COMPLEMENTARITE DE L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE ANALYTIQUE ET DU CALCUL LINEAIRE

Mariza GRAND'HENRY-KRYSINSKA
GEM-UCL Louvain-la-Neuve

Dans le présent article nous donnons un aperçu d'un projet d'enseignement destiné aux élèves des deux dernières années du secondaire (équivalentes de la première et de la terminale en France) dont l'objectif est de faire fonctionner les premières notions de l'algèbre linéaire dans l'enseignement de la géométrie analytique et du calcul linéaire. Un autre objectif est de proposer une alternative à l'enseignement de la géométrie analytique dans l'espace habituellement limité aux objets plats (droites, plans,..) et sous forme d'une procédure de calcul : équation vectorielle — équations paramétriques — équation(s) cartésienne(s) et une alternative à l'enseignement du calcul matriciel et de la résolution d'un système d'équations.

L'expression *calcul linéaire* est utilisée dans le sens du calcul sur les polynômes du premier degré, homogènes ou non, et à propos des problèmes liés aux équations linéaires.

Dans ce projet d'enseignement, la géométrie analytique de l'espace se construit sur des connaissances de la géométrie synthétique de l'espace et les représentations en perspective cavalière des situations spatiales. Notre attention est portée plus particulièrement sur la notion d'équation d'un objet géométrique, la notion de paramètre, l'intérêt de contraster des lieux algébriques linéaires avec des non-linéaires, l'appui substantiel sur le mode de raisonnement de nature synthétique-géométrique et les passerelles entre le mode de raisonnement synthétique d'une part et analytique-algébrique d'autre part.

Quant au calcul linéaire, nous avons lié les systèmes d'équations linéaires et leurs résolutions aux positions relatives des plans en privilégiant la méthode de Gauss et le calcul matriciel à l'étude des transformations affines.

Dans cette approche le recours aux vecteurs géométriques et à leurs composantes n'est pas indispensable.

L'élaboration de ce projet trouve ses racines dans le travail d'un sous-groupe du GEM dans le cadre d'un mémoire de fin d'études en 1984 (2) dirigé par Nicolas Rouche à l'UCL. Ce travail a bien avancé en 1997 lors de l'encadrement d'un autre mémoire du fin d'études (3) dirigé par Maggy Schneider aux FUNDP. A cette occasion-là, nous avons réorganisé le projet de l'enseignement de la géométrie analytique dans l'espace, nous l'avons amarré à l'enseignement des systèmes d'équations linéaires et au calcul matriciel.

1. Objets géométriques dans l'espace caractérisés par leurs équations cartésiennes

Les élèves auxquels le projet s'adresse sont déjà familiarisés avec la géométrie synthétique[1] de l'espace. Ils ont également pratiqué un peu la géométrie analytique à propos des équations des droites dans le plan.

1.1 De l'équation vers l'objet

Dans un premier temps, on propose aux élèves d'identifier les lieux de points de l'espace satisfaisant aux équations données, équations dans lesquelles n'apparaissent qu'une ou deux des trois variables x, y et z.

Quels sont les points, dans l'espace, dont les coordonnées vérifient les équations ou systèmes d'équations suivantes ?

a) $2x + 3y = 0$

b) $\begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$

c) $z = y^2$

d) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

Quelle est l'écriture générale des coordonnées des points vérifiant ces équations ?

Les difficultés recensées de certains élèves sont les suivantes :

— l'interprétation géométrique des équations ci-dessus comme contraintes imposées aux coordonnées des points dans l'espace;

— l'interprétation géométrique de l'absence d'une variable dans une équation. Souvent des élèves considèrent que cette variable est nulle.

— l'idée persistante selon laquelle une équation linéaire dans l'espace est celle d'une droite, surtout si cette équation est en x et en y.

