
QUELQUES PROBLEMES POUR DONNER DU SENS A DES REGLES DE CALCUL LITTERAL DE TROISIEME

Francine ROUGER-MOINIER
Irem de Poitiers

1.— Introduction

L'histoire du calcul montre l'importance capitale qu'a eue l'invention du calcul littéral par Viète sur le développement des mathématiques. La modélisation des problèmes à l'aide de lettres a permis l'explicitation de lois, de théorèmes, de propriétés dans le langage de l'algèbre littérale. Il ne faudrait pourtant pas oublier que l'utilisation des lettres est née de la nécessité, pour résoudre certains problèmes, de créer des outils adaptés à leur résolution. Le calcul littéral n'existe pas pour lui-même, même s'il possède des règles de fonctionnement qui lui sont propres. Il est un moyen performant pour traduire, traiter et trouver des solutions à des problèmes. Les commentaires des programmes vont d'ailleurs dans ce sens :

" Comme il est indiqué dans le document d'accompagnement du cycle central, l'acqui-

sition de techniques de calcul faisant appel à des lettres est un des points délicats de l'enseignement des mathématiques. Les apprentissages, très progressifs et en continuité avec ceux développés dans les classes antérieures, s'appuient sur la résolution de nombreux problèmes, laquelle nécessite l'emploi de lettres pour désigner des indéterminées, des inconnues ou des variables. "(Document d'accompagnement des programmes de troisième)

Il semble donc important, dans les travaux proposés aux élèves, de ne pas oublier que c'est la recherche de solution(s) pour un problème donné qui fonde l'utilisation du calcul littéral et non pas l'inverse : les règles seront d'autant mieux comprises et mémorisées qu'elles seront associées à des situations dans lesquelles leur emploi permet de résoudre le problème posé.

**QUELQUES PROBLEMES
POUR DONNER DU SENS...**

Historiquement, ces situations sont majoritairement géométriques. Il convient, par conséquent de ne pas se cantonner à la résolution de problèmes numériques et de diversifier les champs d'utilisation de l'algèbre littérale. Les domaines numérique, géométrique et graphique sont des supports permettant de proposer des situations dans lesquelles le calcul littéral permet de prouver (démonstrations de propriétés), de résoudre (équations) ou de représenter (fonctions). Les lettres ont des statuts différents suivant les situations proposées, mais, si l'on s'en tient à la formulation du document d'accompagnement des programmes, on utilise plutôt des indéterminées dans les démonstrations de propriétés, des inconnues dans la résolution des équations et des variables dans les relations fonctionnelles.

Les problèmes qui suivent ont été choisis en fonction de deux objectifs :

- travailler sur le rôle et le sens du calcul littéral,
- utiliser les nouvelles connaissances de la classe de troisième, et plus particulièrement les systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues et les identités remarquables, dans le but d'en faire des connaissances actives.

Il ne s'agit en aucun cas de problèmes destinés à l'évaluation des élèves. D'une manière générale, ils sont présentés sous une forme concise : le but est avant tout de susciter la recherche. Chaque énoncé peut, bien entendu, être modifié pour le rendre plus accessible. Mais, s'il est certain que des élèves en difficulté ont besoin d'être guidés dans leur recherche, il est vrai également que pour d'autres, la présence trop systématique de questions intermédiaires détaillées peut être un handicap dans la mesure où cela risque de

les éloigner de la représentation globale du problème. Il est clair que d'autres exercices, plus immédiatement abordables, doivent également être proposés. Il s'agit simplement ici de présenter quelques situations, certes complexes, mais dont l'intérêt est de faire prendre conscience de la nécessité des nouvelles règles de calcul littéral travaillées en 3ème.

