurs "points communs" sont donc représentés par une **droite**. (On peut aussi montrer en échelonnant le système que l'ensemble des solutions est représenté par une droite : c'est-à-dire une infinité de solutions à un degré de liberté : la droite a pour équations

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x \quad + 2z = 3 \end{cases}$$

[*c'est juste, cela a été appris pendant le premier semestre et Nadège sait changer de cadre : c'est une expertise ; elle ne s'étale pas dans la solution algébrique, elle la signale en passant ce qui indique un souci de cohérence interne*]

Droite : $\mathbf{2x + 2z = 3}$)

[*c'est faux, c'est la connaissance locale ; en passant à la ligne, à l'intérieur de la même parenthèse, le système "perd" une équation*]

On voit que la droite : $2x + 2z = 3$ n'est pas un plan dans l'espace car $y = 0$.

[*la deuxième équation est remplacée par une équation implicite mais Nadège est toujours en cohérence interne ; pour l'interprétation de la variable absente, voir § III. 2.*]

Donc dans l'espace : elle est parallèle au plan (0yy').

[*0yy' n'est pas un plan mais un axe de coordonnées, donc une droite*]

2) a) On peut donner l'équation de cette droite c'est-à-dire : $2x + 2z = 3$. [*c'est faux*]

b) Oui on peut prendre des équations proportionnelles à (1) et (2) :

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{2} = 1 . \end{cases}$$

[*c'est juste, bien que ce ne soit pas ce que j'attendais, mais je n'avais qu'à poser la question autrement*]

c) Oui on peut prendre comme troisième équation une combinaison linéaire des deux premières :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ x + 3y + z = 0 . \end{cases}$$

La double connaissance

Dans cette réponse, deux connaissances cohabitent :

1) la connaissance locale "$ax + by = c$ est l'équation d'une droite dans l'espace", cette connaissance vient du collège sous la forme "$y = ax + b$ est l'équation d'une droite" et elle est vraie dans le plan.

2) la connaissance issue de l'étude des systèmes d'équations linéaires : un système d'équations linéaires à trois inconnues, de rang 2 (c'est-à-dire formé de deux équations non proportionnelles) représente une droite, connaissance corroborée par la connaissance sensible dans l'espace géométrique, l'intersection de deux plans sécants est une droite.

Nadège a travaillé et a compris ce qui a été enseigné, mais la connaissance locale très forte, déstabilisée par le travail fait au premier semestre, est toujours là, et cohabite, sur deux lignes consécutives, avec la nouvelle connaissance, malgré la contradiction que l'étudiante serait bien capable de pointer au niveau conscient, car elle ne fait pas du Canada Dry mathématique, elle se soucie de sa cohérence interne (voir plus haut), elle contrôle ses résultats. Souvenez-vous que dans ce paquet de copies, plus d'un tiers des réponses à l'exercice III contiennent cette double connaissance.

C'est la difficulté qui est mise ici en évidence que nous voulons prendre à bras le corps assez tôt dans l'année, en faisant vivre une expérience aux étudiants, et nous cherchons à institutionnaliser autre chose que le simple savoir : "dans un espace de dimension 3, l'équation $ax + by + cz = d$ est l'équation d'un plan", d'autant plus que cela a déjà été enseigné au lycée [2] et que les étudiants sont censés le savoir [3]. Il faut que les étudiants reviennent à leur propre expérience de l'espace pour rencontrer l'évidence [4] que ça ne peut pas être une droite, que c'est nécessairement un plan. Il nous faut donc trouver le moyen de faire passer les étudiants de la *compréhension passive** à la *mise en évidence par réactivation du sens*.

2 Seuls les bacheliers ES n'ayant pas suivi l'option math en Première ont échappé à cet enseignement.

3 Le répéter une fois de plus sera probablement inefficace.

4 Je prends le mot «évidence» au sens où le définit Husserl dans L'origine de la géométrie [6], page 178 : Évidence ne veut absolument rien dire d'autre que la saisie d'un étant dans la conscience de son être-là, de façon originale et en personne.

II.3. *Les mathématiques à transmettre*

Ce qui est écrit dans les livres

Nous voulons faire bouger, ou au moins ébranler la connaissance locale “dans l'espace, une équation linéaire est l'équation d'une droite” et plus généralement pour les espaces de dimension n, l'association “pour une droite, une équation”. Il faut noter chez les étudiants l'absence de lien entre une “une droite dans un espace à n dimensions” et “l'ensemble des solutions d'un système linéaire à n inconnues est une droite de R^n” et plus précisément entre l'objet géométrique “droite dans un espace” et son écriture algébrique, « un système d'équations linéaires à n inconnues de rang $n - 1$ ».

Les notions mathématiques qui sont derrière ce travail sont riches et consistantes et nous pensons que, pour éviter de construire l'algèbre linéaire sur du sable et sur du nonsens, il faut arriver à démolir cette connaissance locale qui ressortira plus tard dans l'année universitaire sous la forme “la dimension de l'espace solution d'un système d'équations linéaires de rang r est un sous-espace de dimension r de R^n” (au lieu de $n - r$). Il faut donc donner du sens à la proposition : « il faut un système de r équations linéairement indépendantes pour un sous-espace de dimension $n - r$ ».

Ce qui n'est pas écrit dans les livres

Nous voulons aussi amener les étudiants à travailler dans les deux cadres, le cadre géométrique et le cadre algébrique, et à savoir passer de l'un à l'autre. Cela leur permettra de changer de cadre pour résoudre un problème mais également, et c'est aussi important pour les étudiants que pour les mathématiciens, d'exercer un contrôle sur les résultats produits par suite de la nécessité de trouver la même réponse dans les deux cadres. Il faut donc savoir identifier les résultats, c'est-à-dire être capable de voir ou de lire ou de comprendre que c'est le même résultat sous des apparences et des écritures différentes, bref, apprendre à reconnaître *le même* derrière des représentations différentes.

Il y a des objets mathématiques (droites et plans mathématiques de l'espace) et, pour chacun, des écritures algébriques qui sont des systèmes d'équations de ce sous-espace (au sens de système de relations exprimant la condition nécessaire et suffisante pour que les points de coordonnées (x, y, z) appartiennent au plan ou à la droite). Pour savoir si un point appartient à un plan ou à une droite donnés, “ je vois sur le dessin ”, “ j'imagine dans ma tête ”, “je démontre” dans le cadre géométrique, ou “je calcule si les coordonnées vérifient les équations ” dans le cadre algébrique. Nous construisons ainsi pour la suite une correspondance entre les sous-espaces et les systèmes d'équations linéaires. Nous géométrisons l'algèbre.

Nous avons constaté l'an dernier en Seconde [9], dans un enseignement analogue, que les élèves savaient qu'une inéquation ne pouvait pas avoir des solutions dépendant de l'élève qui l'avait résolue, et que l'ensemble des solutions d'une inéquation était constitutive de l'inéquation donnée. Nous sommes donc en droit de penser que, pour un étudiant de DEUG, un sous-ensemble ne peut pas être en même temps une droite et un plan ! Il faut donc leur laisser la responsabilité du choix.

Le travail proposé a pour but de faire vivre aux étudiants une expérience de référence sur ce thème.

II.4. *Dans la classe*

Le déroulement

Le travail s'est fait suivant la chronologie décrite ci-dessous.

Dates	Groupe concerné	Travail proposé
17 novembre 1998 18 novembre 1998	Groupe 3 Groupe 1 et 2	TD de démarrage, séance 1 20 mn de travail personnel et narration individuelle 1 heure de confrontation et narration collective avec accord de tous les étudiants du petit groupe
19 novembre 1998	Groupe 1, 2 et 3	TD de démarrage, séance 2 Synthèse : retour en grand groupe (de TD), vérification de l'accord et institutionnalisation du savoir
24 novembre 1998 25 novembre 1998	Groupe 3 Groupe 1 et 2	TD de démarrage, séance 3 Lien avec la résolution des systèmes linéaires. Travail sur le changement de cadres
25 novembre 1998	amphi	Cours (droites et plans)
14 décembre 1998	amphi	Partiel (question III)
16 décembre 1998	amphi	Questionnaire

La consigne pour le TD de démarrage

Voici le texte de la consigne que j'ai distribuée aux trois groupes pour lancer le travail (après avoir vérifié que lorsque nous parlions de coordonnées dans l'espace, nous parlions tous de la même chose, et après avoir dessiné quelques points particuliers et vérifié que nos représentations sur le tableau et sur les feuilles étaient compatibles, même si nous ne dessinions pas les trois axes dans la même disposition spatiale) :

On considère les ensembles (E_i) des points de l'espace dont les coordonnées (x, y, z) vérifient la relation (i) ($1 \leq i \leq 5$) :

(1) $2x - y = -1$

(2) $x = 3$

(3) $x + y + z = 1$

(4) $x^2 + y^2 = 1$

(5) $xy = 1$

Décrivez et représentez ces ensembles de points le plus précisément possible.

Toutes les méthodes de recherche et de résolution sont autorisées.
Écrivez les différentes étapes de votre recherche.
Donnez un résultat dont vous êtes le plus sûr possible. Expliquez ce qui vous a servi pour être sûr.
Pensez à la façon dont vous pouvez convaincre quelqu'un que votre résultat est exact.

Le travail des étudiants et celui du maître pendant cet enseignement

Au début de la première séance du TD de démarrage, la phase de travail individuel doit permettre, pour chacun, d'activer les connaissances locales, de se faire une opinion à partir de ses connaissances personnelles et, pour certains, de produire l'erreur attendue. Il ne s'agit pas ici de distinguer le bon grain de l'ivraie, et de clouer des étudiants au pilori, mais bien de faire apparaître une contradiction qui sera le moteur de la phase suivante. La production de l'erreur est un outil didactique. Pendant cette phase, je ne dis rien d'autre que le rappel de la consigne, mais j'enregistre mentalement les réponses produites pour organiser les petits groupes autour de réponses différentes.

La phase de travail en petit groupe de quatre personnes permet :

(1) de confronter les résultats et d'éliminer les résultats incorrects,

(2) de faire l'expérience de la nécessité de trouver des plans et des surfaces et non des droites et des courbes,

(3) de dialoguer avec des *autruis* réels par suite de l'obligation, que j'ai négociée avec les étudiants, de se convaincre mutuellement et de se mettre d'accord sur un compte-rendu collectif que chacun doit faire sien. Cela signifie qu'il faut que chacun adhère pleinement à ce compte-rendu pour pouvoir le défendre devant le grand groupe. Cette contrainte les obligent à se faire des représentations mentales des objets étudiés, à verbaliser pour les comparer, à écrire la production commune. Pendant cette phase, je reste neutre par rapport aux énoncés produits, je me contente de veiller au bon fonctionnement de la classe et du dispositif et de les aider à savoir où ils en sont.