Il est intéressant de citer ici des arguments d'élèves qui leur permettent d'établir le lien entre le cadre algébrique et le cadre géométrique. Prenons, par exemple, la première équation : $2x + 3y = 0$ Voici quelques avis et arguments proposés par les élèves :

— il s'agit de l'ensemble qui contient la droite d'équation $2x + 3y = 0$ *dans le plan xOy ;*

— il s'agit de l'ensemble qui contient tous les

1 Dans la géométrie synthétique, on raisonne directement sur des objets géométriques connus par un ensemble de propriétés dont certaines déterminent l'objet. Cette géométrie prend des racines à travers des observations, des manipulations, des constructions et des représentations des objets simples.

points de coordonnées $(0,0,z)$, *donc l'axe Oz ;*

— *il s'agit de la droite* $2x+3y=0$ *dans le plan xOy et de toutes les droites parallèles situées aux différentes altitudes puisqu'il n'y a aucune contrainte sur l'altitude z. L'ensemble de telles droites est coplanaire car elles sont parallèles entre elles et sont sécantes avec la droite Oz ;*

— *il s'agit de la droite* $2x+3y=0$ *dans le plan xOy et de toutes les droites verticales (parallèles à l'axe Oz) passant par les points de cette droite. L'ensemble de telles droites est coplanaire par le même argument que ci-dessus.*

La question sur l'écriture générale des coordonnées des points du lieu amène la notion du paramètre, une sorte de variable indépendante : chaque fois qu'on fixe les paramètres en leur donnant une valeur, on obtient un triplet.

A partir de ces quelques questions on peut formuler plusieurs conjectures importantes qui seront confirmées plus tard :

— les plans et les surfaces sont caractérisés par *une* équation cartésienne. Plus particulièrement un plan est caractérisé par une équation linéaire ;

— l'expression générale des coordonnées des points vérifiant une équation cartésienne utilise *deux* paramètres qui correspondent à deux degrés de liberté ;

— les droites et les courbes sont caractérisées par *deux* équations cartésiennes ; plus particulièrement une droite est caractérisée par deux équations linéaires;

— l'expression générale des coordonnées des points vérifiant deux équations cartésiennes utilise *un* paramètre qui correspond ici à un degré de liberté ;

— le nombre de paramètres, autrement dit, le nombre de degrés de liberté, peut être considéré comme la dimension de l'objet géométrique étudié ; le nombre d'équations cartésiennes qui le caractérisent est égal à la différence entre la dimension de l'espace et la dimension de l'objet.

1.2 De l'objet vers l'équation

Dans un deuxième temps, on demande aux élèves de faire la démarche inverse : l'objet est défini géométriquement, on leur demande de le caractériser algébriquement.

Caractérisez au moyen d'équations ou de système d'équations

a) le plan *Oxy*,

b) l'axe *Oy*,

c) le plan parallèle à *Oyz* passant par le point (2,0,0)

d) un plan parallèle à l'axe *Ox*,

e) le cylindre de la Fig. 1.

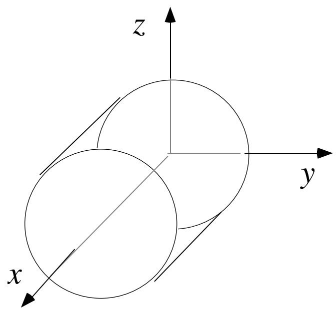

Fig. 1

Dans chacun des cas donnez l'écriture générale des coordonnées des points.

Les deux démarches, l'une inverse de l'autre, de l'équation vers l'objet dans le premier cas et de l'objet vers l'équation dans le second cas, permettent à l'élève d'approfondir et mieux comprendre la relation entre l'objet et son expression algébrique.

La prise en considération d'autres équations que des équations linéaires et d'autres objets que des droites et des plans permet de mieux préparer l'association entre les polynômes du premier degré d'une part, des droites et des plans d'autre part.

Le passage du cadre géométrique vers le cadre algébrique s'établit à l'aide des évidences suivantes :

— un point est entièrement déterminé par ses coordonnées (x,y,z).

— l'ensemble de points satisfaisant la condition $z = c$ (resp. $x = a$ et $y = b$) est un plan parallèle au plan xOy (resp. plan parallèle au plan yOz , plan parallèle au plan xOz).

2. Étude des point alignés

> Soient trois points de coordonnées suivantes :
>
> $O(0,0,0), A(1,2,1)$ et $C(3,6,3)$
>
> Ces points sont-ils alignés ?
>
> Si oui, trouvez l'écriture générale des coordonnées des points qui appartiendraient à la droite formée par les trois points donnés.