Ces problèmes, en particulier ceux de la partie " démonstrations de propriétés ", présentent des difficultés qui n'échapperont pas au lecteur et, par conséquent, le contrat entre l'enseignant et la classe doit être le plus clair possible. Il ne saurait être question de proposer ce type de travail aux élèves sans explicitations détaillées des objectifs, c'est-à-dire de ce que l'enseignant attend d'eux ; la notion de recherche individuelle est ici fondamentale, mais il est également nécessaire de ménager des moments plus collectifs d'échanges et de débats, moments qui permettront de réconforter, d'encourager, de fournir une aide appropriée, de pointer des techniques et des méthodes. Cela ne peut s'envisager qu'en y consacrant du temps, mais, pour qu'il y ait véritablement appropriation des connaissances, on ne peut pas faire l'économie de ce temps-là. Ce qui souvent rebute les élèves, n'est pas tant la difficulté intrinsèque d'un exercice que le sentiment d'être étranger au monde dans lequel on veut le faire entrer. Dans la mesure où la seule exigence assignée pour la recherche individuelle est d'avancer le plus loin possible vers la résolution du problème, les difficultés peuvent devenir pour certains élèves des défis à relever. Pour les autres, les moments de travail en commun (par groupes ou classe entière) sont une occasion de les sensibiliser, voire de les convaincre par l'exemple que la connaissance de certaines techniques de calcul est indispensable pour se tirer d'affaire dans certaines situations.

Ces problèmes, enfin, qui ne sont surtout pas destinés, au collège, à être utilisés pour sanctionner des connaissances en cours d'acquisition, constituent au contraire l'un des éléments de ce processus d'acquisition dans la mesure où ils donnent du sens et justifient un travail plus systématique sur les règles de calcul.

2.— Des problèmes

2-1 Les démonstrations de propriétés

Apprendre à démontrer est l'un des objectifs du collège. A côté de la démonstration de type déductif privilégiée en géométrie, on a la possibilité, à partir de la classe de cinquième, de faire démontrer des formules (périmètres, aires, volumes) ou des propriétés (arithmétiques, algébriques ou géométriques) à partir de calculs.

Le calcul littéral permet de généraliser des observations faites sur quelques exemples : on retrouve là l'une des spécificités de l'utilisation des lettres. Quelles que soient les valeurs données aux lettres choisies, la proposition traduite par une égalité, dans le cadre de la situation étudiée, est vraie : il s'agit alors d'une identité. Il est important qu'en troisième l'élève réalise que l'un des membres d'une identité peut, dans n'importe quelle circonstance, être remplacé par l'autre, même si la forme de l'expression est différente. C'est alors que la comparaison des formes (somme, produit, puissances, etc ...) pourra prendre tout son sens. On ne transforme pas une écriture pour le plaisir de la transformer, on la transforme pour faire apparaître des propriétés, on choisit la forme qui va correspondre à ce que

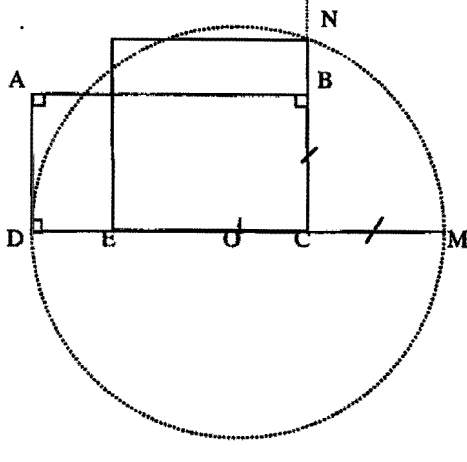
l'on souhaite prouver. Si, par exemple, on veut prouver que la somme de deux nombres pairs est paire, on doit d'abord traduire l'information " nombre pair ", puis l'information " somme ", et enfin transformer l'expression obtenue pour faire apparaître le facteur deux : $2x + 2y = 2(x + y)$. La nécessité de factoriser est ici entièrement liée au problème posé.

Dans le domaine géométrique

1— D'après Marolois - 1617

ABCD est un rectangle dont la longueur est a et la largeur b .

Sur la demi-droite [DC) on place M de telle façon que $CM = b$, puis on trace le cercle de diamètre [DM] qui coupe la demi-droite [CB) en N. Le segment [NC) est le côté d'un carré. Démontrer que ce carré a la même aire que le rectangle ABCD.