Au début de la deuxième séance du TD de démarrage, la phase de synthèse en grand groupe prend comme objet de travail et de réflexion les phases précédentes, amène les étudiants à rendre compte de leur expérience avec des mots (les étudiants ont été très attentifs aux échanges qui ont eu lieu) et permet au maître (que je redeviens à ce moment-là) d'institutionnaliser ce que tout le monde sait déjà maintenant ; plus précisément, j'énonce et je note au tableau ce qui a été compris pour que nous puissions le conserver comme savoir commun, acquis et réutilisable plus tard comme tel (voir § III.3).

La dernière phase, dans la troisième séance du TD de démarrage, prend appui sur ce qui précède pour pointer le caractère particulier des connaissances acquises (le caractère *nécessaire* d'un énoncé mathématique n'est pas désigné explicitement dans les livres de mathématiques) et ouvrir l'enseignement sur la problématique de l'algèbre linéaire. Je montre ainsi le chemin à faire pour les semaines qui vont suivre. J'attire également l'attention sur le type de travail qui vient d'être fait par chacun vis à vis de lui-même et je le nomme *travail personnel,* au sens de travail mathématique fait par chacun au cours de ces séances.

Le cours est un cours classique qui apporte, après la phase expérientielle et l'évolution des connaissances de chacun, du savoir nouveau aux trois groupes réunis en amphi.

Le partiel reprend en question III la question III du partiel de février 1997 (où j'avais trouvé la double connaissance) pour comparer les réponses de février 1997 et celles de décembre 1998.

Le questionnaire, très ouvert, a deux fonctions :

(1) dans notre recherche, il nous informe qualitativement sur les effets du dispositif,

(2) dans l'enseignement, c'est une situation de rappel pour les étudiants qui peuvent peut-être ainsi se remémorer ou évoquer ce qu'ils ont fait dans les séances du TD de démarrage. Les étudiants peuvent répondre anonymement ou non, selon leur choix. Je leur ai laissé du temps pour y répondre en amphi. Voici le texte du questionnaire :

Les 17, 18 et 19 novembre, en TD, vous avez travaillé sur la description et la représentation de certains ensembles de points de l'espace : ensembles de points dont les coordonnées (x, y, z) vérifient les relations

$$2x - y = -1 \; ; \; x = 3 \; ; \; x + y + z = 1 \; ;$$
$$x^2 + y^2 = 1 \; ; \; xy = 1.$$

Vous avez travaillé d'abord individuellement, puis en petits groupes. Puis vous avez retravaillé ce sujet en grand groupe pour faire une synthèse.

Nous souhaitons savoir ce qui vous revient, au sujet de ces séances, quand vous prenez le temps d'y repenser.

---

1. Décrivez le ou les moments les plus importants pour vous pendant ces séances :

2. Décrivez votre comportement pendant ces séances (ce que vous avez fait, ce que vous avez dit, ce que vous avez pensé, ... ou autre) :

3. Qu'est ce que vous avez appris pendant ces séances ?

— sur les ensembles de points dans l'espace :

— sur les équations de droites et de plans dans l'espace :

Qu'avez-vous appris d'autre ?

4. Avez-vous utilisé personnellement depuis ces séances des choses apprises pendant ces séances ? Précisez.

5. Tout ce que vous avez envie de dire au sujet de ces séances et que nous ne vous avons pas demandé :

J'ai encouragé les étudiants à faire un retour réflexif sur leur travail de deux façons :

(1) c'est le rôle de l'accompagnement que j'ai fait pendant les séances en passant d'un groupe à l'autre pour demander un petit point d'information sur l'avancée du travail et pour faire expliciter certaines des phrases entendues,

(2) c'est le rôle du passage à l'écrit dans la narration de recherche.

Notons que le questionnaire est aussi l'occasion pour chacun de prendre le temps de repenser à l'expérience faite en TD de démarrage, dans l'amphi, et en silence.

Mais comme je ne peux pas vous raconter tout ce que j'ai observé, même si je n'ai pas tout vu, j'ai choisi de vous présenter deux phénomènes de classe et un *travail personnel*. Pour les descriptions qui suivent, les données viennent de mes observations et des documents récoltés. Les narrations sont très pauvres et maladroites, nous l'avions prévu. Elles ont pourtant un rôle important. Bien que nous ne puissions pas les utiliser pour le travail de recherche, elles ont été, pour les étudiants, une aide à la réflexion et au retour sur soi.

III. Deux phénomènes de classe et un travail personnel

Ce qui s'est passé en réalité, je ne l'ai pas vu pendant les séances du premier TD de démarrage, mais je l'ai compris, à partir des documents récoltés, en écrivant cet article : à la fin de la phase de travail personnel, certains étudiants ont retrouvé l'équation du plan apprise au lycée. Ces étudiants et les aller-retour entre les trois premières équations dans le travail en petits groupes ont fait exister le conflit dans presque tous les petits groupes, mais pas dans tous. C'est un défaut de cet enseignement, et nous avions noté l'an dernier, en Seconde, que l'organisation des petits groupes par le maître, après la phase de travail personnel, est essentielle : en Seconde, dans les petits groupes où tous les élèves trouvaient au départ le même résultat, donc sans conflit, les connaissances des élèves n'avaient pas bougé au cours de cette phase [5].

III.1. *Comment la droite devient un plan et les courbes, des surfaces*

Pendant le travail en petits groupes, les étudiants ont modifié leur connaissance (la première équation est une équation de plan, et non de droite). Souvent, un étudiant a acquis la conviction absolue [6] que E_1 était forcément un plan.

Rodolphe avait acquis la certitude que E_1 était un plan à la fin de la phase de travail personnel. Il a ensuite bataillé comme un fou pour convaincre les autres. “Je suis sûr que c'est un plan *(je vérifie sa certitude par le critère de la tête à couper)* mais je n'ai pas les mots pour le dire”. Il est passé par le dessin pour convaincre.

Lorinne a fait des gestes et elle a mis des mots sur ces gestes, vous savez comme les gens qui font un geste, toujours le même pour

5 Cette affirmation de ma part est contredite par ce que dit un étudiant dans le questionnaire (Voir § III.4.).

6 Husserl parle d'évidence apodictique pour désigner ce qui s'impose au sujet comme une évidence.

décrire un escalier en colimaçon ; s'ils parlent à un aveugle, ils diront "c'est un escalier qui tourne en montant" ou bien "c'est un escalier qui monte en tournant", mais cette formulation décrit une connaissance dynamique et corporelle, ce n'est pas une formulation mathématique comme "c'est une escalier qui a la forme d'une hélice circulaire droite". Lorinne a commencé à faire des gestes, puis elle m'a demandé si elle pouvait se déplacer. Elle est alors allée vers un coin de la salle, a installé ses axes sur les trois arètes, Ox en bas à droite, Oy verticalement et Oz en bas à gauche. Elle a montré avec son avant-bras droit la position de la droite d'équation $2x - y = -1$ dans le plan xOy, a posé son bras le long de cette droite et a dit "Puisqu'on est dans l'espace, tous les points ont trois coordonnées, donc ma droite peut avancer" et du bras elle a balayé une surface plane perpendiculairement au dessin de la droite. "Et vous voyez bien que c'est un plan qui est parallèle à Oz". Et elle a recommencé ses gestes en les associant à des explications autant de fois qu'il a fallu pour répondre à toutes les questions de son groupe qui n'a mis aucun empressement à se laisser convaincre, mais qui a fini par accepter l'évidence : Lorinne a raison, c'est bien un plan.

Laurent a raisonné par généralisation : "si on est sur une droite $x = 3$ est un point, si on est dans un plan, $x = 3$ est une droite, et donc, si on est dans l'espace $x = 3$ est un plan". (L'hyperplan est caché derrière cette découverte. Une équation linéaire pour un hyperplan). "Comme, dans $x = 3$, il n'y a pas de y et que, dans le plan, c'est quand même une droite, et pas un point, et que y peut prendre n'importe quelle valeur, forcément, dans l'espace, même s'il n'y a pas y et z, c'est un plan. Donc dans l'espace, $2x - y = -1$, où il n'y a pas z, z est quelconque, c'est aussi un plan". Ce discours s'adresse à ses partenaires du petit groupe et il est accompagné de dessins.

Edouard a explicité sa certitude par un discours accompagnée de gestes expliquant qu'il voyait les points "empilés" les uns sur les autres", "ça peut monter", "parce que z n'a pas de valeur" et personne ne lui a demandé ce que voulait dire « z n'a pas de valeur ».

Céline verbalise tout de suite « il ne faut pas oublier z, on est dans l'espace, donc z prend n'importe quelle valeur ». Un autre dit "z varie de $-\infty$ à $+\infty$, donc on a une droite verticale et le plan est fait de ces droites verticales", ce qui l'amène à dire que ce plan est « nécessairement parallèle à Oz ».

Il est apparu clairement dans les séances de synthèse, au moment où les groupes ont fait le récit de leur travail devant le groupe de TD, que très souvent les étapes de travail ont été :

- $2x - y = -1$ est l'équation d'une droite,
- $x = 3$ est l'équation d'un plan,
- retour sur $2x - y = -1$, c'est aussi un plan,
- $x + y + z = 1$, "je ne sais pas ce que c'est" ou "c'est un plan[7] mais je ne sais pas le dessiner".

Les trois premiers cas étant réglés, les étudiants ont repris, sans aucune difficulté, le raisonnement gestuel pour $x^2 + y^2 = 1$ et pour $xy = 1$. Pour $x^2 + y^2 = 1$, ils ont dit que c'était un tube, un tuyau ou un empilement de cercles, ils l'ont dessiné, certains l'ont nommé cylindre. Pour $xy = 1$, tout est passé par des gestes, ou par la manipulation de feuilles de papier représentant cette surface. Sophie et

7 En début de DEUG, cette connaissance ne fait pas encore partie du «socle de base».

Christelle ont cherché un nom pour cette chose et ont dit “C'est un plan hyperbolique”, expression qui a beaucoup plu. Plus tard, elles ont renoncé au mot plan, parce que « si on fait tourner les droites, elles sortent de la chose ». Après la séance, Sophie a consulté une encyclopédie et nous a ramené le mot “quadrique” avec sa définition. Donc, pour les deux dernières équations, le mot “cylindre” ou « surface cylindrique » n'est pas toujours venu, mais les objets ont été décrits ou dessinés.

