SUR LA GEOMETRIE ELEMENTAIRE DU TRIANGLE DANS LE PLAN COMPLEXE

Joseph Ehrenfried HOFMANN
Ichenhausen

traduction de Lisiane NIVELLE

Sur proposition de Jacques BOROWCZYK, maître de conférences de mathématiques à l'IUFM d'Orléans-Tours, L'OUVERT[1] a publié dans son numéro 98 de mars 2000, la traduction française d'un article paru en 1958 dans la revue internationale *L'enseignement Mathématique* tome IV pp. 178-211, sous le titre *Zur elementaren Dreiecksgeometrie in der komplexen Ebene*.

L'article décrit une pratique de la géométrie dans le plan complexe qui, si elle est bien connue sur le plan de ses principes théoriques, est rarement poussée aussi loin dans ses applications.

REPERES reprend ici une partie de cet article. Les lecteurs pourront se faire une idée précise des méthodes utilisées et se reporter à L'OUVERT pour d'éventuels compléments.

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE a célébré récemment son centième anniversaire : le premier numéro a été publié en 1899 sous la direction ou le patronage de mathématiciens tels que FEHR, LAISANT (directeurs), POINCARÉ, PICARD, etc.

L'auteur de l'article, J. E. HOFMANN (1900-1973) n'est pas un inconnu pour les historiens des mathématiques. Son article présente d'ailleurs cette originalité que tous les théorèmes étudiés sont annotés par des références historiques précises et multiples, renvoyant les théorèmes classiques de la géométrie du triangle à leurs véritables auteurs.

Joseph Ehrenfried HOFMANN est surtout connu pour ses travaux sur l'invention et le développement du calcul infinitésimal,

1 Journal de l'APMEP et de l'IREM de Strasbourg (e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr).

particulièrement dans l'étude des travaux de LEIBNIZ et BERNOULLI. Les deux textes : *Die Entwicklungsgeschichte der leibnizschen Mathematik während des Aufenthaltes in Paris (1672-1676)* et *Leibniz in Paris* sont bien connus.

La présente traduction a été assurée par Lisiane NIVELLE, dans le cadre du module M19 de professionnalisation de la maîtrise de mathématiques (mention Ingénierie mathématique) de l'université de Tours. La traduction a été revue par Mme Colette BLOCH (Irem de Poitiers), nous la remercions vivement.

Les figures ont été reprises par Bruno BERNARDOFF, dont le lecteur appréciera la performance technique.

Nous remercions L'OUVERT, *L'enseignement Mathématique*, Jacques BOROWCZYK et Lisiane NIVELLE pour avoir autorisé la publication de ce texte dans REPERES (*).

Note de la traductrice : *la traduction restitue le plus fidèlement possible le cheminement des idées de l'auteur ; elle conserve la notation* $\sqrt{-1}$ *employée par Jos. E. Hofmann afin de ne pas engendrer de confusions avec l'affixe –(bc+ca+ab) du centre du cercle inscrit, notée i.*

Toutefois, certaines expressions ont été notablement modifiées, car elles auraient semblé totalement absurdes dans la traduction française. D'autres au contraire, ont été traduites selon les mots même de l'auteur, quoique apparemment dénuées de signification concrète.

C'est le cas notamment du terme " cercles congruents " employé aux paragraphes (1,3) et (1,5) et particulièrement inadapté ici, mais pour lequel je n'ai pas trouvé d'autre terme plus satisfaisant. C'est également le cas par exemple des locutions " le triangle associé " et " le triangle adjoint " que j'ai imaginées, le français n'offrant pas d'équivalent correct dans le contexte aux groupes nominaux allemands correspondants " das zugeordnete Dreieck " et " das Gegendreieck ".

Quelques questions de géométrie élémentaire du triangle se traitent de façon particulièrement simple sous forme vectorielle si le centre du cercle circonscrit au triangle est employé comme point de référence. Prenons le rayon du cercle circonscrit comme unité, alors les vecteurs a, b, c désignant également les sommets du triangle sont des vecteurs unité, que nous écrivons de façon appropriée à l'aide de nombres complexes. Si on représente un point du cercle unité par le nombre complexe z, alors on note $\overline{z}$ son symétrique par rapport à l'axe réel. Les exemples qui suivent montrent comment on peut utiliser de façon simple et efficace l'interprétation vectorielle et la relation $\overline{z} = 1/z$.

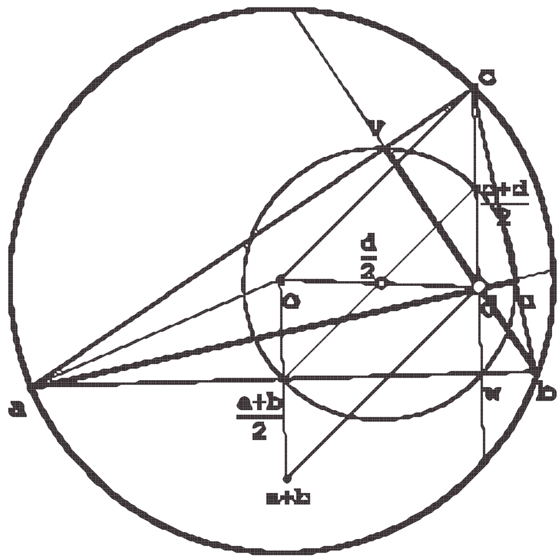


Fig. 1. Cercle circonscrit, orthocentre et cercle d'Euler.