La justification de cette construction, qui peut au préalable être proposée pour des valeurs données de a et de b (par exemple 7cm et 3cm), suppose une bonne analyse de la

**QUELQUES PROBLEMES
POUR DONNER DU SENS...**

figure. Cette analyse peut faire l'objet d'un travail de groupes dont la consigne pourrait être : " repérer sur la figure toutes les longueurs et toutes les informations que l'on peut immédiatement déduire des données de l'énoncé ".

Cette première phase de travail, validée au cours d'une mise en commun, conduit à :

$$DM = a + b \quad OM = \frac{a+b}{2} \quad OC = \frac{a+b}{2} - b$$

et (OC) perpendiculaire à (CN).

La deuxième étape, au cours de laquelle le rôle du professeur sera plus ou moins important suivant les propositions des élèves, consiste à recentrer le travail sur le problème posé, en particulier sur la recherche de l'aire du carré.

Il est probable que le tracé du segment [ON], qui fait apparaître le triangle rectangle OCN, devra être suggéré, ainsi que la transformation des écritures littérales précédentes pour se ramener à des formes identifiables :

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad \left(\frac{a-b}{2}\right)^2.$$

Outre les transformations successives des écritures littérales, l'un des intérêts du problème est de mettre en évidence une représentation géométrique d'un nombre irrationnel. On peut ainsi prolonger l'activité en s'intéressant au triangle rectangle DNM pour faire établir la relation $NC^2 = CD \times CM$.

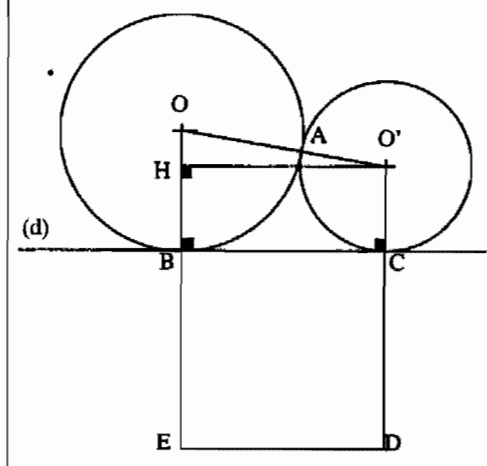
On débouche alors sur une autre méthode pour représenter géométriquement un

nombre irrationnel : représenter $\sqrt{7}$, par exemple, se ramène à construire $DC=7$, $CM=1$, puis la hauteur NC du triangle rectangle DNM.

2 — Les deux cercles ci-dessous ont pour rayons R et r ($R > r$). Ils sont tangents extérieurement en A . La droite (d) est une tangente commune aux deux cercles.

En utilisant les points B et C , on a tracé le carré $BCDE$.

Prouver que l'aire de ce carré est égale à quatre fois le produit des rayons.



Dans le problème n°2, les connaissances algébriques mises en jeu sont globalement les mêmes.

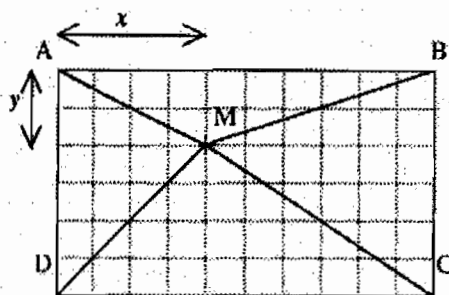
Même si aucune connaissance concernant les cercles tangents n'est au programme, ce problème amène les élèves à se poser des questions concernant les distances, questions qui peuvent être traitées à l'aide de l'inégalité triangulaire. Cette première partie peut faire l'objet d'une recherche préalable dans le domaine géométrique, l'objectif étant d'exprimer HO' en fonction de R et r . On peut, bien sûr, faire précéder cette recherche d'une étude sur des cas particuliers avec des valeurs numériques pour R et r .

3 — D'après Ozanam - 1691

A l'intérieur d'un rectangle ABCD de 10cm sur 6cm, on place un point M.

a) Comment faut-il placer le point M pour que $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$?

b) Cette propriété est-elle vraie quelles que soient les dimensions du rectangle ?