Pendant le TD de démarrage, les étudiants n'ont pas su écrire ce qu'ils faisaient, parce qu'ils n'étaient pas entraînés aux narrations de recherche, mais ils ont accepté de montrer avec leurs gestes et de dire avec leurs mots pour convaincre les autres et pour se mettre d'accord.

Je trouve quand même extraordinaire que, sauf Emilie, aucun n'a dit pendant les synthèses qu'il se rappelait avoir vu l'équation d'un plan au lycée (ou dans le Tronc Commun, puisque je le leur avais déjà expliqué). Quand je l'ai rappelé, redémontré et encadré, à la fin de la synthèse, en disant qu'il fallait le savoir, certains s'en sont rappelé, d'autres pas.

III.2. *Le sens de la variable absente*

J'ai pu observer souvent qu'il y a une réelle difficulté à considérer $2x - y = -1$ ou $x = 3$ comme des équations à trois inconnues. En effet l'information n'est pas dans l'équation mais dans le contexte. “Soit, dans un plan, l'équation $2x - y = -1$”. Droite, dit l'étudiant, et il a gagné. “Soit, dans l'espace, l'équation $2x - y = -1$”. Droite, dit encore l'étudiant, et il a perdu. J'ai longtemps pensé que les étudiants ne faisaient pas attention au début de la phrase. Mais une autre explication a été donnée massivement dans les synthèses, explication donnée après que la connaissance ait bougé de la forme “il n'y a pas z dans l'équation, donc $z = 0$”[8] à “il n'y a pas z, donc, z est quelconque ou libre”. L'un d'eux conclut “finalement, moi je ne me tromperais pas si on écrivait l'équation $2x - y + 0z = -1$”. L'argument était convaincant[9], même pour les plus récalcitrants, et nous verrons plus loin que Stéphane l'a retenu (voir § III.3.).

Certains ont raisonné sur l'absence de z, comme Céline ou comme Laurent (voir § III.1.). Les discussions apparues au cours des synthèses montrent qu'il y eu passage de « z n'est pas dans l'équation, donc $z = 0$ » à « z n'est pas dans l'équation, donc z n'a pas de valeur », puis à « z n'est pas dans l'équation, donc z prend n'importe quelle valeur, donc z est quelconque » ou « z prend n'importe quelle valeur, donc z varie de $-\infty$ à $+\infty$, ce qui s'est traduit par des gestes et par des phrases comme « ça fait une droite verticale et le plan est formé de toutes les droites qui glissent sur la droite $2x - y = -1$ du plan horizontal » ou “les points sont empilés les uns sur les autres” ou encore ”ça peut avancer”, “ça peut monter”.

Laurent a écrit dans son questionnaire, un mois après la séance : “dans le plan, $x = 3$ n'est pas un point mais une droite (parce que y n'est pas nul mais quelconque), de même j'ai pensé que $2x - y = -1$ n'était pas une droite mais un plan parce que z est quelconque”.

8 Cette erreur est dans la copie de Nadège.

9 Selon Marc Legrand, le fait qu'en mathématiques, «tout ce qui ne contraint pas n'est volontairement pas nommé, d'où la pratique d'omission volontaire du 0.z qui ne contraint pas z !» est caractéristique des mathématiques et réfère à la recherche de la nécessité. Nous observons ici que certains étudiants ont manifesté le besoin d'une étape intermédiaire pour interpréter correctement l'écriture mathématique habituelle.

Les réponses aux questionnaires montrent bien que les étudiants ont réactivé* eux-mêmes le sens de la variable absente. Quand la variable est absente, c'est le coefficient qui est nul et non la variable. Et quand le coefficient est nul, la variable n'est plus contrainte, « la variable prend n'importe quelle valeur », « elle peut varier de $-\infty$ à $+\infty$ ». Savoir que la variable qui manque n'est pas absente, qu'elle est toujours là, mais qu'elle est libérée de toutes contraintes par la présence occulte d'un coefficient nul, leur sera utile pour comprendre correctement la définition de la dépendance linéaire de n vecteurs. Philippe écrit dans le questionnaire « Lorsqu'une variable n'est pas dans l'équation, cela ne veut pas dire qu'elle n'existe pas mais que c'est pour toute valeur de cette variable ». Anonyme dit : « J'ai cherché à me représenter les ensembles de points puis à généraliser (notamment voir que lorsque z n'apparaissait pas dans la relation, il prenait en fait toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$)». « Par exemple ici $x = 3$, on ne trouve pas de y et de z, cela ne veut pas dire qu'ils sont de coordonnées zéro, au contraire, ils sont quelconques ». Les choses ont bougé par rapport à ce qu'avait écrit un étudiant dans sa narration personnelle "Pas de z, donc E_1 est une droite dans le plan xOy", puisque, implicitement « pas de z », était traduit par « $z = 0$ », mais il fallait mettre à jour cette traduction implicite pour pouvoir la travailler. Ce travail devrait sans doute faire partie du *travail personnel*. Combien d'étudiants peuvent le faire sans aide ?

III.3. *Le travail personnel de Stéphane*

Stéphane était présent à toutes les séances de cet enseignement. Il a passé le partiel le 14 décembre et le jeudi 16 à la fin du TD, dernier TD avant les vacances de Noël, il vient me voir et me dit qu'il a un problème qu'il n'arrive pas à résoudre tout seul. J'ai beaucoup de mal à le suivre, je comprends qu'il pense s'être trompé dans l'exercice III du partiel, mais je n'arrive pas à avoir des informations qui me permettent de l'accompagner vers la résolution de son problème. C'est la veille des vacances, j'ai mille choses à faire et je n'ai pas le temps de m'asseoir et de lui proposer un entretien d'explicitation. Je lui demande plusieurs fois quel est son problème, en vain bien sûr, il ne sait pas le dire puisque c'est ça le problème. Il est confus et confus de l'être. Je lui propose donc de prendre le temps d'y repenser tranquillement pendant les vacances, de m'apporter à la rentrée sa question écrite sur un papier et d'en reparler à la rentrée de janvier. Je lui précise bien sa tâche : "Lorsque ce problème sera résolu pour vous, vous pourrez alors mesurer tout ce que vous aura apporté le passage par l'écrit de la question que vous vous posez. Surtout ne cherchez pas la réponse, écrivez seulement la question". Je vérifie qu'il est d'accord pour faire cette tâche. Pendant la première semaine de janvier (semaine où j'ai donné les notes du partiel sans rendre les copies et sans faire la séance de correction, par manque de temps), je ne vois rien venir, et je ne demande rien. Pendant la deuxième semaine, mercredi 13 janvier, je donne les copies et un corrigé fait d'un montage de réponses d'étudiants. Nous faisons le point, Stéphane n'intervient pas. A la fin du TD, il vient avec une copie très propre. En haut à gauche, il a écrit son nom et le titre souligné en rouge est SYNTHÈSE. Nous avons travaillé ensemble un petit moment sur cette synthèse, puis je lui ai rendu son papier. J'ai pensé le soir que j'aurais dû le garder pour l'étudier de plus près et je le lui ai redemandé le lendemain. Il ne l'avait pas sur lui mais il a pensé à le déposer à mon bureau le vendredi suivant. Ces détails anecdotiques me permettent de penser que, malgré sa timidité, il avait très envie de pousser plus loin sa réflexion et qu'il souhaitait mon aide. Je recopie son texte ci-dessous en caractères droits et j'indique mes commentaires et la description des dessins en italiques.

SYNTHÈSE *(souligné en rouge)*

Dans un repère orthonormé (O, i , j , k), soit le système (S) tel que

$$(S)\quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

(c'est le système du partiel)

Transformons le système (S) par transformation élémentaire de Gauss

$$(S)\quad \begin{cases} x + y + z = 1 & e_1 \\ x - y + z = 2 & e_2 \end{cases} \qquad (S)\quad \begin{cases} x + y + z = 1 & e_1 \\ -2y \quad = 1 & e_1 - e_2 \end{cases}$$

On arrive à $-2y = 1$ d'où $y = -1/2$ *(ici, il dit "on" comme dans les devoirs de mathématiques.) Suit un dessin représentant une droite parallèle à Oz et passant par le point de coordonnées* $(0, -1/2, 0)$*, tracée en rouge.*

Nous avons tracé une droite $y = -1/2$. *(Premier terme du conflit : ce résultat est faux, c'est la connaissance locale à démolir, et elle est encore là).*

Pourtant traçons dans le plan l'équation $x = 3$. *(J'aurais dû lui demander qui est "nous" qui n'est plus "on"). Suit un dessin représentant une plan parallèle au plan yOz et passant par le point de coordonnées* $(3, 0, 0)$ *hachuré en vert.*

L'équation $x = 3$ a donné un plan car l'équation peut s'écrire $x + 0y + 0z = 3$ (équation d'un plan). Or $y = -1/2$ peut s'écrire de la forme : $0x - 2y + 0z = 1$ (équation d'un plan en Terminale) *(Deuxième terme du conflit) Le passage à l'écrit lui sert de moyen pour dialoguer avec lui-même, il est en dialogue interne, son autrui est intériorisé, et il utilise ce qui a été dit par un autre étudiant dans la synthèse et ce que j'ai institutionnalisé.*

Cependant pour $y = -1/2$, nous *(encore "nous" ?)* avons tracé une droite alors que l'équation est celle d'un plan. Pourquoi ? *Ce "nous" risque fort d'être la connaissance locale dont j'ai parlée plus haut et elle s'oppose à celle que Stéphane a bien retenue et qu'il a énoncée "L'équation x = 3 a donné un plan car l'équation peut s'écrire x + 0y + 0z = 3 (équation d'un plan). Or y = – 1/2 peut s'écrire de la forme 0x – 2y + 0z = 1 (équation d'un plan en Terminale)". Il est toujours en conflit interne, la contradiction est explicitée mais non élucidée, la connaissance mise en œuvre dans l'action décrite « nous avons tracé une droite » s'oppose au savoir « alors que l'équation est celle d'un plan », Stéphane est sorti de sa confusion, il peut écrire les deux termes du conflit, il peut donc les prendre pour thème de réflexion en retravaillant ce qu'il a écrit, pour dépasser enfin sa contradiction interne.*