1. Au sujet de l'orthocentre, du cercle d'Euler (*) et problèmes apparentés.

(1,1) Soient a, b, c les vecteurs désignant les sommets d'un triangle inscrit dans le cercle unité (fig. 1). Alors $(a + b)$ est le symétrique du centre O du cercle circonscrit par rapport à la corde $[ab]$; ainsi le vecteur $(a + b)$ est perpendiculaire à cette corde. Complétons à présent le parallélogramme de sommets $(a + b)$, c et O avec le point donné par le vecteur $a + b + c = d$ qui se trouve sur la diagonale issue de O du parallélogramme. Par conséquent, la droite (cd) se trouve être la hauteur du triangle issue de c coupant la droite (ab) . Puisque l'addition vectorielle est commutative et associative, d se trouve être aussi sur les hauteurs issues de a et coupant (bc) et de b coupant (ca) . Cela montre que les trois hauteurs du triangle se coupent en *un* point, à savoir l'*orthocentre* $d = a + b + c$.

Si nous faisons un instant, abstraction du cercle circonscrit, les quatre points a, b, c, d jouent exactement le même rôle : chacun d'eux est un orthocentre du triangle déterminé par les trois autres points. Nous parlons de manière appropriée de *quatre points orthogonalement liés* ou de *quadrangle orthocentrique*.

(1,2) A présent, soit $(a + b)/2$ le milieu de la corde $[ab]$ et du segment $[O, a+b]$. La droite passant par $(a + b)/2$ de vecteur directeur c rencontre $[cd]$, la section d'une hauteur, en son milieu $(c + d)/2$, et $d/2$ est le centre du parallélogramme déterminé par O , $a + b$, d et

* N.D.T. : Outre-Rhin, le cercle d'Euler est appelé cercle de Feuerbach, en hommage à FEUERBACH qui a démontré, en 1822, que ce cercle des neuf points est tangent au cercle inscrit et aux cercles exinscrits du triangle abc. Cf. A. GRAMAIN : Géométrie élémentaire – HERMANN.

c . Par suite, le cercle de rayon $1/2$ centré en $d/2$, le milieu du segment $[Od]$, passe par les milieux $(b+c)/2$, $(c+a)/2$, $(a+b)/2$ des côtés du triangle abc , par les milieux $(a+d)/2$, $(b+d)/2$, $(c+d)/2$ des “ parties supérieures des hauteurs ” (c’est-à-dire les segments d’extrémités d et respectivement a , b , c), et par les pieds des hauteurs u , v , w du triangle ; on l’appelle cercle d’EULER du triangle abc [2].

Autrement dit :

Soient les quatre points a, b, c, d *orthogonalement liés, alors les quatre triangles déterminés par trois de ces points ont le même cercle d’EULER. Celui-ci passe d’une part par les six milieux des côtés de chaque quadrilatère complet formé par ces points, d’autre part par les pieds des hauteurs des triangles.*

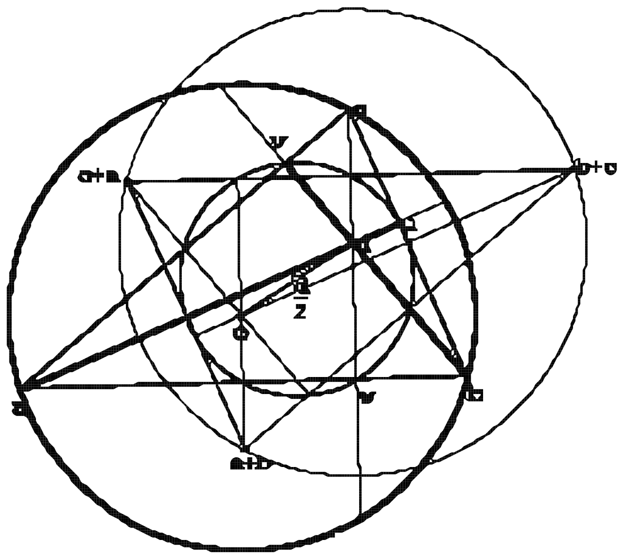


Fig. 2. Un couple de triangles coordonnés

(1,3) Ajoutons encore aux sommets a , b , c , d de la fig. 1 les points $(b+c)$, $(c+a)$, $(a+b)$ (fig. 2), alors ces points se trouvent sur le cercle unité centré en d . Ce sont les sommets d’un nouveau triangle qui est le symétrique par rapport à $d/2$ du triangle abc précédent et dont O est l’orthocentre. Ainsi, les points O, $(b+c)$, $(c+a)$, $(a+b)$ sont liés orthogonalement ; les milieux des côtés du triangle abc sont les milieux des parties supérieures des hauteurs du triangle $(b+c, c+a, a+b)$ et réciproquement. Nous avons alors huit triangles qui admettent le même cercle d’EULER passant par douze points particuliers. La droite passant par les centres O et d des deux cercles congruents est la droite d’EULER [3] des deux triangles. Les centres de gravité $d/3$ du triangle d’origine et $2d/3$ du triangle associé sont aussi situés sur cette droite.

(1,4) Si deux des cinq points O , $d/3$, $d/2$, $2d/3$ et d sont connus, alors on en déduit les

2 K. W. FEUERBACH : Eigenschaften einiger merkwürdiger Punkte des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmter Linien und Figuren. Nüremberg, 1822. Pour en savoir plus, cf. J. S. MACKAY : Proceedings Edinburgh Math. Soc. 11, 1893, pp. 19 et suivantes, et J. LANGE : Geschichte des Feuerbachschen Kreises, programme de Berlin, 1894 ; et également M. SIMON : Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jh., compte rendu annuel de la Fédération des Mathématiciens allemands, supplément I, Leipzig, 1906, pp. 124-130, et M. ZACCHARIAS dans l’Encyklopädie der math. Wiss., III AB 9, Leipzig, 1914.