Voici les arguments proposés par les élèves :

— « *On laisse tomber une des dimensions et on utilise les deux autres pour vérifier si les pentes (!) sont les mêmes.* »

— « *On projette les points dans deux plans formés par des axes. Si les projections sont alignées alors les points initiaux le sont également car ils sont situés à l'intersection de deux plans.* »

— « *Pour se déplacer du point O vers le point A il faut avancer une unité sur l'axe Ox, deux unités sur l'axe Oy et de nouveau une unité sur l'axe Oz, pour se déplacer du point O vers le point B il faut avancer trois fois plus d'unités aussi bien sur l'axe Ox que sur les axes Oy et Oz. Cela veut dire que la pente (!) de OA et de OB est la même*. »

L'un des arguments cités peut être exploité en classe de la manière suivante. Les points (0,0,0), (1,2,0) et (3,6,0) sont alignés dans le plan xOy : la relation entre les abscisses et les ordonnées s'exprime sous forme de l'équation $y = 2x$. Une telle équation dans l'espace représente un plan perpendiculaire au plan xOy . Ce plan contient les points A, B et C car d'une part leurs coordonnées satisfont à l'équation, d'autre part les points de coordonnées (0,0,0), (1,2,0) et (3,6,0) sont des projections orthogonales de ces points sur le plan xOy. Mais cela ne permet pas encore de conclure que les points A, B et C sont alignés. Alors on recommence le procédé et on vérifie que les points (0,0,0), (1,2,0) et (3,6,0), les projections orthogonales des points A, B et C sur le plan yOz, sont alignés. La relation entre les ordonnées et les altitudes s'exprime sous forme de l'équation $z = \frac{y}{2}$.

Cette équation représente dans l'espace le plan perpendiculaire au plan yOz. Les points A, B et C appartiennent à ce plan également. Les deux plans ne sont pas parallèles car ils ont des vecteurs normaux de directions différentes, donc ils sont sécants. Leur intersection est la droite qui contient les points A, B et C, donc ils sont alignés. On aboutit, par cette voie, à deux conditions à imposer sur les coordonnées d'un point quelconque

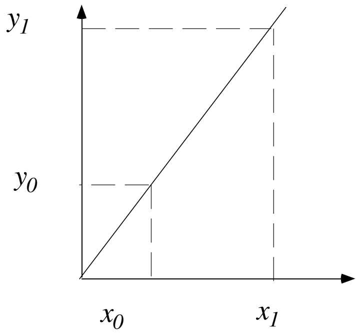

Fig. 2

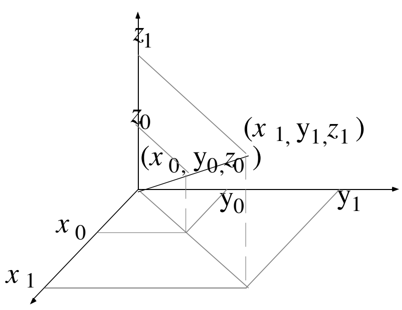

Fig. 3

pour qu'il appartienne à la droite *OA* ou *OB* :

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = \dfrac{y}{2} \end{cases} .$$

Ces deux conditions ou équations sont la traduction algébrique du fait qu'en géométrie synthétique, une droite est à l'intersection de deux plans. Comme en plus, il y a une infinité de telles paires des plans, on doit s'attendre d'avoir une infinité des paires d'équations d'une droite.

En projetant la droite sur le troisième plan des axes on aurait trouvé la troisième équation $x = z$ qui est la combinaison linéaire de deux autres.

Un autre argument cité est l'extension à l'espace d'un résultat établi dans le plan, selon lequel la proportionnalité des coordonnées correspond à l'alignement des points avec l'origine. Comme cette extension est vraie, il est difficile de convaincre les élèves de l'intérêt à la légitimer. Le lien entre la proportionnalité des coordonnées et l'alignement des points s'appuie sur le théorème de Thalès et sa réciproque utilisés dans deux plans différents, et elle n'est pas du tout triviale.

Dans le plan, la figure qui soutient cette propriété est donnée à la Fig. 2 et dans l'espace à la Fig. 3 . Cette voie conduit à la forme paramétrée des coordonnées des points de la droite : $(\alpha x_0, \alpha y_0, \alpha z_0)$

3. Étude des points coplanaires

Soit le plan π déterminé par les trois points non alignés :

O (0,0,0) , A(0,1,1) et B(1,2,4)

On additionne les coordonnées de *A* et de *B* pour obtenir celles d'un point C(1,3,5).