Solution proposée : *(souligné en rouge, il fait le point pour lui)*

— Un système de deux équations de plans donne obligatoirement une droite (intersection de 2 plans dans notre exemple) *(Il oublie de dire que les plans doivent ne pas être parallèles, mais cet oubli n'est pas important ici. Mais il ne relève pas le fait qu'il remplace le système par une seule équation* $y = -1/2$ *).*

— Une équation individuelle donne géométriquement un plan (variables y, z) pour par exemple $x = 3$ *(confirmation que Stéphane a appris quelque chose cette année).*

Qu'a fait Stéphane ? Il a repéré sa contradiction. Il sait qu'il faut la dépasser. Le travail de résolution provoque chez lui une grande confusion. Il y travaille seul. Puis, il vient chercher mon aide. Après Noël, il a réussi à mettre son problème en mots, et en le faisant, il fait apparaître clairement qu'il a fait bouger ses connaissances, mais que la connaissance locale fausse est toujours là et le gène encore. Le problème n'est pas encore résolu. Il sait que deux équations donnent une droite dans l'espace, il sait qu'une équation donne un plan, il sait que $x = 3$ est l'équation d'un plan, c'est ce qui a été appris en TD. Il arrive à appliquer son savoir pour dire, de lui-même, que l'équation $y = -1/2$ est également celle d'un plan, mais la connaissance locale toujours présente le gène encore. Il lui faut encore un peu de temps, puis il faudra conclure et faire en sorte qu'il bascule du bon côté et qu'il ne revienne pas à l'état d'équilibre antérieur.

Cet épisode a modifié le comportement de Stéphane. Il est toujours très timide, mais il me soumet de plus en plus souvent ses questions [10], pendant les TD ou à la fin, et il me pose des questions dans les devoirs à faire à la maison. J'en déduis qu'il fait du *travail personnel*.

Dernière heure : Stéphane, qui avait eu 10 au Tronc Commun, 8 et 9 ensuite au premier semestre, vient d'avoir 13 au partiel du 15 avril, ce qui le place, pour ce partiel dans le peloton de tête, à égalité avec de très bons étudiants. Maintenant, cette note ayant officialisé la bonne qualité de son travail, il s'autorise à tenir tête à d'autres étudiants et à tenir bon quand il pense avoir raison, et il a très souvent raison !

10 Questions que je lui retourne le plus souvent en répondant «Et vous, qu'en pensez-vous», surtout pour celles qui commencent par «Madame, est-ce qu'on a le droit de … ?»

III.4. *Que reste-t-il de ce travail pour les étudiants ?*

Ce qui importe d'abord pour un enseignement, c'est qu'il produise l'effet attendu. J'ai donc utilisé les réponses au questionnaire pour savoir ce que les étudiants en avaient retenu.

D'abord, cela les amène à une attitude plus active en TD. Ce qui ressort à ce sujet dans les questionnaires est positif et il se dégage une demande pour d'autres TD comme celui qui a été décrit ici "A quand un TD du même type ?". Il y a eu pour eux *désir de comprendre* et il en reste quelque chose. Les moments les plus importants pour eux sont massivement les moments de travail en petits groupes "le fait de se confronter les uns avec les autres" (nous l'avions déjà relevé l'an dernier en Seconde, même si je mets un bémol dû à l'effet « première fois » [11]). Certains ont apprécié "le moment des débats oraux entre les différents camarades", les moments où il faut "convaincre l'autre". Le mode de travail permet aux étudiants "de faire le point avec des mots à nous", d'imaginer : "Il a fallu s'imaginer ce que donne une équation dans l'espace, chose qu'on ne nous a jamais demandé de faire auparavant", de réfléchir en mathématiques sur un mode personnel "j'ai privilégié le travail "imagé" à une simple application de formules apprises au lycée.

Par exemple, j'ai délaissé la formule "l'équation d'un plan est de la forme :

$$ax + by + cz - d = 0",$$

et je me suis plutôt intéressée à une étude "imagée"" (*il a quitté le cadre algébrique pour le cadre géométrique, en installant des images dans sa tête*). Il y a de l'écoute, il y a de l'échange

11 Deux PLC2 dont j'ai suivi le mémoire sur le travail en groupes disent n'avoir jamais travaillé en groupe dans toute leur scolarité.

"chaque fois qu'on change de groupe, on trouve toujours quelque chose de nouveau". Ils ont appris : "J'ai remis en question certaines de mes connaissances", il y a du travail sur l'erreur. Certains ont rencontré l'évidence et vu l'importance de la certitude avant la formalisation de la démonstration. "Avec du recul et concertation avec les personnes de mon groupe, il m'a paru évident que $x = 3$ et $2x - y = -1$ étaient des plans. J'ai écouté les autres points de vue sur les questions et j'ai donné mon avis. (Je me suis rendu compte, qu'en travaillant à plusieurs, on arrivait presque toujours au résultat juste, même si au départ on avait tous donné une réponse fausse)". Un dépouillement fait tout en corrigeant les copies du partiel, montre que seulement quelques étudiants produisent encore la double connaissance (pour un partiel de décembre, alors que l'épreuve de 1997 était en février) et que presque tout ceux qui ont rendu des copies significatives ont su répondre correctement à la question 2)a).

IV. Théorie, expérience et pratique

IV.1. *Mes états d'âme au début de la première séance du TD de démarrage*

Dans la phase de travail personnel, mon travail consiste à regarder les réponses produites, pour repérer les réponses différentes et leurs auteurs, afin de constituer les petits groupes de la phase suivante autour de réponses contradictoires. Or TOUS LES ÉTUDIANTS (eh oui, ils étaient 90 !) ont écrit que l'équation $2x - y = -1$ était l'équation d'une droite. Même ceux qui ont tenté d'utiliser les images en 3D (très mauvaises) de leur calculatrice. J'exagère un tout petit peu : quelques étudiants n'ont rien écrit. Mais pendant les dix premières minutes, dans le premier groupe où j'ai fait ce TD de démarrage, je n'ai pas vu une seule fois le mot "plan" pour qualifier E_1. Je me suis donc demandée si la séance n'allait pas tourner court faute de résistance* et si je n'avais pas devant moi une troupe de passe-murailles mathématiques [12]. Dans un premier temps, je me suis dit "Ca ne marche pas !" et dans un deuxième temps "Mais ce n'est pas possible que ça ne marche pas ! Ca a marché en Seconde l'an dernier. L'analyse *a priori* est bien faite. Fais confiance à la théorie, ça ne vient pas comme c'est prévu, mais ça ne peut pas ne pas venir, laisse faire le travail à la situation préparée et tu verras bien. Maintenant, laisse faire les maths !". Et je me suis dit que j'étais une enseignante sacrément privilégiée. La pensée de mes *autruis* co-chercheurs [13] m'a aidée à avoir confiance dans la situation proposée. Je ne me sentais pas seule, malgré leur absence pour cause de surcharge. Il y avait aussi l'apport du GREX dans cette confiance. Les Grexiens savent que les choses se passent comme prévu ou … autrement ! Nous avons appris à faire les choses en deux temps. D'abord laisser venir, accueillir ce qui se passe sans le juger, et recueillir des informations. Ensuite prévoir un second temps pour faire le travail de jugement, d'analyse et de recherche.

IV.2. *Le* lâcher prise *du maître*

Une question me vient pourtant après coup : dans mon rôle de maître, qu'est-ce que je sais de plus qu'un PLC2 qui « craque » au

12 Le Tronc Commun ne m'avait pas permis de faire la connaissance de ces étudiants, bien que j'ai été leur professeur d'algèbre en amphi et en TD pendant six semaines.

13 Catherine Sackur et Jean-Philippe Drouhard.

bout de quelques minutes devant sa classe de passe-murailles et qui reprend aussitôt la main pour « mettre les élèves sur la bonne voie» ? J'enseigne depuis bien plus longtemps que lui et j'ai l'expérience de l'âge ! D'accord, mais est-ce suffisant ?

Lorsque nous avons fait la première expérimentation en Seconde [14] sur les inéquations, nous avions derrière nous, en plus de notre travail théorique sur l'enseignement de l'algèbre, une longue réflexion sur l'activité mathématique à partir de textes philosophiques (Cavaillès [4] [10], Wittgenstein [13], Bouveresse [3], Husserl [7] pour ne citer que nos principaux auteurs de référence). Nous avons donc choisi une question mathématique banale (résoudre une inéquation) qui déclenche chez certains élèves la production d'une erreur algébrique fréquente (multiplier les deux membres de l'inéquation par x sans se préoccuper du signe de x), puis nous avons mis les élèves en petits groupes avec l'obligation de se mettre d'accord entre eux. Là, ils ont pu éprouver la rencontre avec la contradiction qui résidait dans la production de résultats différents et la nécessité de l'unicité du résultat mathématique. Ils ont été contraints à réorganiser leurs connaissances pour que le résultat, évident et certain dans le cadre graphique, soit le même dans le cadre algébrique. Les élèves ont alors construit, à partir d'une expérience et de leur propre expérience*, le sens de la nécessité de ce savoir pour résoudre le problème posé par le maître. Cette expérience de l'élève est à la fois un *vécu* et une *expérience mathématique* s'il veut bien regarder le problème comme un problème de mathématiques pour le résoudre mathématiquement, c'est-à-dire en respectant les règles du jeu mathématique, et non artificiellement, en donnant la réponse qu'il croit que le maître attend.

Mais cette expérience, au double sens du terme se retrouve chez le maître. Il fait une expérience de praticien (au sens de *vécu* dans une classe) et une expérience de chercheur (au sens où il cherche à valider sa théorie en la confrontant à la réalité de la classe). Cette double expérience étant faite, la maître peut alors insérer cette pratique dans la conduite de sa classe. C'est pourquoi, lorsque je reprends en DEUG la structure du scénario des inéquations de Seconde, je sais ce qui va se passer. Je sais que le maître peut se retirer du jeu qu'il a installé et laisser les étudiants face aux mathématiques. Je ne sais pas précisément comment les étudiants vont sortir de leur contradiction, mais je sais qu'ils vont trouver un moyen d'en sortir : tout le dispositif repose sur l'idée qu'ils sont capables d'y arriver par eux-mêmes et que j'ai créé les conditions pour leur donner l'occasion de le faire. Dans mon rôle de maître, je suis sereine et confiante, je peux *lâcher prise* et passer la main aux mathématiques, et c'est ce lâcher prise qui permet au dispositif de fonctionner. Le maître accepte de renoncer à substituer sa pensée à celles des étudiants et leur passe la main [15]. Comme dans le débat scientifique, seul leur propre travail de pensée peut les sortir de l'impasse.