3 L. EULER : Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum, novi commentarii Ac. sc. Petrop., 11 (1765), pp. 103-123 et surtout 114 ; Opera omnia, XXVI, éd. Andr. Speiser, Zürich, 1953, pp. 139-157 et surtout 149. Le traité fut présenté à l’Académie de Saint-Pétersbourg le 21 déc. 1763 en style ancien.

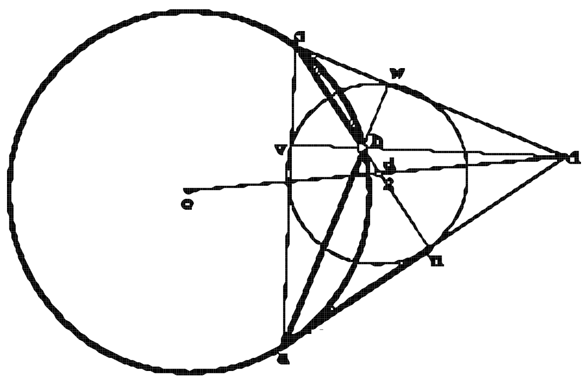


Fig. 3. Le triangle formé a un angle obtus.

autres. En outre, si nous connaissons aussi le rayon du cercle d'EULER ou d'un des deux cercles circonscrits, alors ces trois cercles nous sont connus avec leurs centres. A une réserve près, indiquée plus loin, il y a une infinité de triangles abc , qui sont inscrits dans le cercle centré en O et ont d pour orthocentre. Choisissons par exemple le sommet c sur le cercle centré en O , alors le sommet opposé $(a + b)$ est déterminé sur le cercle centré en d comme le symétrique de c par rapport à $d/2$. Les parallèles (cd) et $(O, a+b)$ rencontrent le cercle d'EULER aux sommets d'un rectangle, dont les autres côtés portent les autres sommets a , b (respectivement $(b+c)$, $(c+a)$) des triangles associés.

Si le triangle abc est *acutangle*, d se trouve *à l'intérieur* du cercle circonscrit centré en O . Si le triangle est *rectangle*, d se trouve *sur* le cercle circonscrit. Dans ce cas, le cercle d'EULER et le cercle circonscrit de centre d sont tangents, et la longueur $|Od|$ est le diamètre du cercle d'EULER. Si le triangle abc a *un angle obtus*, d se trouve *hors du* cercle centré en O , mais de sorte que le cercle d'EULER *coupe* le cercle circonscrit. La figure 3 montre comment est alors la configuration.

(1,5) Comme les triangles bcd, cad, abd et abc engendrés par les points orthogonalement liés a, b, c, d ont le même cercle d'EULER, leurs cercles circonscrits sont *congruents*. Les centres de ces cercles circonscrits sont les points associés $(b + c)$, $(c + a)$, $(a + b)$, O , qui, de leur côté, sont également orthogonalement liés et qui forment quatre triangles dont les cercles circonscrits sont congruents comme les précédents et ont pour centres les points a , b , c , d . Les huit cercles ainsi engendrés se coupent toujours à trois en chacun des points orthogonalement liés de ces deux paires de quadruplets.

L'équivalence des quatre points orthogonalement liés a , b , c , d se montre particulièrement bien avec le principe du triangle de HOLZ[4] :

Les trois vecteurs partant d'un sommet et allant vers les autres sommets peuvent toujours être joints, en ajoutant l'un de ces vecteurs au bout d'un des deux autres mais en sens inverse, pour former une ligne brisée en trois parties, inscrite dans le cercle unité et dont les extrémités sont diamétralement opposées sur ce cercle.

Si le quadruplet orthogonalement lié est déterminé à partir des longueurs des vecteurs, il en résulte une équation de degré 3

4 K. B. HOLZ : Das ebene obere Dreieck, Hagen i. W., 1944. Cf. aussi L. BIEBERBACH : Theorie der geometrischen Konstruktionen, Bâle, 1952, pp. 114-115 et 156.

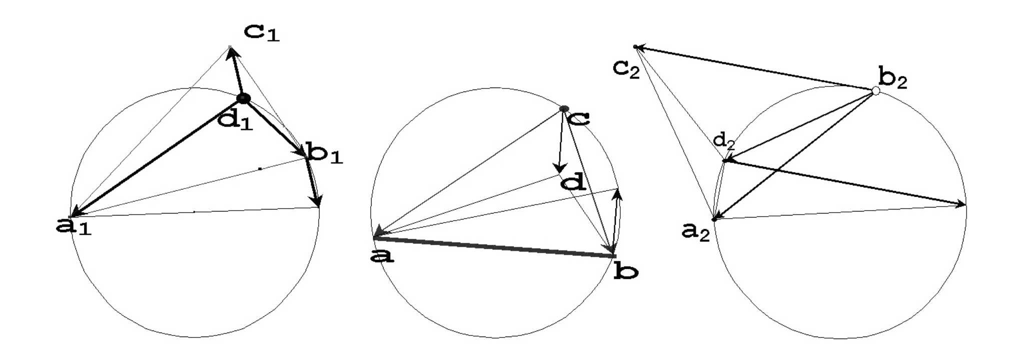


Fig. 4. Le théorème de Holz.

pour le diamètre du cercle dans lequel la ligne brisée peut être encastrée[5]. Cette équation a trois solutions réelles ; la disposition (leur ordre étant permutable) des vecteurs dans ces cercles est précisément illustrée de trois manières à la fig. 4[6].