Ce point appartient-il au plan π ?

Déterminez les conditions sur les coordonnées des points pour qu'ils appartiennent à ce plan et une manière générale de les écrire toutes.

Voici quelques réactions des élèves. Certains voient dans cette addition celle des composantes des vecteurs qui est transposée automatiquement en addition des vecteurs eux-mêmes, ceci par analogie avec ce qui a été établi dans le plan. Comme, géométriquement, l'addition des vecteurs correspond à la loi du parallélogramme, ces élèves tirent la conclusion que le quatrième point est le sommet d'un parallélogramme dont les trois autres sommets sont les points O, A, et B. Certains élèves en doutent car, selon eux, il n'est pas sûr qu'on obtient ainsi un parallélogramme plan : ils pensent à une sorte de parallélogramme gauche dont la diagonale sortirait du plan formé par les côtés issus du même sommet. Pour les convaincre du contraire il est nécessaire de revenir aux définitions d'un parallélogramme (un quadrilatère dont les côtés sont parallèles, deux à deux) et de deux droites parallèles dans l'espace (deux droites coplanaires et parallèles dans le plan qui les contient).

D'autres élèves considèrent qu'une même translation envoie le point (0,0,0) sur le point (1,2,4), et le point (0,1,1) sur le point (1,3,5) parce qu'on ajoute « la même chose » aux triplets (0,0,0) et (0,1,1) pour obtenir les triplets (1,2,4) et (1,3,5).

La Fig. 4 suggère comment trouver les coordonnées d'un quatrième sommet d'un parallélogramme dans le plan ;

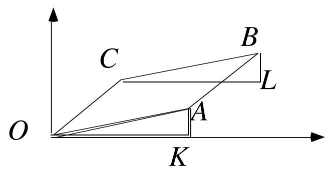

Fig. 4

le nombre de pas horizontalement (vers la droite si le nombre est positif et vers la gauche si ce nombre est négatif) et verticalement (vers le haut si le nombre est positif et vers le bas si ce nombre est négatif) est le même de C à B que de O à A.

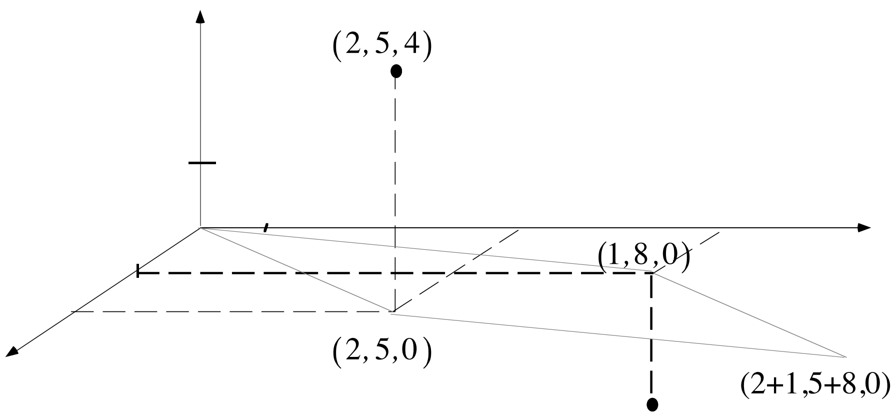

Fig. 5

La Fig. 5 aide à calculer l'abscisse et l'ordonnée du point *C :* elles sont les mêmes que celles du quatrième sommet du parallélogramme qui est la projection orthogonale du parallélogramme *OACB* sur le plan xOy.

La Fig. 6 suggère comment calculer l'altitude du point C *:* cette altitude est la même que celle du quatrième sommet du parallélogramme obtenu par la projection orthogonale du parallélogramme *OACB* sur le plan yOz.

Pour trouver d'autres points du plan considéré, les élèves proposent différentes pistes.

Ils commencent par les points des droites *OA* ou *OB* : leurs coordonnées sont de la forme respectivement $(\alpha,2\alpha,4\alpha)$ et $(0,\alpha,\alpha)$.