La présence du quadrillage est destinée à faciliter l'identification de triangles rectangles permettant d'exprimer :

$$MA^2, MB^2, MC^2 \text{ et } MD^2 .$$

Le développement des expressions littérales obtenues découle ici de la nécessité de les comparer. Ces développements très répétitifs constituent également un bon entraînement technique, dans une situation où les formes sont additives, ce qui évite d'avoir en plus les difficultés liées aux règles des signes.

La dernière partie, plus difficile parce qu'entièrement littérale, permet de généraliser une propriété qui, a priori, n'a rien d'évident.

On pourrait faire précéder ce travail d'une recherche entièrement numérique, en procédant à des essais pour des valeurs de x et de y choisies par les élèves dans le rectangle

de départ. Dans ce cas, en comparant les différents résultats obtenus, une conjecture devrait émerger, conjecture qui pourrait être ensuite démontrée.

Dans le domaine numérique

4 — Vérifier les égalités suivantes :

$$3 \times 4 \times 5 + 4 = 4^3$$

$$8 \times 9 \times 10 + 9 = 9^3$$

$$19 \times 20 \times 21 + 20 = 20^3$$

a) Ecrire deux autres égalités construites sur le même modèle.

b) Si on appelle n le deuxième facteur du produit, écrire en fonction de n l'égalité qui semble lier ces nombres. Démontrer que cette égalité est vraie pour tout nombre n entier.

Il s'agit de découvrir une égalité exprimant une propriété dans l'ensemble des entiers naturels à partir de l'étude d'exemples.

Généralement, les élèves ont beaucoup de mal à comprendre l'intérêt de formulations différentes pour exprimer des nombres connus ou inconnus. Les identités remarquables, qui constituent pourtant une connaissance exigible en 3ème, sont très mal utilisées, et ceci d'autant plus que, dans le cadre des programmes, les occasions de les "faire vivre" sont rares. Dans le meilleur des cas, les élèves apprennent par cœur une "ritournelle", parce qu'elle fait partie de leur cours, mais ils sont incapables de l'utiliser, faute d'en saisir l'enjeu, mais surtout parce que l'identification des principaux éléments intervenant dans l'identité est difficile, principalement dans le sens

**QUELQUES PROBLEMES
POUR DONNER DU SENS...**

de la factorisation, même lorsque les nombres sont entiers.

L'objectif de cette activité est double :

— montrer qu'il y a d'autres identités que celles du cours existant, que l'on peut en construire, mais que celles qui doivent être retenues, sont choisies en raison de la fréquence de leur utilisation dans la résolution de problèmes.

— entraîner à observer et identifier les nombres en jeu pour traduire de façon opérationnelle les relations entre ces nombres ; comprendre que chaque entier a un suivant et un précédent et être capable d'écrire une formulation mathématique générale de cette propriété .

Il est certain que l'identité $n(n-1)(n+1)+n = n^3$ sera dans un premier temps appréhendée uniquement de "gauche à droite". Pour donner au signe "=" le statut de symbole reliant deux écritures différentes d'un même nombre, et donc pour montrer qu'une identité fonctionne aussi de "droite à gauche", on pourrait, par exemple, demander de calculer le plus rapidement possible et sans calculatrice $6^3 [6 \times 5 \times 7 + 6]$ puis $9^3 [9 \times 8 \times 10 + 9]$.

2-2 Les équations

La résolution des équations permet, en quatrième puis en troisième, de mettre en œuvre, de manière très active, les propriétés fondamentales du calcul littéral en plus des règles concernant plus directement la conservation des égalités.