2. De l'égalité des arcs.

(2,1) Soient (ab) et (cd) deux cordes parallèles du cercle unité (fig. 5), alors les arcs de cercle entre ces parallèles ont la même mesure.

Orientons-les dans le sens positif inverse des aiguilles d'une montre ; alors, avec les notations de la figure, on a $c/b = a/d$, donc

$$\boldsymbol{ab = cd} \, .$$

Abaissons par exemple la perpendiculaire issue de c à (ab) , elle rencontre le cercle en $-d = -ab/c$.

(2,2) Désormais, nous avons les points a, b, c sur le cercle unité (fig. 6) ; les hauteurs du triangle abc coupent le cercle, respectivement aux points $p = -bc/a$, $q = -ca/b$, $r = -ab/c$.

5 Le problème de l'encastrement est aujourd'hui cité de façon générale selon I. NEWTON : Arithmetica universalis, ch. XIII, 8è/10è conférence de 1675-76, éd. W. WHISTON, Cambridge, 1707, pp. 97-113, ainsi par ex. chez H. DÖRRIE : Mathematische Miniaturen, Breslau, 1943, p. 31. Ce n'est pourtant pas tiré de NEWTON, mais de Fr. van SCHOOTEN : De organica conicarum sectionum in plano descriptione tractatus…, cui subnexa est appendix de cubicarum aequationum resolutione, Leiden, 1646, pp. 102-108 et 111-117, réimprimé dans une forme corrigée dans R. DESCARTES : Géométrie, éd. Fr. van Schooten, I, Amsterdam, 1659, pp. 354-359 et 361-367. Ceci a sans doute servi de modèle à NEWTON qui possédait cette édition de la Géométrie.

Fixons par ex. $|bc| = u$, $|ca| = v$, $|ab| = w$, alors l'équation cubique (déjà présente chez SCHOOTEN) s'écrit

$$x^3 = (u^2 + v^2 + w^2)\, x + 2u\, v\, w.$$

6 Ces trois cas se présentent aussi chez SCHOOTEN 4 et NEWTON 4.

L'élégante résolution cinématique de BIEBERBACH 3, pp. 115-116, au moyen d'une feuille transparente et d'un compas s'avère aussi, à bien y regarder, être une variante de la résolution de SCHOOTEN. Ce travail se trouve en annexe à Fr. VIETE : Supplementum geometriae, Tours, 1593, réimprimé dans les Opera, éd. Fr. van Schooten, Leiden, 1646, à l'occasion d'une insertion en rapport avec la trisection de l'angle.

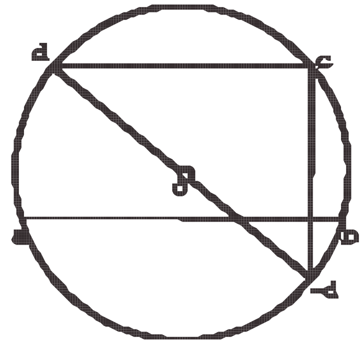


Fig. 5. Egalité des arcs.

Or on a par exemple : $c/p = -a/b = q/c$. Il en résulte que la droite (rc) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{prq}$.

Par conséquent, les hauteurs du triangle abc sont les bissectrices intérieures des angles du triangle adjoint pqr, et l'orthocentre du triangle initial est en même temps le centre du cercle inscrit du nouveau triangle [7].

En outre, soit w (cf. (1,2)) le milieu du segment $[dr]$; ainsi

$$w = \frac{1}{2}\left(a + b + c - \frac{ab}{c} \right) \text{, etc.,}$$

et

$$d - w = (ab + cd)/2c \text{ , etc.}$$

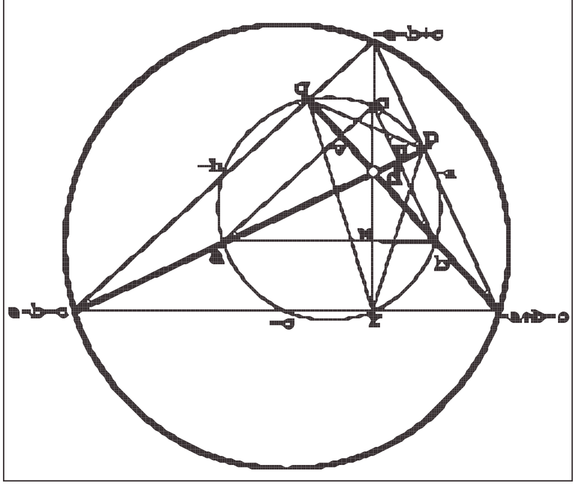
(2,3) A présent, construisons encore les points $(-a)$, $(-b)$, $(-c)$, symétriques respectifs par rapport à O des points a , b , c . Après cela, la droite $(-c,r)$ par exemple est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{prq}$. Ajoutons aussi les autres bissectrices extérieures $(-a,p)$, $(-b,q)$ du triangle pqr ; un triangle en résulte, semblable au triangle abc par l'homothétie de centre d et de rapport 2 . Maintenant, prenons par exemple le sommet $(-a-b+c)$ à la place de c ; alors, c est le milieu du segment $[-a-b+c, d]$.

Le cercle initial est le cercle d'EULER de ce triangle agrandi, dont le cercle circonscrit est de rayon 2 . Par ce moyen, nous sommes revenus d'une autre manière aux premiers résultats.