Pour trouver des points au dehors de ces deux droites, ils somment leurs coordonnées et ils obtiennent les triplets $(\alpha,3\alpha,5\alpha)$. Ces coordonnées sont celles des points de la droite *OC,* ce qui est cohérent avec le résultat obtenu auparavant : quand la forme générale de coordonnées des points d'un lieu contient un paramètre dans une expression au premier degré alors il s'agit des points d'une droite. La consigne de trouver des points du plan au dehors des droites *OA*, *OB*, et *OC* permet de prendre conscience que le paramètre α doit varier sur l'une des deux droites indépendamment de sa variation sur l'autre. Pour rendre cette variation indépendante on décide d'utiliser deux paramètres différents et on convient de noter les points de la droite *OA* par $(\alpha,2\alpha,4\alpha)$ et ceux de la droite *OB* par $(0,\beta,\beta)$. La présence de deux paramètres indépendants est

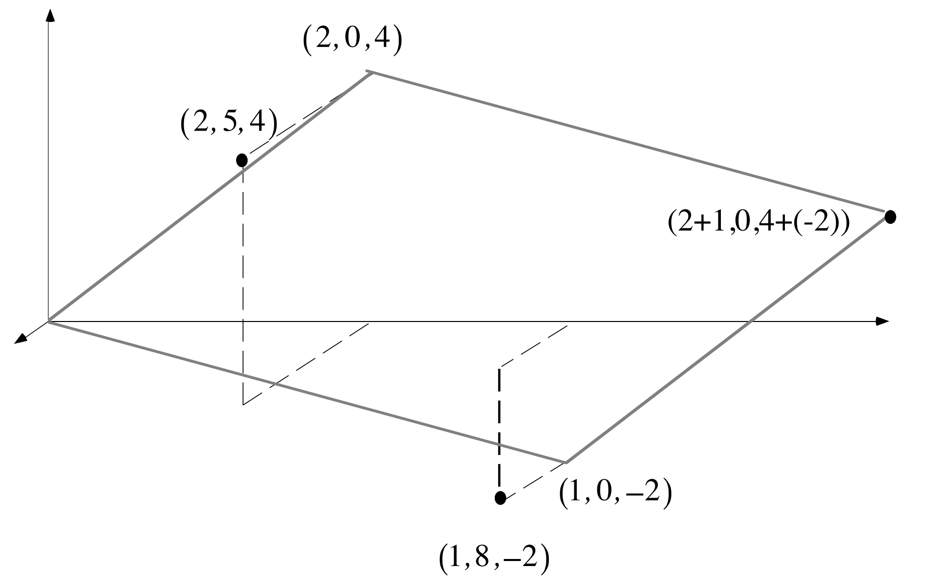

Fig. 6

une expression des deux degrés de libertés dans le plan. C'est également une prémisse de l'indépendance linéaire des vecteurs non-colinéaires de l'espace.

Pour trouver des points au dehors des droites *OA, OB* et *OC,* les élèves calculent les coordonnées du quatrième sommet d'un parallélogramme dont les trois autres sommets sont $(0,0,0)$, $(\alpha,2\alpha,4\alpha)$ et $(0,\beta,\beta)$ et ils obtiennent le triplet $(\alpha,2\alpha + \beta,4\alpha + \beta)$.

Mais obtiennent-ils ainsi tous les points du plan ? Dans la réponse on utilise l'argument géométrique : tout point du plan peut être considéré comme extrémité de la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés appartiennent à deux directions données et dont l'autre extrémité est placée à l'origine. Ce fait est la prémisse de la notion d'une base dans le plan vectoriel.

Une des conséquences des problèmes posés ci-dessus est d'apporter un sens géométrique aux opérations algébriques sur les triplets :

$$\alpha(x_0, y_0, z_0) = (\alpha x_0, \alpha y_0, \alpha z_0) \qquad (1)$$

$$(x_0, y_0, z_0) + (x_1, y_1, z_1) = (x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) \qquad (2)$$