Mettre en équation, c'est-à-dire traduire les informations données dans le langage de

l'algèbre littérale, puis résoudre, c'est-à-dire utiliser des techniques propres au calcul littéral, ne sont que deux étapes du travail. Il est fréquent que les élèves s'arrêtent après ces deux étapes, il est donc important de proposer des situations dans lesquelles le calcul est clairement utilisé comme un outil performant et non pas comme une fin en soi. De plus, il faut l'amener à comprendre que la mise en équation est une modélisation du problème, que les solutions obtenues sont les nombres "candidats" pour résoudre le problème, mais que, pour qu'ils puissent être retenus, ils doivent, en plus, être en cohérence avec la situation proposée.

1 — Construire, en vraie grandeur, en prenant pour unité le cm, la figure représentée ci-dessous, sachant que les droites (MN) et (BC) sont parallèles, que AN = 1 , AM = 3 , BC = 5 , et que le périmètre du triangle ABC est 17.

Tenter de construire la figure, comme y incite le texte, amène rapidement les élèves à prendre conscience qu'il leur manque des données pour cela, données qu'il va donc falloir calculer. Le choix des inconnues n'est pas

guidé par l'énoncé : c'est la nécessité de la construction qui l'impose. Ce choix peut conduire à des calculs plus ou moins complexes suivant que l'élève désigne AC et AB ou NC et MB comme inconnues.

Il sera sans doute judicieux de faire comparer les différents systèmes proposés par les élèves afin d'attirer leur attention sur les conséquences des choix effectués :

Pour $AC = x$ et $AB = y$, on obtient :

$$\begin{cases} x+y+5=17 \\ \frac{1}{x} = \frac{3}{y} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x+y+5=17 \\ \frac{x}{1} = \frac{y}{3} \end{cases}$$

et pour $NC = x$ et $MB = y$:

$$\begin{cases} 1+x+5+y+3=17 \\ \frac{1}{1+x} = \frac{3}{3+y} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 1+x+5+y+3=17 \\ \frac{1+x}{1} = \frac{3+y}{3} \end{cases}$$

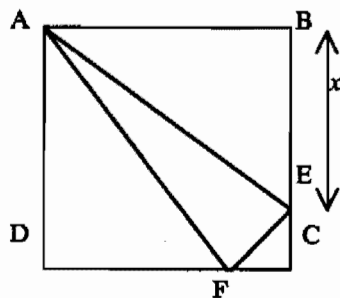
Apprendre à anticiper ou du moins à envisager plusieurs éventualités avant de se lancer dans des calculs est également l'un des objectifs visés dans ce travail.

On obtient $AC = 3$ et $AB = 9$, ce dont beaucoup d'élèves se satisferaient probablement s'il s'agissait simplement de calculer les deux longueurs des côtés. Or la construction s'avère impossible, ce qui permet de mettre en évidence l'importance de la confrontation entre les résultats des calculs et les conditions propres à la situation.

2 — ABCD est un carré de côté 10 cm, et le point F est placé sur le segment [CD] de telle façon que $FC = 2,5$ cm.

a) Peut-on dessiner un triangle rectangle ayant pour côté [AF] et dont le troisième sommet soit sur [BC] ? .../...

b) Calculer la valeur de BE correspondant à chaque situation.



Une recherche géométrique préliminaire permet de montrer l'existence probable de deux triangles rectangles : l'un rectangle en F et l'autre rectangle en E. Dans le premier cas, l'équation obtenue après le calcul de

$$AF^2, EF^2 \text{ et } AE^2$$

est : $100 + 56,25 + 6,25 + (10 - x)^2 = 100 + x^2$,
 et après réduction, $162,5 = 20x$.

Dans le deuxième cas, l'équation obtenue est du second degré : $2x^2 - 20x + 50 = 0$. Bien entendu, la résolution de cette équation ne figure pas parmi les compétences exigibles en 3ème, mais les objectifs de formation ne se limitent pas aux objectifs d'évaluation. Il ne s'agit évidemment pas d'entraîner les élèves à résoudre des équations de ce type, mais seulement de montrer qu'elles sont l'un des outils nécessaires à la résolution de problèmes. De plus, dans ce cas, la transformation d'écriture, dans le sens d'une factorisation, est une obligation, étant donné qu'à ce stade on ne dispose pas d'autres techniques. On peut donc ainsi amener les élèves à comprendre que la factorisation est indispensable dans certaines situations. Il est sans doute préférable de conduire cette transformation collectivement afin de

**QUELQUES PROBLEMES
POUR DONNER DU SENS...**

ne pas décourager les élèves en difficulté. Il s'agit essentiellement de montrer un exemple illustrant l'un des rôles principaux des factorisations, non pas d'un entraînement à la résolution des équations du second degré.