Nous pouvons aussi exprimer les résultats sans fraction en remplaçant p par p^2, q par q^2 et r par r^2. Alors nous devons aussi remplacer a par $-qr$, b par $-rp$ et c par $-pq$ et nous obtenons le centre du cercle inscrit sous la forme $-(qr + rp + pq)$, les centres des cercles exinscrits sous la forme :

$$(-qr + rp + pq) \text{ , } (qr - rp + pq) \text{ , } (qr + rp - pq) \text{ .}$$

Fig. 6. Triangle et triangle adjoint.



7 Cf. Ph. NAUDÉ dans les Miscellanea Berolinensia 5, 1737, p. 17, ou bien FEUERBACH 1 : § 24.

3. A propos du coefficient directeur et de l'équation de droite.

(3,1) Soient les points a , b sur le cercle unité ; traçons le diamètre parallèle à la corde $[ab]$, passant par le centre O du cercle, d'extrémités x et $-x$.

Ainsi, on a $-x^2 = ab$. Le produit ab est appelé le *coefficient directeur* de la corde $[ab]$. *Les cordes ayant le même coefficient directeur sont parallèles.*

Comme exemple d'application, traitons le théorème de la droite de WALLACE [8] :

Soient quatre points a , b , c , d sur le cercle unité, alors les perpendiculaires aux côtés (bc) , (ca) , (ab) du triangle abc passant par d rencontrent ces côtés respectivement aux points :

$$u = \frac{1}{2}\left(b + c + d - \frac{bc}{d} \right),$$

$$v = \frac{1}{2}\left(c + a + d - \frac{ca}{d} \right),$$

$$w = \frac{1}{2}\left(a + b + d - \frac{ab}{d} \right).$$

Nous affirmons :

> Les points u, v, w sont situés sur une seule et même droite, la droite de WALLACE du triangle abc par rapport au point d appartenant au cercle circonscrit au triangle.

Par exemple, $awvd$ est un quadrilatère inscriptible mais non inscrit dans le cercle unité. Par suite, $\widehat{dav} = \widehat{dwv}$.

8 W. WALLACE dans Th. LEYBOURNE : Mathematical repository (old series) 2, 1798, p. 111.

N.d.T. : Cette droite est plus couramment dite " de SIMSON " dans la littérature française.

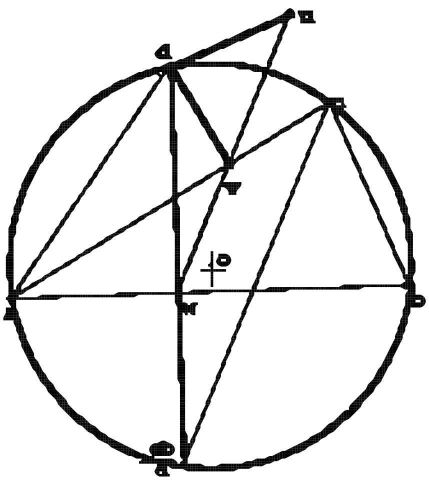


Fig. 7. La droite de Wallace.

La parallèle à (vw) passant par c coupe la droite (dw) sous le même angle. Ce point d'intersection se trouve sur le cercle unité. Étant donné que (ab) et (dw) sont perpendiculaires, le point d'intersection est représenté par $-ab/d$. Le coefficient directeur de la droite (vw) est donc $-abc/d$. Ce terme est symétrique en a , b , c . C'est pourquoi les trois droites (vw) , (wu) , (uv) ont le même coefficient directeur ; en conséquence, elles coïncident.

(3,2) Soient a , b deux points sur le pourtour du cercle unité et z un point qui n'est pas situé sur la droite (ab) (fig. 8). Ajoutons ensuite $(a+b)$ à a , O , b pour avoir un losange et plaçons s le symétrique de z par rapport à la diagonale $(O, a+b)$ du losange. Tandis que nous formons les vecteurs unité $\frac{s}{|s|}$ et $\frac{z}{|z|}$, nous obtenons les points d'intersection des vecteurs s et z (ou de leurs prolongements sur le cercle) avec le cercle unité.

Le segment joignant les extrémités de ces vecteurs unité est parallèle à la corde $[ab]$; ainsi, on a : $\dfrac{s}{|s|} \times \dfrac{z}{|z|} = ab$.

Or, on a $|s| = |z|$; par conséquent : $|s| \times |z| = z\,\bar{z}$; d'où $\boldsymbol{s = ab\,\bar{z}}$.

Maintenant, construisons le symétrique de z par rapport au point $(a+b)/2$ milieu de la corde $[ab]$, qui est $\sigma = a + b - z$, et le symétrique de s par rapport au même point, qui est $\boldsymbol{\zeta = a + b - ab\,\bar{z}}$.

Donc ζ est en même temps le symétrique de z par rapport à la corde $[ab]$. Le point z est *sur* cette corde si et seulement si $\zeta = z$. Par suite, $\boldsymbol{z + ab\,\bar{z} = a + b}$ est *l'équation de la droite* (ab) . Le membre de gauche $z + ab\,\bar{z}$ est appelé la *partie directrice* ; elle est déterminée précisément par le coefficient directeur. Le membre de droite est appelé le *terme constant*. Il est déterminé dans l'équation par la place des extrémités de la corde $[ab]$ (ou d'une manière plus générale : d'un point connu de la droite). Cela fournit — vu que nous pouvons remplacer z aussi bien par a que par b — une vérification.