IV.3. *Expérience et expertise*

Ce que je sais donc de plus qu'un PLC2, c'est le résultat de cette démarche : mes comportements de maître sont guidés par le tra-

14 Un article de Catherine Sackur et Maryse Maurel sur ce travail est publié dans la revue Petit x n° 53. Le texte de deux exposés sur l'expérimentation en Seconde (Sackur&Maurel) est publié dans les Actes SFIDA III, IREM de Nice, 2000.

15 En jargon didactique, nous parlons de dévolution de la situation aux étudiants.

vail du groupe de recherche dont je fais partie. Nous cueillons les problèmes et les questions dans les classes, nous développons du travail théorique pour répondre à ces questions, et nous ramenons, quand c'est possible, les réponses dans nos classes. Qu'est-ce que cela m'apporte pour jouer mon rôle de maître ? En classe, je sais où je veux amener les étudiants, même si je ne sais pas toujours comment y parvenir minute par minute.

Le cap visé pilote mes décisions et les moyens utilisés. La machine enseignement ne tourne pas à vide, elle a un but, la réponse apportée est bien plus qu'une réponse technique. La recherche théorique me donne un fil conducteur. Je peux garder le cap même si la situation me semble confuse, et dans les premières minutes du TD de démarrage, elle était en effet bien confuse ! Notre recherche didactique m'a donné des outils de pensée et d'action pour prévoir, anticiper, viser l'essentiel et atteindre ainsi le but recherché.

J'ai fait l'expérience de la situation de classe au deux sens du terme : d'une part, j'ai préparé et j'ai vécu comme observatrice la séquence des inéquations en Seconde, j'ai vu le comportement des élèves et l'effet (prévu et attendu) produit sur eux par cet enseignement. D'autre part, la théorie me permet de faire l'expérience mentale au sens de expérimentation et de décrire, dans le cadre de cette théorie, ce qui va se passer en classe et pourquoi cela va se passer ainsi.

Mais si le maître conduit la séance en ne retenant que l'aspect technique du dispositif, s'il n'a pas fait sien le travail théorique, il aura des difficultés pour s'adapter aux aléas et aux contingences de la classe, et alors, toutes les dérives seront possibles!

V. Conclusion

Au fil de cette écriture pour rendre compte à la fois du travail théorique et du travail d'enseignement, ont émergé des réponses pour deux questions précises en marge de notre problématique générale CESAME.

Première question : comment le maître peut-il répondre en classe à une erreur fréquente, résistante et gênante pour la suite de l'enseignement ? Nous sommes dans la rubrique *pratique de la classe*.

Deuxième question : comment ramener au sein de l'institution scolaire l'apprentissage du *travail personnel* des étudiants ? Si nous ne voulons pas laisser la plupart des étudiants sur la touche et si nous refusons que les cours de mathématiques n'enseignent que des énoncés factuels dénués de signification, des théorèmes de perroquets en quelque sorte, il me parait urgent de répondre à cette question. Nous sommes dans la rubrique *épistémologie des mathématiques* et dans la rubrique *politique de l'enseignement.*

Est-il possible de faire d'une pierre deux coups : travailler une erreur pour dépasser l'obstacle qui la provoque et, au passage pointer ce que veut dire faire un *travail personnel* de mathématiques ?

Nous, les enseignants, nous disons de nos étudiants *ils ne savent pas travailler*, *je n'arrive pas à leur faire comprendre ce que veut dire comprendre*, *ils ne font pas de travail personnel en dehors des cours et des TD*, *nous leur disons bien qu'il faut un travail personnel important pour assimiler les cours, mais il ne le font pas*. D'accord. Mais je constate, en écoutant les étudiants de première année, que justement, ils ne savent pas ce qu'est le *travail personnel*. Nous, paraît-il, nous le savions, ou nous l'avions appris tout seuls. Peut-être. Et alors ? Si beaucoup d'étudiants savent ou se doutent bien que ce *travail personnel* est nécessaire pour comprendre, ils ne savent pas toujours qu'ils sont capables de le faire par eux-mêmes, mais qu'il leur faudra y consacrer beaucoup de temps. Comment leur expliquer ce que veut dire se confronter aux mathématiques si nous ne les accompagnons pas dans ce travail difficile et quasi impossible à décrire ?

Mais de quel *travail personnel* s'agit-il ici ? Faire des mathématiques, ce n'est pas seulement savoir résoudre des listes d'exercices types pour avoir une bonne note au contrôle et réussir à l'examen. Le *travail personnel* dont je veux parler ici n'est pas celui qui consiste à faire et à refaire dix ou vingt fois le même exercice suivant un schéma donné par le professeur ou trouvé dans un recueil d'exercices corrigés, c'est celui qui consiste à se confronter aux mathématiques et à réfléchir par soi-même. Le travail sur l'erreur ne doit donc pas se faire par soumission à l'autorité du maître, mais dans le respect des règles du jeu mathématique. Sinon, tout énoncé et tout résultat restera factuel et les élèves et les étudiants risqueront fort d'apprendre les mathématiques comme la liste des sous-préfectures.

Mais une troisième question vient après coup. Comment utiliser un travail théorique pour construire une réponse à la première question, et comment utiliser le travail fait en classe pour valider une théorie d'enseignement ? Plus précisément, quels sont les liens entre un *travail théorique de didactique* et une *pratique de classe* ? Un travail théorique permet-il de répondre à une question d'enseignement ? Le chercheur peut-il élaborer une réponse pour le maître ? Comment le maître met-il en pratique cette réponse ? Nous sommes dans la rubrique *formation des maîtres*.

Le travail théorique désigné ici est le travail de recherche en didactique des mathématiques que nous faisons à Nice dans les groupes de travail GECO* et CESAME* couplé avec celui que je fais à Paris dans le séminaire GREX*.

Réponse à la première question : comment le maître peut-il répondre en classe à une erreur fréquente, résistante et gênante pour la suite de l'enseignement ?

En seconde, nous avions mis les élèves devant la responsabilité de choisir entre plusieurs réponses pour donner les solutions d'une inéquation. La résolution graphique leur permettait d'acquérir une certitude et de corriger l'erreur algébrique. Nous avons donc reproduit pour les DEUG un enseignement de même structure. Seul le contenu a changé. Ici, c'est la réactivation du sens de l'équation algébrique et de la variable absente qui a fondé la certitude pour dépasser la contradiction : l'équation $2x - y = -1$ ne peut pas représenter à la fois une droite et un plan.

Pour construire de tels enseignements, il faut une question qui produise l'erreur à travailler, erreur que le dispositif transforme en situation de conflit ; les moyens de dépasser le conflit sont la confrontation à autrui et la résistance des objets mathématiques. Ce que le maître institutionnalise alors, ce n'est pas seulement la réponse à la question, sur lequel presque tout le monde est d'accord à la fin du travail en petits groupes, mais la nécessité de cette réponse dans l'ensemble des connaissances de la classe.

Le rôle du maître est donc ici de préparer soigneusement la séance et, une fois dans la classe, de laisser faire la situation, c'est-à-dire de laisser faire les mathématiques en permettant l'identification des contradictions. Car la nécessité du résultat mathématique s'éprouve dans l'expérience de la contradiction, par la confrontation avec autrui, face à la résistance des objets mathématiques. Dans ce travail, certains étudiants ont rencontré l'évidence que E_1 était un plan, le travail en petits groupes a donné à (presque) tous la certitude de cet énoncé et les étudiants ont modifié leur connaissance pour rencontrer la nécessité du résultat mathématique : E_1 est un plan. À la fin de la séance, le maître reprend et nomme ce que les étudiants ont fait et produit.

Réponse à la deuxième question : comment ramener au sein de l'institution scolaire l'apprentissage du travail personnel des étudiants, comment montrer aux étudiants ce que les maîtres ne savent pas leur dire ?

Savoir faire du *travail personnel* en mathématiques est une connaissance de nature expérientielle, qui s'apprend en le faisant, sous la direction d'un maître, et qui s'apprend plus difficilement dans un livre ou en écoutant un cours magistral. Nous avons déjà remarqué que, dans la réalité de la classe, peu d'étudiants montrent qu'ils savent le faire tout seuls. Le maître doit donc créer en classe les conditions favorables pour mettre les étudiants en situation de réflexion personnelle, pour leur laisser la responsabilité du vrai et du faux, en dehors du champ de son autorité de maître, et pointer au passage, de façon performative, ce que veut dire faire un travail personnel de mathématiques, c'est-à-dire le montrer en le faisant faire et en disant que *faire du travail personnel, c'est faire ce que vous venez de faire* ?

En suivant Jean-Toussaint Desanti*, je dirai que certains énoncés du professeur sont *simplement proposés*. Et nos étudiants de première année ne sont pas encore suffisamment *exercés* pour se passer de les *réactualiser*, pour se permettre de *laisser aller les choses dans leur circuit naturel*. Ils le feront plus tard, peut-être, quand ils auront acquis l'expérience de la réactivation d'un énoncé, et qu'ils sauront qu'ils peuvent le faire parce qu'ils l'auront déjà fait, et donc qu'ils sauront qu'ils savent [16] le faire ou qu'ils sauraient le faire s'il le fallait. Mais il leur faut une expérience de référence pour s'engager sur cette voie. Nous rejoignons ici le débat scientifique qui repropose un énoncé à l'amphi.

Une réflexion incidente sur le temps universitaire et le temps personnel

A propos du *temps de l'enseignement et du temps personnel*, il ne s'agit pas de dire qu'il faut accorder le rythme des cours au rythme personnel et naturel de chacun. Mais je déplore que le travail de réactivation* d'un texte ou d'une forme de savoir soit trop souvent considéré comme du *travail personnel* pour l'étudiant et qu'il soit implicitement laissé à sa charge. C'est une partie du travail du maître de montrer que faire soi-même un travail de réflexion, cela prend effectivement beaucoup de temps, mais que c'est important de le faire. Le maître doit être lui-même convaincu que les étudiants en sont capables si on leur montre le chemin à suivre, dans la classe et sur le temps universitaire, seul ou à plusieurs.