3 — Hatier 3^{ème} (collection Pythagore)

Grand chambardement au camp de Babaorhum : César vient inspecter les troupes. Le centurion veut faire ranger ses légionnaires au carré mais 25 hommes sont en trop ! Il décide donc d'augmenter le côté du carré d'un homme, mais alors il lui en manque 6 ...

Quel est le nombre de légionnaires ?

Dans cet exercice de forme ludique, le choix de l'inconnue est primordial. Le plus souvent, les élèves choisissent le nombre correspondant à la question posée, ce qui les conduit ici dans une impasse. La modélisation passe aussi par l'illustration : les schémas font rarement partie de la batterie d'outils des élèves, et c'est à nous de les inciter à utiliser des représentations sous toutes les formes possibles.

L'équation $x^2 + 25 = (x+1)^2 - 6$ permet de trouver une valeur de x [15] qui n'est pas la réponse à la question posée. C'est donc une occasion de rappeler la place et le rôle du calcul dans la résolution d'un problème.

4 — Quel nombre faut-il retrancher au numérateur et au dénominateur d'un quotient $\frac{a}{b}$ (a et b non nuls), pour obtenir son

inverse $\frac{b}{a}$? ... / ...

- a) Dans le cas où $a = 5$ et $b = 3$.
b) Dans le cas où $a = 3$ et $b = -2$.
c) Dans le cas où $a = -4$ et $b = 7$.
d) Dans le cas général.

L'observation de trois cas particuliers devrait permettre de conjecturer la forme générale du nombre cherché $(a+b)$. L'étude du cas général, à partir du moment où l'unicité de la réponse est induite par l'énoncé, peut être conduite de deux manières différentes :

1) par vérification de la conjecture :

$$\frac{a - (a+b)}{b - (a+b)} = \frac{b}{a}$$

2) par résolution de l'équation $\frac{a-x}{b-x} = \frac{b}{a}$, qui passe par des factorisations obligatoires, la première pour obtenir la forme $Ax = B$, la deuxième pour simplifier la solution obtenue $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$

Ces calculs mettent en œuvre des règles rarement utilisées dans les problèmes :

$$a - (a - b) = a - a + b \quad \text{et} \quad \frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}$$

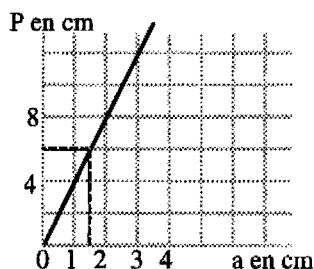
De plus, les deux factorisations sont de nature différente : l'une se fait à partir d'un facteur commun et l'autre en utilisant une identité remarquable. Même si les factorisations découlant de la distributivité sont étudiées depuis la classe de cinquième, il est clair qu'elles sont très mal maîtrisées par les élèves dans le calcul littéral. Si globalement $3x + 2x$ est bien transformé en $5x$, qu'en est-il de $3x + x$, et à plus forte raison de $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x$? Il est souhaitable de retravailler souvent ces différents aspects afin que ces transformations puissent devenir des automatismes.

2-3 Les fonctions

La notion de fonction peut être abordée dès la sixième, en particulier à partir d'exercices sur les périmètres, les aires et même les volumes.

La plupart de ces problèmes font intervenir également des équations. Ils permettent d'amener les élèves, à partir des différentes situations proposées, à prendre conscience que les lettres qu'ils utilisent n'ont pas toujours le même rôle : la distinction entre variable dans une fonction et solution dans une équation peut ainsi prendre corps.