(3,3) Revenons à présent sur la droite de WALLACE (3,1). La partie directrice de son équation est $z - \dfrac{abc}{d}\,\bar{z}$; on trouve le terme constant en faisant par exemple $z = u$. Nous obtenons après une transformation aisée :

$$z - \frac{abc}{d}\,\bar{z} = \frac{1}{2}\left[(a+b+c+d) - \frac{abc}{d}\,(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} + \bar{d})\right]$$

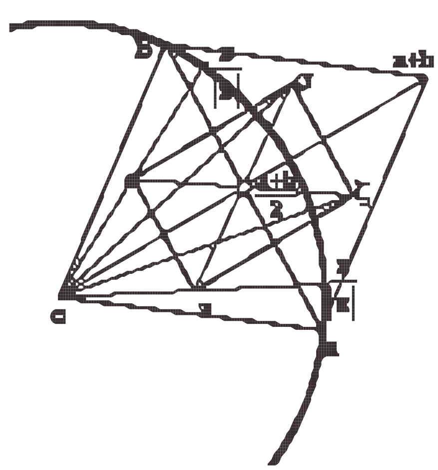


Fig. 8. Equation de droite.

Cette équation est symétrique en a , b , c ; c'est pourquoi la droite qu'elle représente passe non seulement par u , mais aussi par v et w . Naturellement, cela se vérifie aussi par le calcul.

En outre, le point $t = \dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$ se trouve sur la droite de WALLACE.

Ici, $\dfrac{1}{2}(a+b+c)$ est le centre du cercle d'EULER du triangle abc ; pour finir, on dispose le vecteur $d/2$ de longueur $1/2$ en ce point. Dès lors, t est situé sur ce cercle d'EULER, mais aussi sur le cercle d'EULER des triangles bcd , cad , abd .

Dans un quadrilatère inscrit, on considère pour chaque sommet la droite de WALLACE relative au triangle formé par les trois autres sommets ; les quatre droites ainsi engendrées *passent par un seul et même point, à savoir le point commun d'intersection des cercles d'EULER de ces quatre triangles*[9].

4. Autres exemples d'application.

(4,1) Nous affirmons :

Les parallèles respectives aux bissectrices intérieures d'un triangle passant par les milieux des côtés de celui-ci se coupent en un même point.

Comme à la fin de (2,2), désignons les sommets du triangle inscrit dans le cercle unité par p^2, q^2, r^2. Par suite, les milieux des arcs opposés aux sommets sur le cercle unité sont notés $-qr$, $-rp$, $-pq$.[10]

La bissectrice intérieure de l'angle $q^2\widehat{p^2}r^2$ passe par p^2 et $-qr$; elle a ainsi pour partie directrice $z - p^2qr\,\overline{z}$. La parallèle à cette bissectrice passant par le milieu du côté opposé $(q^2 + r^2)/2$ a pour équation :

$$z - p^2qr\,\overline{z} = \frac{1}{2}(q^2 + r^2 - p^2\frac{r}{q} - p^2\frac{q}{r}).$$

De même :

$$z - pq^2r\,\overline{z} = \frac{1}{2}(p^2 + r^2 - q^2\frac{r}{p} - q^2\frac{p}{r}).$$

En soustrayant la première équation multipliée par q de la seconde multipliée par p et en divisant par $p - q$, nous obtenons :

$$z = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2 + pq + qr + rp).$$

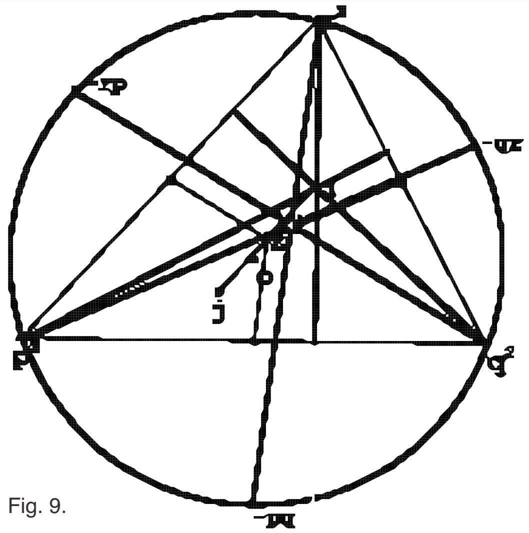


Fig. 9.

Cette expression est construite symétriquement en p, q, r ; par conséquent, z se trouve sur les trois parallèles aux bissectrices.

Construisons le symétrique du centre du cercle inscrit $i = -(qr + rp + pq)$ par rapport au centre O du cercle circonscrit, à savoir $j = -i$; alors z est placé au milieu du segment $[jd]$ où $d = (p^2 + q^2 + r^2)$ est l'orthocentre du triangle. Des relations semblables s'appliquent aussi à l'ensemble des bissectrices *extérieures*.

(4,2) Dans un traité d'ARCHIMEDE devenu accessible seulement depuis 1927 après avoir été traduit de l'arabe[11], on trouve le théorème suivant qui est équivalent au théorème d'addition des fonctions trigonométriques :

9 Problème de E. LEMOINE dans les Nouv. annal. (2) 8, 1867, p. 47.

10 Hofmann n'évoque pas l'ambiguïté de signe qui existe sur les racines carrées des nombres complexes p^2, q^2 et r^2. Il faut choisir par exemple q et r de façon que $(p^2+q^2)/(-qr)$ soit positif (ndlr).