Nous devons noter, une fois de plus, l'écart énorme entre le temps des étudiants et le temps universitaire. Ceci n'est pas une décou-

16 Je confirme la répétition «ils savent qu'ils savent».

verte bien sûr, tous les enseignants le savent et les didacticiens de Marseille, en particulier Alain Mercier, ont analysé longuement les différences entre le *temps personnel*, celui de l'étudiant, et le *temps didactique*, celui de l'avancement du programme. Mais avons-nous tous bien conscience de l'énormité de l'écart ? Ce qui aurait dû "normalement" prendre quelques minutes, le temps pour moi de dire lentement en veillant à ce que tout le monde m'écoute bien et note sur sa feuille : *Je vous rappelle que vous avez vu au lycée et dans le Tronc Commun que dans un espace à trois dimensions, $ax + by + cz = d$ est l'équation d'un plan, mais faites bien attention, pour avoir une droite il faut au moins deux équations linéairement indépendantes parce que bla bla bla …*, ou même rester complètement implicite, puisqu'ils l'ont déjà appris au lycée, ce qui aurait donc dû durer quelques minutes, nous a pris dans ce dispositif deux séances de TD d'une heure et demie chacune, sans compter le temps personnel hors classe, car vous savez tous que lorsque le travail de réflexion est sur orbite, on a du mal à l'arrêter. Une preuve ? Voir § III.3. ce que Stéphane a fait tout seul.

Réponse à la troisième question : un travail théorique permet-il de répondre à une question d'enseignement ?

Que pouvons-nous retenir des quelques réflexions du § IV sur le rôle et le travail du maître ? Il est indispensable d'inclure dans la formation des maîtres une réflexion épistémologique sur les mathématiques, sur la nature et la spécificité de l'activité mathématique et sur le rapport au savoir du futur maître. Nous nous sommes focalisés ici sur la nécessité.

Le travail théorique de réflexion didactique et la préparation de la première expérimentation, donne son sens à la pratique de classe et apparaît donc comme la condition *sine qua non* de la réussite de l'expérimentation et de l'enseignement qui en découlera. Il ne suffit pas de mettre en scène un scénario modèle élaboré par de doctes chercheurs. N'importe quel maître ne peut pas s'emparer des produits d'une réflexion théorique, le maître doit avoir fait ou refait, pour lui, le chemin théorique pour mettre en œuvre le dispositif d'enseignement. Il y a donc trois pôles à coordonner dans cette démarche :

• un travail théorique, où le maître élucide au passage son propre rapport aux mathématiques, pour répondre aux problèmes rencontrés dans la classe,

• une expérimentation où se valident les résultats théoriques et où le praticien-chercheur fait l'expérience de la pertinence de cet enseignement pour résoudre le problème de classe,

• une pratique qui en découle, quand le praticien-chercheur redevenu maître reprend dans sa classe la structure de la séance expérimentale dans la même situation ou dans une situation analogue et utilise son expérience vécue pour conduire la séance.

Nous affirmons que le travail décrit dans ce texte est un travail de recherche en didactique des mathématiques, et cette conception de la didactique nous conduit à défendre l'idée que le maître n'est pas un ingénieur qui applique les résultats d'une recherche fondamentale : il doit avoir cette formation expérientielle décrite ici qui conduit à l'articulation permanente entre les trois termes du triplet (théorie, expérience, pratique) [17].

17 Nous avons mieux compris l'importance de ces relations en animant un groupe élève-chercheur à l'Irem de Nice et en voyant l'importance de ces aller-retour entre théorie, expérience et pratique pour préparer et analyser des séances expérimentales de débat scientifique en Troisième et en Seconde.

Le travail du groupe CESAME continue*

Il apparaît, dans les § III.2. et III.3., que la contrainte à communiquer avec *autrui* à propos d'un désaccord où personne ne pouvait imposer son avis [18] et où seule la résistance* des objets mathématiques permettait de valider le vrai, a permis aux étudiants de réorganiser leurs connaissances. Ils ont accepté de passer par une verbalisation et une écriture *intermédiaire*, entre le vécu personnel de l'évidence (quand l'étudiant dit pour lui-même ou pour les autres *cela ne peut pas être autrement*) et la nécessité de l'énoncé mathématique (du côté des mathématiques, *ce résultat ou cet énoncé est nécessairement vrai ou faux*). Tous les groupes ont eu des difficultés à faire le rapport collectif écrit alors que les explications échangées dans les séances de synthèse ont été énoncées clairement et simplement [19]. Les étudiants ont ensuite accepté ma mise en mots mathématiques que j'ai écrite au tableau et les résultats du partiel prouvent qu'ils ont compris… et retenu. Au moins jusqu'en décembre ! On pourrait donc dire que, pour un problème difficile, il est impossible (je parle toujours des étudiants, bien sûr !) de passer directement du travail de la pensée à l'écrit mathématique. Le saut est trop grand. Ce qu'ils trouvent et ce qu'ils rencontrent ne peut pas s'écrire tel quel si leur intention est d'écrire tout de suite des mathématiques comme celles des livres ou du professeur, il faut une transformation qui est beaucoup plus qu'une mise en mots. Les gestes mentaux ou corporels leur apportent la conviction que E_1 est un plan. Ensuite, il faut convaincre les autres. Alors, il leur faut justifier rationnellement que cette équation $2x - y = -1$, qui ressemble à l'équation bien connue d'une droite (dans le plan), est bien celle d'un plan quand on considère que la variable z n'est pas absente, mais que le coefficient de z est nul, et qu'à partir de là, on retrouve la bonne forme pour l'équation d'un plan dans l'espace. La phase intersubjective en petits groupes pourrait donc être un espace transitionnel entre le sujet et les mathématiques. Husserl dit dans l'*Origine de la géométrie* : *Dans la connexion de la compréhension mutuelle par le langage, la production originaire et le produit d'un seul sujet peuvent être re-compris* activement *par les autres*. C'est peut-être ce qu'ont fait certains étudiants pour rencontrer, par l'intermédiaire d'un *autrui*, ce qui leur a été donné comme certain par cet *autrui*, c'est-à-dire nécessaire subjectivement pour celui qui en avait rencontré l'évidence. Je crois pouvoir dire qu'aucun d'entre eux n'a fait le retour à l'origine du sens puisqu'ils sont partis d'une couche de sens sédimentés qui est le sens de l'équation d'une droite et de la droite géométrique dans le plan dont ils sont tous sûrs, absolument sûrs. À partir de là, le fait que, dans l'espace, la même équation représente un plan est devenu une évidence pour certains, une évidence ante-prédicative (*je n'ai pas les mots pour le dire* ont dit plusieurs d'entre eux), le corps le sait, Rodolphe, Lorinne, Edouard et les autres peuvent mimer ce qui est évidence pour eux, mais qui ne passe pas encore par le discours mathématique conventionnel. Pas pour tous. Jean Toussaint Desanti dit [1] : *Donc deux pôles : le premier fait signe vers les syntaxes strictes, le second fait signe vers ce que Husserl a toujours appelé le pré-objectif, l'anté-prédicatif, ce qui précède la logique, ce sans quoi la logique ne pourrait même pas apparaître, ce qui dans l'expérience, dans le perçu, dans l'expérience propre du corps, concer-*

18 comme dans le débat scientifique.

19 Le récit ou la narration pourrait aider à conscientiser une expérience de référence afin qu'elle devienne un événement didactique auquel l'étudiant pourrait se référer plus tard.

ne au plus près le monde, le vécu, dans son déploiement dans la sphère phénoménologique, en tant que ce déploiement est saisi. Alors que faire ? Où sont les mathématiques ?

Comment aider les étudiants à ouvrir des chemins entre ces deux pôles, celui des écritures symboliques des mathématiques et celui de l'expérience propre du sujet ?

Bibliographie

[1] BARBIN E.&CAVEING M. (1996), *Les philosophes et les mathématiques*, IREM-Ellipses. (page 218)

[2] BKOUCHE R., CHARLOT B., ROUCHE N. (1991), *Faire des mathématiques : le plaisir du sens*, Armand Colin.

[3] BOUVERESSE J. (1987), *La force de la règle. Wittgenstein et l'invention de la nécessité,* Minuit, collection "Critique".

[4] CAVAILLÈS J., (1946, 1997), *Sur la logique et la théorie de la science*; J. VRIN.

[5] GECO. (1997), *Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ? REPÈRES-IREM numéro 28,* Topiques.

[6] LEGRAND M., (1993), *Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse, REPÈRES-IREM numéro 10,* Topiques.

[7] HUSSERL E., (1936, 1995), *L'origine de la géométrie*, PUF. (page 179)

[8] LÉONARD F. & SACKUR C. (1991), *Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche, Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10/2-3, La pensée Sauvage.

[9] SACKUR C., MAUREL M., (1999-2000), *Les inéquations en classe de Seconde, une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques*, Revue Petit x n°.53, IREM de Grenoble.

[10] SINACEUR H., (1994), *Jean Cavaillès, Philosophie mathématique*, PUF. (page 23).

[11] VERMERSCH P.& MAUREL M., (1997), *Pratiques de l'entretien d'explicitation*, ESF.

[12] VERMERSCH P., (1994), *L'entretien d'explicitation*, ESF.

[13] WITTGENSTEIN L., (1967), *Investigations philosophiques*, GALLIMARD.

VI. Glossaire

*** CESAME**

Le groupe CESAME est financé par l'IUFM de Nice. Son but est de faire des recherches sur ce qu'il faudrait enseigner aux élèves pour les amener à faire vraiment des mathématiques.

Mais nous ne cherchons pas à définir ce que sont les mathématiques. Pour nous, apprendre des mathématiques, c'est interagir (→ *Construction* et *Expérience*) avec des objets mathématiques (→ le *Savoir = les Mathématiques*), au sein d'une classe ou d'un groupe (→ *Autrui*), dans un cadre institutionnel d'*Enseignement*, sous la direction d'un maître (→ rôle du maître et institutionnalisation du savoir). C'est pour cela que nous avons nommé CESAME notre groupe de recherche.

Nous nous intéressons à l'activité mathématique des élèves dans l'enseignement et nous cherchons les caractéristiques de cette activité. Quand pouvons-nous dire que l'activité de quelqu'un est sans aucun doute une activité mathématique et donc, qu'ainsi faisant, il prend le risque d'apprendre des mathématiques ?