Le registre graphique permet de traduire visuellement cette distinction. Par exemple, le périmètre d'un carré de côté a s'écrit $P = 4a$ en fonction de a ,



- la droite tracée représente le lien qui unit a et P ,
- la lecture graphique permet de trouver la valeur de a pour laquelle le périmètre est 6 cm, c'est-à-dire la solution de l'équation $4 \times a = 6$.

La construction de courbes à partir d'une relation littérale entre des nombres est une activité importante pour la résolution de nombreux problèmes. De plus, elle permet de sai-

sir progressivement la notion de fonction. Les problèmes de recherche d'ensembles de points et de constructions ont d'ailleurs été à l'origine du développement du calcul littéral : les travaux de Descartes et de Viète peuvent en témoigner.

En 3ème, les seules fonctions exigibles sont les fonctions linéaires et affines : les formes algébriques et graphiques de ces deux fonctions doivent pouvoir être identifiées par les élèves. Elles le seront d'autant mieux que des exemples de relations différentes seront présentées : les caractéristiques d'une fonction particulière ne peuvent véritablement être comprises que par comparaison avec des fonctions qui ne possèdent pas ces caractéristiques. D'une manière générale, être capable de reconnaître un objet (mathématique ou non), c'est également être capable de percevoir ce qui le distingue d'un autre objet. B.M. Barth, commentant Bruner s'exprime ainsi :

“ Apprendre serait donc d'abord la capacité de discerner des attributs, de sélectionner ce qu'on retient. Un attribut est ce qui permet de distinguer une idée d'une autre idée, un objet d'un autre objet. ” Elle ajoute encore : *“ Le choix, le nombre et l'agencement des exemples et des contre-exemples, jouent donc sur le processus de l'abstraction. Les contre-exemples ne sont pas moins importants, même si l'apprenant a naturellement tendance à les éviter. Sachant cela et sachant que les exemples négatifs apportent beaucoup d'information indirecte, il importe d'autant plus d'inciter l'apprenant à les utiliser en lui montrant comment et en lui expliquant pourquoi. ”*

Ainsi, l'élève aura beaucoup plus de chances d'appréhender “ les attributs ” d'une fonction affine (ou linéaire) qu'il aura été

**QUELQUES PROBLEMES
POUR DONNER DU SENS...**

confronté à des fonctions qui ne sont pas affines (ou linéaires).

1 — Toutes les longueurs sont exprimées en cm.

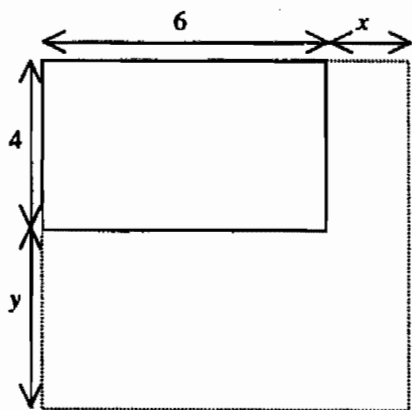
On souhaite tripler l'aire d'un rectangle de 6 sur 4 en ajoutant x à sa longueur et y à sa largeur comme l'indique le dessin.

a) Écrire l'égalité exprimant la condition indiquée.

b) Calculer la valeur de y pour toutes les valeurs entières de x de 2 à 7.

c) Représenter graphiquement la relation qui lie y à x .

d) Existe-il une valeur de x pour laquelle x et y sont égaux ?

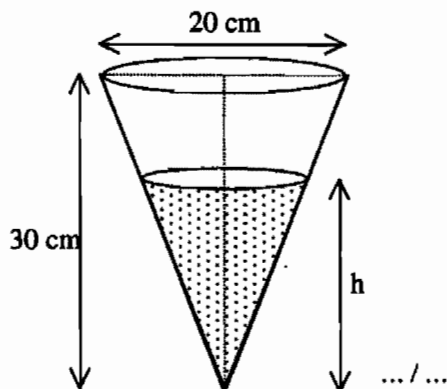


L'égalité exprimant la condition indiquée peut être écrite, soit à l'aide d'un calcul utilisant la double distributivité, soit à partir du dessin, par découpage en quatre rectangles. Ce peut être là une occasion supplémentaire d'illustrer géométriquement, dans un cas simple, une règle de calcul.