11 C. SCHOY : Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen al-Bîrûnî..., éd. J. Ruska & H.Wieleitner, Hanovre, 1927, p. 3. Sur la portée de la prémisse d'Archimède, cf. J. TROPFKE dans Archiv f. Geschichte d. Math., d. Nat. u. d. Technik 10, 1928, pp. 430-462, en particulier pp. 433-436.

Sur le cercle unité se trouvent quatre points a , b , c , d de sorte que d est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{abc}$. Alors la perpendiculaire issue de d à la plus longue des cordes $[ab]$ et $[ac]$ partage en deux parties égales la somme $|ab|+|bc|$ des longueurs de ces cordes (fig.10).

Supposons qu'on ait $|ab| > |bc|$. Comme d coupe l'arc $\overset{\frown}{abc}$ en deux parties égales, on a : $c = d^2/a)$. Prolongeons la corde $[ab]$ au-delà de b jusqu'à z , de sorte que $|bz| = |bc|$, alors (zc) est parallèle à la bissectrice intérieure $(b,-d)$ de l'angle $\widehat{abc}$. La perpendiculaire à (ab) issue de d rencontre le cercle encore une fois en $-ab/d$. Comme les cordes $[bc]$ et $[-d, -ab/d]$ sont entre des cordes parallèles du cercle, elles sont de même longueur. En outre, comme $\{-ab/d, -d, b, z\}$ est un parallélogramme, on a :

$$z - b = -(ab/d) + d \ ;$$

donc $z = b + d - (ab/d)$.

Par suite, $\dfrac{a+z}{2} = \dfrac{1}{2}\left(a + b + d - \dfrac{ab}{d}\right)$

est le milieu du segment $[az] = [ab] \cup [bz]$ avec $|az| = |ab| + |bz| = |ab| + |bc|$.

D'après (2,2), ce point est aussi le pied de la perpendiculaire à (ab) issue de d . Par ce moyen, le théorème, connu sous le nom de prémisse d'ARCHIMÈDE, est démontré.

(4,3) Soient a , b , c les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité et orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, alors $b = a\varepsilon$, $c = a\varepsilon^2$, où

$$\varepsilon = (-1+\sqrt{-3}\,)/2 \ , \ \varepsilon^2 = (-1-\sqrt{-3}\,)/2 = \overline{\varepsilon}$$

sont les racines troisièmes de l'unité.

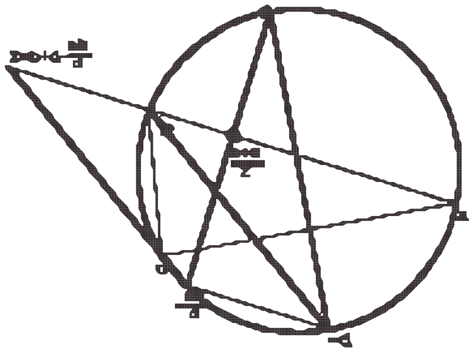


Fig. 10. La prémisse d'Archimède.

Soient maintenant u , v deux points quelconques du plan complexe, alors ils sont complétés en un triangle équilatéral, orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, par le point w pour lequel on a :

$$u + \varepsilon v + \varepsilon^2 w = 0 \ .$$

Donnons-nous un triangle abc orienté dans le sens des aiguilles d'une montre inscrit dans le cercle unité, et construisons des triangles équilatéraux sur ses côtés à l'extérieur (Cf. figure 11 page suivante).

Leurs sommets libres a', b', c' doivent être associés respectivement avec les côtés $[cb]$, $[ac]$, $[ab]$ pour que nous obtenions des triangles équilatéraux orientés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, sur lesquels nous pouvons appliquer la formule ci-dessus.

Il s'ensuit :

$$\begin{cases} a' = -\varepsilon^2 b - \varepsilon c \\ b' = -\varepsilon^2 c - \varepsilon a \\ c' = -\varepsilon^2 a - \varepsilon b \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} a - a' = a + \varepsilon^2 b + \varepsilon c = t \\ b - b' = b + \varepsilon^2 c + \varepsilon a = t\varepsilon \\ c - c' = c + \varepsilon^2 a + \varepsilon b = t\varepsilon^2 \end{cases}$$

Il en résulte que les vecteurs $a - a'$, $b - b'$, $c - c'$ sont de même longueur et forment deux à deux un angle de $2\pi/3$.

La parallèle à la droite (aa') passant par l'origine coupe le cercle unité aux points $t/|t|$ et $-t/|t|$; de cette manière, le coefficient directeur de cette droite est égal à

$$-t^2/|t|^2 = -t/\bar{t}$$

et l'équation de la droite (aa') est

$$\bar{t}(z - a) = t(\bar{z} - \bar{a}),$$

correspondant à l'équation de (bb') qui est : $\varepsilon^2 \bar{t}(z - b) = \varepsilon t(\bar{z} - \bar{b})$

et à l'équation de (cc') qui est :

$$\varepsilon \bar{t}(z - c) = \varepsilon^2 t(\bar{z} - \bar{c}).$$

Si on additionne ces trois équations, alors les deux membres s'annulent ; donc la troisième équation résulte des deux premières et, de ce fait, les trois droites passent par le même point z, connu sous le nom de point *de FERMAT* du triangle [12]. Il se trouve *à l'intérieur* du triangle si chacun des trois angles est plus petit que $2\pi/3$.