Le travail de recherche est en cours ; le programme CESAME I portait sur la *nécessité* des énoncés mathématiques, *autrui* et *expérience* dans un enseignement de mathématiques ; le programme CESAME II portera sur le rôle de l'écrit dans le travail mathématique. Une des questions que nous nous posons maintenant est celle de la construction et de la mise en oeuvre de la rationalité mathématique à travers le travail d'écriture.

*** Compréhension passive et réactivation du sens**

Pour faire le lien entre notre travail GECO* [5] [8] et notre travail CESAME*, nous avions besoin d'une théorie qui décrive le passage des connaissances subjectives (connaissances locales construites par un sujet faisant des mathématiques) vers le savoir mathématique, indépendant de l'individu qui l'a produit, savoir mathématique dont une des caractéristiques est l'autonomie (voir Glossaire : nécessité) ou, ce qui revient au même, l'objectivité du savoir partagé par opposition à la subjectivité du sujet qui le produit.

Cavaillès reprend une question de Kant revu par Husserl sous la forme : *Comment des objectivités idéales, qui naissent purement de notre activité subjective de jugement et de connaissance, et n'ont d'existence originale qu'en tant que manifestation de notre spontanéité dans notre champ de conscience, acquièrent-elles le sens et l'être d'objets, [qui existent] en soi relativement à la contingence des actes et des sujets ?* [4]

Dans l'Origine de la Géométrie [7], Husserl répond à cette question pour montrer que … *l'existence géométrique n'est pas existence psychique, elle n'est pas existence de quelque chose de personnel dans la sphère personnelle de la conscience ; elle est existence d'un être-là, objectivement pour "tout-le-monde" (pour le géomètre réel et possible ou pour quiconque comprend la géométrie). Bien mieux, elle a depuis sa proto-formation une existence spécifiquement supra-temporelle et accessible, comme nous en avons la certitude, à tous les hommes et en premier lieu aux mathématiciens réels et possibles de tous les peuples, de tous les siècles et ce sous toutes ses formes particulières. Et toutes les formes produites à nouveau par quiconque sur le fondement des formes prédonnées endossent aussitôt la même objectivité. Il s'agit là, nous le voyons, d'une objectivité "idéale"…. Le théorème de Pythagore, toute la géométrie n'existent qu'une seule fois si souvent et même en quelque langue qu'ils puissent être exprimés.* Or, quand Husserl parle de la géométrie, il en parle comme d'un cas exemplaire de la connaissance scientifique et de la scientificité. Il choisit de réfléchir sur la géométrie parce que la réduction à l'idéalité des objets y est déjà faite. Les objets géométriques (et mathématiques) sont des *objets idéaux*. Husserl se propose de rendre compte de la genèse de l'objectivité absolue, c'est-à-dire idéale, du sens. Il veut raconter comment la subjectivité peut sortir de soi pour rencontrer ou constituer l'objet idéal de la science. En ce qui concerne l'institution scolaire, Husserl s'interroge déjà : *Comment la tradition vivante de formation de sens des concepts élémentaires s'accomplit effectivement, nous le voyons dans l'enseignement élémentaire de la géométrie et dans ses manuels ; ce que nous y apprenons effectivement, c'est à savoir manier, à l'intérieur d'une méthodologie rigoureuse, des concepts et des propositions tout prêts.* Manier dans une méthodologie rigoureuse des concepts tout prêts, c'est travailler en utilisant des savoirs prédonnés avec leurs couches de sens sédimentées, sans faire le travail de réactivation du sens. Pour Husserl, c'est l'attitude du lecteur passif [20]. En effet les signes graphiques de l'écrit, et sans doute les mots énoncés, éveillent leurs significations courantes. Mais *ce qui est passivement éveillé doit être converti en retour dans l'activité correspondante : c'est la faculté de réactivation …. La compréhension passive de l'expression se distingue donc de sa mise en évidence par réactivation du sens.*

Quand un élève utilise une connaissance dont il est absolument sûr, il travaille avec une forme de savoir et ses couches de sens sédimentés, sans faire chaque fois le travail de réactivation du sens, et c'est ce qui lui permet d'avancer dans le savoir mathématique. Pour un étudiant de début de DEUG, c'est le cas le de *l'équation* $ax + by = c$ *est l'équation d'une droite dans un plan*, mais ce n'est pas le cas de *l'équation* $ax + by = c$ *est l'équation d'un plan dans l'espace*.

Quant à la mise en évidence par réactivation du sens, elle est possible par le remplissement intuitif qui s'appuie sur la sensorialité corporelle et qui met en relation ce que les étudiants ont appris en mathématiques dans le passé avec l'écriture réactivée liée à l'expérience actuelle, à condition que la réactivation de ces deux écritures permette de se situer sur le même plan, dans le registre unique des mathé-

20 Mais on peut dire aussi que c'est le rôle et l'efficacité de la formalisation et de l'algébrisation pour le mathématicien exercé de Desanti*.

matiques, c'est-à-dire qu'ils retrouvent le même objet dans l'écoulement de leur flux temporel.

**** Débat Scientifique***

Le principe du débat scientifique est de faire passer l'élève ou l'étudiant (souvent assez scientifiquement passif en cours ou en TD), de la position d'auditeur d'assertions impersonnelles et réputées vraies (les définitions, théorèmes et démonstrations du professeur) à la position d'auteur d'énoncés problématiques (les conjectures et les propositions de preuves). On part ici du principe que ces conjectures et ces propositions de preuves, l'étudiant ne peut les effectuer s'il ne cherche au préalable à se faire une opinion personnelle sur ce qui est scientifiquement raisonnable et sur ce qui ne l'est pas.

Au lieu de se sentir obligé de s'adresser au professeur de façon orthodoxe sous la forme «j'ai appris que…, j'ai lu dans un livre que… , on m'a enseigné que… et par suite, j'affirme que … mais je ne porte pas personnellement la responsabilité épistémologique de ce que j'avance», l'étudiant qui veut participer au débat scientifique organisé par le professeur est invité à prendre la parole en s'adressant directement à ses pairs de la façon quelque peu iconoclaste suivante : «Moi, je pense que telle idée est valide…, que tel raisonnement prouve ou contredit une idée soutenue par moi ou par un pair…, et voilà mes raisons…»

Dans le contrat du «débat scientifique», personne ne prétend que les conjectures transcrites au tableau par le professeur sont des théorèmes, ni que les preuves proposées sont valides. Dans un premier temps, personne ne demande au professeur de trancher sur la vérité ou la pertinence des propos; le rôle de ce dernier est de faciliter l'expression des idées et de permettre aux oppositions de se manifester avec clarté.

Au cours du débat chacun doit donc défendre ses idées avec ténacité tant qu'elles lui semblent plus raisonnables que les explications concurrentes ou contradictoires, et (contrairement au débat polémique) les abandonner, en disant pour quelles raisons, quand il a été persuadé du contraire.

Dans ce «débat d'idées et d'explications», chacun sait qu'il gagne non pas principalement si le débat lui donne raison, mais plutôt si l'explicitation des convictions des uns et des autres l'éclaire et éclaire les autres, fait avancer le groupe dans la compréhension profonde de la situation.

Dans ce débat, le professeur se porte garant de la scientificité globale du débat mais non de la vérité ou de la pertinence des arguments et résultats proposés au fur et à mesure. C'est à la fin seulement qu'il institutionnalise les résultats vrais et conformes (les définitions et théorèmes du cours), qu'il identifie les résultats faux quoique bien séduisants (les erreurs récurrentes contre lesquelles il faudra continuer à se battre), qu'il met en exergue les procédures qui ont été productrices d'idées ou qui ont permis de séparer le vrai du faux (le «métier « de scientifique).

**** Desanti***

Dans une de ses conférences [1], Jean-Toussaint Desanti s'interroge : *Que se passe-t-il lorsqu'on lit un texte mathématique ? On est obligé de refaire les opérations, soit mentalement, soit à la main, au tableau, peu importe, mais on les refait, et au fur et à mesure qu'on les refait on dispose du sens de ce que le texte indique, mais il faut refaire. Que veut dire «refaire» ? et que se passe-t-il pendant qu'on refait ? Est-ce qu'on croit sérieusement, fondamentalement, absolument, aveuglément, que ce qui est écrit là est vrai ? non! ça sera vrai lorsque je l'aurai refait, ce sera vrai lorsque ce sera compris ; tant que ça n'est pas compris, ça n'est ni vrai, ni faux, c'est simplement proposé. Alors comprendre effectivement le texte mathématique, c'est le mettre en suspens pour le refaire. Le plus souvent, si on est très exercé, on ne fait pas ça. On ne réactualise plus. On laisse les choses aller dans leur circuit naturel.*

**** Expérience***

Le mot expérience est un mot qui dans ce texte et dans notre travail a deux facettes :

1) expérience au sens de *vécu* de référence, conscientisé et thématisé pour devenir éventuellement objet de réflexion pour le sujet. L'expérience est donc le résultat d'un acte intentionnel de retour réflexif sur un vécu. Si le vécu reste au niveau préréfléchi, s'il n'est pas porté à la conscience par un travail de réfléchissement, il ne sera pas utilisable comme vécu de référence.

2) expérience au sens des sciences expérimentales, c'est-à-dire *expérience scientifique* ou expérimentation. Pour notre propos, nous pouvons reprendre la définition de Cavaillès. Pour Cavaillès, cité par Sinaceur, l'expérience est *un système de gestes, régi par une règle et soumis à des conditions indépendantes de ces gestes … C'est donc tout le contraire d'une genèse psychologique … Un geste de mathématicien s'explique par la mathématique et non par la psychologie du mathématicien … Dire que l'activité du mathématicien est une activité expérimentale, c'est dire qu'elle est conditionnée. Mais ce conditionnement est interne, c'est un autoconditionnement. Il est incarné de façon concrète dans un acquis de résultats, de méthodes et de problèmes.*

La langue anglaise distingue *to experience* et *to experiment*, l'allemand utilise aussi deux mots *Erlebnis* et *Erfahren*. Pour marquer la différence entre faire l'expérience au sens général de vivre une expérience et faire une expérience au sens d'expérimenter dans le cadre d'une recherche scientifique selon la méthode expérimentale, Pierre Vermersch (voir GREX) distingue, au prix d'un néologisme, *expérientiel* et *expérimental*, *expériencier* et *expérimenter* [11].