La relation entre les nombres sous la forme $4x + 6y + xy = 48$ n'est pas la plus pratique pour calculer des valeurs de y en fonction de celles de x . Ces calculs étant répétitifs, la recherche d'un programme de calcul plus performant pour trouver y se justifie pleinement. La transformation d'écriture est alors motivée, et la forme cherchée est dictée par la question et non pas imposée a priori.

Le problème de la continuité (faut-il relier les points et comment ?) ainsi que celui des valeurs extrêmes peut être abordé de manière graphique ou par l'étude du tableau de valeurs. La recherche d'une valeur éventuelle pour laquelle $x = y$ ne peut être traitée que graphiquement, ce qui donne un sens à la représentation graphique. On peut facilement montrer par le calcul que la valeur apparente (3,5) n'est qu'une valeur approchée et éventuellement, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableau, chercher une approximation plus fine de ce nombre.

2 — Un récipient de forme conique est utilisé pour récupérer de l'eau de pluie. Sa base est horizontale.



- a) Calculer le rayon R de la surface horizontale de l'eau en fonction de h .
- b) Calculer le volume d'eau dans le récipient en fonction de h .
- c) Calculer le volume d'eau pour : $h = 3$, $h = 6$, $h = 10$, $h = 15$ et $h = 20$.
- d) S'il est tombé 400 cm^3 , la hauteur d'eau dépasse-t-elle la moitié de la hauteur totale ?
- e) Peut-on trouver la hauteur d'eau pour un volume de 75 cm^3 ?

La première partie du problème n'appelle aucune remarque particulière. Les trois premières questions sont traitées par des calculs. En revanche, la représentation graphique, non explicitement demandée, peut ici intervenir comme un bon outil pour répondre à la question d), même si des calculs peuvent être envisagés pour compléter le tableau de valeurs par exemple. Comme dans le problème précédent, la réponse à la dernière question peut être affinée à l'aide de la calculatrice ou du tableur, par essais successifs. Ce peut être aussi une occasion pour aborder le problème de la construction de jauges (cf. brochure APMEP Maths 2000, pôle 9c).

3.— Conclusion

En dernière année de collège, souvent les écarts entre les élèves se sont creusés, tout particulièrement en ce qui concerne les compétences en calcul littéral. Les difficultés nouvelles viennent s'ajouter à celles qui résultent de connaissances antérieures mal assimilées, ce qui provoque un déséquilibre tel que pour certains on peut constater une forme de régression dans les savoir-faire. Dans ces conditions, le premier réflexe est souvent de centrer le travail sur des techniques, en multipliant les exercices d'entraînement hors situation. C'est oublier que ces techniques n'ont de sens que mises au service de la résolution de problèmes. Combien de fois peut-on entendre des enseignants se lamenter sur l'incapacité des élèves à réinvestir des règles que souvent ils connaissent ?

S'il est certain, qu'à terme, l'un des objectifs visés doit bien être l'acquisition de certains automatismes, il s'agit là d'un aboutissement et non pas d'un préalable dans l'activité mathématique. Sans minimiser l'importance d'une forme d'entraînement technique, il semble important de proposer des activités pour mettre en évidence la nécessité de ces calculs, ce qui rendra alors l'entraînement beaucoup plus productif parce que motivé.

Bibliographie

- IREM de Poitiers - Groupe premier cycle - *Le calcul littéral au collège* - Janvier 1999
- CRITON M. - *San gaku les problèmes japonais* - Tangente Hors série N° 8
- ROTHMAN T. - HIDETOSHI F. - *Géométrie et religion au Japon* - Pour la science N° 245 - Juillet 1998
- OZANAM - *Algèbre, in Dictionnaire Mathématique, Paris 1691* - Réédition IREM de Paris 7 - Mai 1982
- BARTH B.M. - *L'apprentissage de l'abstraction* - Edition Retz - 1987