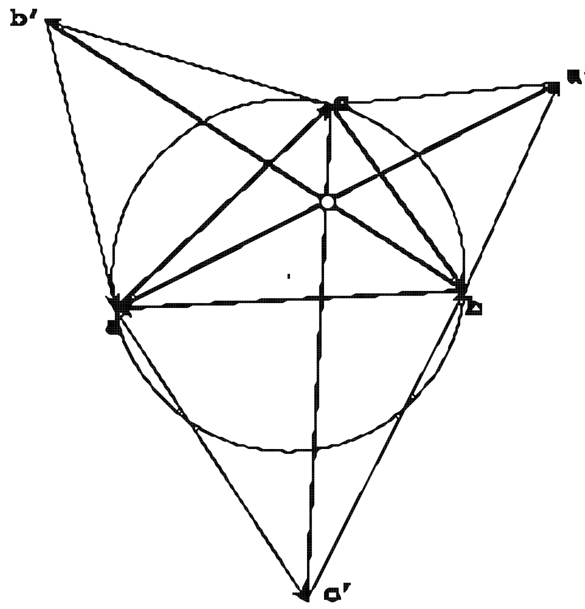


Fig. 11. Le point de Fermat.

(4,4) *Les points d'intersection des trisectrices intérieures d'un triangle les plus proches des côtés sont les sommets d'un triangle équilatéral.*

Pour montrer ce théorème intéressant qui a produit toute une littérature [13], nous désignerons les sommets du triangle inscrit dans le cercle unité par a^3, b^3, c^3, et les points qui partagent en trois arcs élémentaires égaux l'arc (b^3, c^3) ne comprenant pas

12 Le point de FERMAT (N.D.T. : dit aussi de TORRICELLI) a été découvert par TORRICELLI, en rapport avec le problème de FERMAT selon TORRICELLI (P. DE FERMAT : Œuvres I, éd. P. Tannery – Ch. Henry, Paris, 1891, p. 153 ; cf. Œuvres V, éd. C. de Waard, Paris, 1922, pp. 127-128, et E. TORRICELLI : Opere III, éd. G.Vassura, Faenza, 1919, pp. 425-431).

13 Ce théorème fut présenté en 1904 par Fr. MORLEY par lettre à des amis en Angleterre. Il a été imprimé pour la première fois dans W. L. MUIR : Morley's Trisections Theorem, Proceedings Edinburgh Math. Soc. 32, 1913.

a^3 par b^2c et bc^2, et encore les points qui partagent en trois arcs élémentaires égaux l'arc (c^3,a^3) ne comprenant pas b^3 par c^2a et ca^2 (fig. 12).

Soit t le point d'intersection de la trisectrice de l'angle $\widehat{b^3c^3a^3}$ la plus proche de a^3 avec le 3ème arc, alors on a : $\frac{t}{a^3} \times \frac{b^2c}{b^3} \times \frac{c^2a}{c^3} = \varepsilon$, donc $t = \varepsilon a^2 b$. L'autre point de cet arc situé sur la seconde trisectrice est par conséquent $\varepsilon^2 a b^2$. Le point d'intersection w des trisectrices les plus proches de $[a^3,b^3]$ résulte du système d'équations :

$$\begin{cases} w + a^3b^2c\,\bar{w} = a^3 + b^2c\,, \\ w + a^2b^3c\,\bar{w} = b^3 + a^2c\,. \end{cases}$$

Nous éliminons $\bar{w}$ et simplifions par $a - b$. Ainsi nous trouvons :

$$w = -\,ab(a + b) + c(a^2 + ab + b^2)\,,$$

de même :

$$u = -\,\varepsilon\, bc(\varepsilon\, b + c) + a(\varepsilon^2 b^2 + \varepsilon\, bc + c^2)\,,$$

et

$$v = -\,\varepsilon\, ca(\varepsilon\, c + a) + \varepsilon\, b(\varepsilon^2 c^2 + \varepsilon\, ac + a^2)\,.$$

A présent, on a :

$$u + \varepsilon\, v + \varepsilon^2 w = abc(1 + \varepsilon + \varepsilon^2) = 0\ \ ;$$

c'est pourquoi uvw est effectivement un triangle équilatéral.

A suivre… Les lecteurs qui veulent poursuivre l'étude des propriétés du triangle (et de façon plus générale de cer-tains polygones) peuvent se reporter à l'article de L'OUVERT. *Ils y trouveront des résultats moins communs et plus coûteux à établir. Les calculs se compliquent singulièrement. C'est le prix à payer pour une étude complète de ces propriétés avec les nombres complexes en relation avec le cercle unité.*

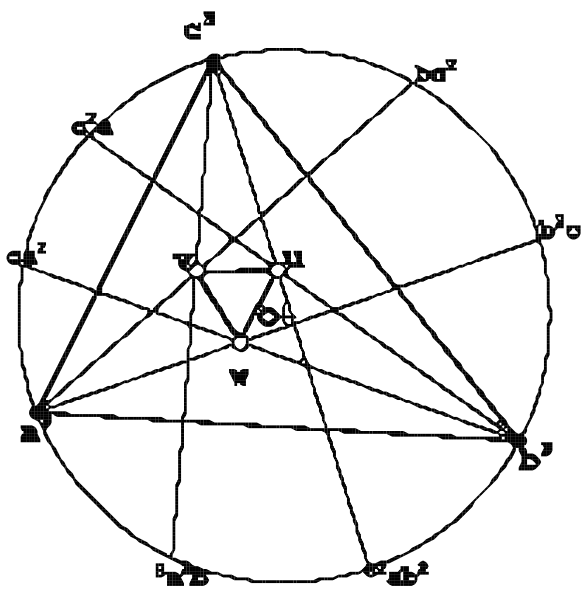


Fig. 12. Le théorème de Morley.