**** GECO***

Depuis longtemps, nous travaillons à Nice sur l'enseignement de l'algèbre élémentaire. Nous avons cherché à élaborer des cadres théoriques pour observer et interpréter les phénomènes d'enseignement que nous rencontrions dans nos classes dans le but de comprendre puis d'intervenir. Nous avons d'abord regardé l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège et en Seconde, la construction et l'évolution des connaissances chez un sujet, et nous avons apporté de l'aide individuelle au moyen d'entretiens d'explicitation ou d'entretiens Faire Faux [5].

***** GREX**

Ce Groupe de Recherche sur l'EXplicitation tient un séminaire où se mène une recherche issue d'un travail croisé entre explicitation et phénoménologie, nommée psychophénoménologie, sous la direction de Pierre Vermersch [11] [12]. Notre but est d'accéder à l'expérience subjective, c'est-à-dire de recueillir des données en première personne. Dans l'acte de connaissance, seul le sujet possède l'information pour savoir comment il a fait. Mais, si vivre une expérience* subjective est un acte spontané, expliciter, décrire et analyser cette expérience subjective est une expertise. Nous travaillons pour définir et construire cette expertise.

***** Nécessité**

La nécessité épistémique

Cavaillès écrit [10] : *Le développement des mathématiques est nécessaire, non en ce qu'il suit des lignes préétablies, prévisibles* [21]*, ou obéit à un dessein, mais en ce qu'il se déploie par construction de relations entre des résultats que leur connexion rationnelle soustrait pour ainsi dire à la contingence. L'architecture (au sens de Bourbaki) élimine le contingent … Autonomie* [22] *donc nécessité*, dit Cavaillès, ce qui veut dire que la nécessité est interne aux mathématiques. Selon Cavaillès, les mathématiques sont donc *libres* ou *autonomes*, nous dirons que les principes sont internes aux mathématiques, qu'ils font partie du savoir mathématique. La règle du jeu, c'est de suivre ces principes, c'est de travailler plus particulièrement avec le principe de non contradiction et la nécessité des énoncés. C'est ce que nous appelons la *nécessité épistémique*.

Nous parlons de *nécessité épistémique* pour décrire la qualité d'un énoncé qui est nécessairement vrai à l'intérieur du savoir mathématique socialement admis. A propos des principes, nous nous les donnons comme règle du jeu ; mais peu importe d'où ils viennent, puisqu'ils amènent tous les mathématiciens à se mettre d'accord sur les mêmes résultats à partir des mêmes prémisses, qu'ils viennent de Dieu (comme les entiers de Kronecker), de la caverne (Platon), de l'équipement interne de mon cerveau (Poincaré) ou de ma propre décision (Wittgenstein) pour résumer très succinctement des positions différentes.

21 Pour Cavaillès imprévisibilité et nécessité sont les deux caractères du travail mathématique.

22 Pour Spinoza, est libre "une chose qui est et agit par la seule nécessité de sa nature ; contrainte, celle qui est déterminée par une autre à exister et à agir".

Quelques exemples dans l'enseignement

Dans le cube mathématique, par opposition au cube matérialisé en carton ou au cube représenté sur le tableau, deux droites sont perpendiculaires (ou ne le sont pas) pour tout le monde. Nous avons organisé et observé à Nice des expériences de débat scientifique sur ce thème, en Seconde et Troisième [23].

Faire apprendre par cœur à un élève, en algèbre, en Troisième ou en Seconde, que la solution de $ax = b$, pour $a \neq 0$, est $x = b/a$ lui permet, certes, de donner la solution de cette équation, mais ne lui apprend rien sur la nature de ce savoir. Un apprentissage de ce type ramène l'énoncé "la solution de $ax = b$, pour $a \neq 0$, est $x = b/a$" à un énoncé factuel comme "le Mont-Blanc a une hauteur de 4807 m" ou « Napoléon a été battu à Waterloo en 1815 ». Il occulte une facette fondamentale de cet énoncé qui est sa nécessité au sein des mathématiques.

En algèbre, il ne suffit pas d'appliquer des règles formelles. Prenons les identités remarquables au collège. Savoir que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, c'est savoir le résultat encadré dans le cahier ou dans le livre, mais c'est aussi savoir que cette règle ne vient pas de la fantaisie d'un professeur ou de l'humeur de ceux qui font les programmes, c'est savoir d'où vient cette règle et pourquoi elle ne peut pas dire autre chose que ce qu'elle dit. Il faudra donc institutionnaliser la règle formelle, et en même temps ce qui donne sens à cette règle dans l'ensemble des mathématiques.

Nous nous servons de cette façon de regarder les énoncés mathématiques pour piloter l'enseignement.

Quelles situations pour enseigner la nécessité épistémique ?

Nous pensons qu'il est impossible d'enseigner explicitement la nécessité épistémique d'un énoncé mathématique. Quels sont donc les détours à faire ? Là autant ou plus qu'ailleurs, la maître ne peut pas désigner *a priori* le savoir à acquérir. Quelle *expérience* devons-nous proposer aux élèves pour qu'ils construisent les connaissances correspondantes et pour qu'ils se les approprient ? Pouvons-nous prévoir des situations a-didactiques [24] pour la nécessité ?

*** *Réactivation du sens*** : voir Compréhension passive

*** *Résistance :*** voir Réalité mathématique

*** *Réalité mathématique***

Dans la perspective Piagétienne, le sujet interagit avec son environnement : la réalité. Que pourrait être alors « la réalité mathématique » à laquelle est confronté un élève ? Dans notre travail, nous avons besoin de la définition d'une réalité qui puisse jouer le

23 Voir L'élève en position de chercheur - Brochure IREM de Nice (septembre 2000).

24 Une situation a-didactique est une situation d'enseignement où la connaissance visée n'est pas désignée comme telle dans l'énoncé du problème, mais qui est nécessaire pour sa résolution.

rôle du monde réel auquel est confronté un enfant quand il agit. Dans une première approche, nous utiliserons l'idée de *résistance*. Dans le monde physique, les objets, un mur par exemple, résistent ; nous rencontrons tous cette résistance de la même façon, personne ne peut passer à travers un mur sans le casser. En mathématiques, c'est la même chose. Les règles du jeu, c'est-à-dire les principes qui régissent l'activité mathématique (le principe de non-contradiction par exemple) amènent les mathématiciens à se confronter à des objets mathématiques qui résistent. Ce sont les *réalités idéales* des mathématiques.

Le quotient de 5 par 3 ne sera JAMAIS un entier.

La diagonale d'un carré n'a pas de commune mesure avec le côté de ce carré, ne peut pas être le quotient de deux entiers. Ou encore, comme l'a dit Denis Guedj aux journées de l'Association des Professeurs de Mathématiques, à Rouen, « la proposition" $\sqrt{2}$ est un irrationnel" ne sera jamais le résultat d'un sondage».

L'expérience de la nécessité* se fait dans la rencontre avec l'aspect résistant des objets mathématiques.

**** Sens et plaisir du sens***

Dans *Le plaisir du sens* [2], Bernard Charlot écrit (*L'épistémologie implicite des pratiques d'enseignement des mathématiques*) : *Faire des maths, c'est un travail de la pensée, qui construit de nouveaux concepts pour résoudre des problèmes, qui pose de nouveaux problèmes à partir des concepts ainsi construits*, etc. Pour un platonicien, *le mathématicien dévoile des vérités et l'enseignant doit tourner l'œil de l'âme de l'élève vers ces vérités. Dès lors, ce que l'enseignant retient de l'activité du mathématicien, ce n'est pas cette activité elle-même, …, ce sont les résultats de cette activité, théorèmes, démonstrations, définitions, axiomes.* Il nous semble que l'on a ici une bonne énumération de ce qui est écrit dans un ouvrage de mathématiques. Comme l'auteur de ces lignes, nous préférons choisir un mode d'enseignement qui conçoive *les mathématiques … comme une activité qui engendre ses résultats selon certaines règles, vérifiables par tous.* Cette position pourrait peut-être réconcilier certains de nos élèves avec les mathématiques.

Toujours dans *Le plaisir du sens*, dans un texte de Nicolas Rouche (*Formation des concepts et construction du savoir*) à propos des travaux du GEM (Louvain la Neuve), nous trouvons : *Franchir un seuil épistémologique en travaillant sur des problèmes, c'est faire des mathématiques assez profondément pour que, par-delà l'acquisition théorique immédiate, il reste une expérience de cette pratique. Parce qu'elle est réinvestissable dans des activités mathématiques ultérieures, éventuellement tout autre, cette expérience contribue à la capacité générale de faire des mathématiques.* Et plus loin : *Ce qui rassemble ces acquis méthodologiques, c'est qu'ils se situent au-delà de la théorie particulière visée par une suite de problèmes. Ils sont ce qu'il y a de plus important dans la formation mathématique. Bien entendu, les élèves ne les perçoi-*

vent pas habituellement du premier coup, ni de façon claire. Il faut les aider à en prendre conscience, à les expliciter.

Dans le même ouvrage, Rudolf Bkouche (*Axiomatique, formalisme, théorie*) écrit : *Algébrisation et formalisation apparaissent ainsi comme l'élimination du sens, l'élimination du contenu au profit exclusif de la forme … Mais cette élimination du sens n'a de sens que parce qu'elle intervient comme méthode (et c'est parce qu'elle intervient comme méthode qu'elle devient plus que méthode, qu'elle fonde un philosophie, voire une idéologie) … Cette prise en compte de la signification de l'élimination du sens est essentielle si l'on veut comprendre la place de l'algébrisation et de la formalisation dans l'activité mathématique (et plus généralement scientifique), en particulier en ce qui concerne l'enseignement…. La science … est organisation de connaissances et … elle doit définir les principes de cette organisation.*

Donc, à partir de notre réflexion personnelle de didacticiens, à partir de lectures de textes sur la philosophie et l'épistémologie des mathématiques, et à partir de notre expérience de professeurs de terrain, nous sommes amenés à dire que, lorsqu'on enseigne des mathématiques, on n'enseigne pas seulement le texte des mathématiques, on enseigne autre chose. Nous proposons une utilisation didactique de l'une des facettes de cet *autre chose* : la nécessité*.

Ceci est une évidence pour les mathématiciens. Pour nous, ce qui est important, c'est que les élèves le sachent aussi, et nous nous proposons de ramener explicitement ce travail au sein de l'institution scolaire.