L'égalité (1) s'interprète comme l'alignement des points de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et $(\alpha x_0, \alpha y_0, \alpha z_0)$ avec l'origine. L'égalité (2) traduit sur des coordonnées le fait que les points $(0,0,0)$, (x_0, y_0, z_0), (x_1, y_1, z_1) et $(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1)$ forment un parallélogramme. Finalement, la forme générale des points d'un plan passant par (0,0,0), (x_0, y_0, z_0) et (x_1, y_1, z_1) est :

$$(\alpha x_0 + \beta x_1, \alpha y_0 + \beta y_1, \alpha z_0 + \beta z_1)$$

qui, compte tenu des propriétés (1) et (2), peut s'écrire sous forme

$$\alpha(x_0, y_0, z_0) + \beta(x_1, y_1, z_1). \qquad (3)$$

La caractérisation analytique d'un plan peut être obtenue plus rapidement par d'autres raisonnements, comme par exemple celui qui s'appuie sur le produit scalaire. Le raisonnement développé ci-dessus garde son intérêt dans le cas où on veut privilégier l'apprentissage de premières notions de l'algèbre linéaire par rapport à celles de la géométrie analytique.

La question suivante propose une démarche qui s'appuie sur le produit scalaire nul.

> Soit $A(1,-2,3)$ un point donné. Déterminez un point B_1 qui forme avec O une droite perpendiculaire à OA, un autre point B_2 qui vérifie la même condition, encore un autre point B_3, ...
>
> Quelle relation doivent vérifier les coordonnées (x,y,z) de tous les points tels que B_1, B_2, B_3 ... ?

En utilisant le produit scalaire nul comme condition de perpendicularité des droites *OA* et *OB* les élèves établissent la condition $x - 2y + 3z = 0$. Pour s'assurer que tous les points B_1, B_2, B_3 ... appartient à un même plan et que l'équation de ce plan est donnée par la condition ci-dessus, il faut faire appel à la géométrie synthétique et vérifier que *l'ensemble des droites perpendiculaires à une droite donnée et passant par un point donné de cette droite forme un plan*.

Pour résoudre des problèmes d'alignement et de la coplanarité, l'outil vectoriel n'est pas indispensable. Son introduction précoce risque d'évacuer le sens à cause des procédures qui accompagnent le calcul vectoriel comme celui qui précède le calcul des équations des droites ou des plans.

De plus, l'extension du vecteur dans le plan au vecteur dans l'espace ne va pas de soi. Les figures planes qui illustrent des opérations algébriques sur des vecteurs dans le plan doivent être remplacées par des figures spatiales.

La difficulté d'appréhender un vecteur comme classe des segments orientés se manifeste dans la difficulté de comprendre que deux vecteurs dans l'espace sont toujours coplanaires, surtout dans le cas où les segments orientés qui les représentent sont non coplanaires (Fig. 6).

Cette difficulté apparaît également quand les élèves doivent établir que certains points sont coplanaires à partir des vecteurs coplanaires associés et réciproquement.

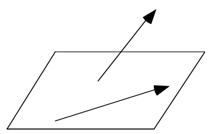

Fig. 6

4. Un système de trois équations à trois inconnues

Les systèmes d'équations linéaires sont l'objet de l'algèbre linéaire et le rang est un concept important de cette théorie. La problématique de résolution d'un système d'équations peut prendre un aspect particulièrement intéressant dans « l'ambiance » des équations des plans et des droites.

4.1 Positions relatives des plans

1. Les plans π_1, π_2 et π_3 caractérisés par les équations cartésiennes ci-dessous sont-ils sécants ?

a) $$\begin{aligned} \pi_1 &: 2x + z = 1 \\ \pi_2 &: 4y - 3z = 8 \\ \pi_3 &: x + y = 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \pi_1 &: 2x + 3y + z = 1 \\ \pi_2 &: 5x + 4y - 3z = 8 \\ \pi_3 &: 7x + 7y - 2z = 9 \end{aligned}$$

Si oui, quelle est cette intersection ?

Les objectifs de ces questions sont les suivants : prendre conscience que l'étude des positions relatives de trois plans et la résolution d'un système de trois équations à trois inconnues sont deux facettes d'un même problème et préparer le terrain pour établir les opérations algébriques sur des systèmes qui conservent l'ensemble de solutions et ainsi amener la méthode de Gauss de résolution d'un système linéaire.

Dans le cas du système a), chaque plan est parallèle à l'un des axes. Il en résulte que ces plans sont sécants en un seul point. La recherche des solutions le confirme : le système admet une solution unique qui est le triplet $\left(\frac{11}{2}, -\frac{11}{2}, -10\right)$.

Dans le cas du système b), on peut remarquer que la troisième équation est la somme des deux premières. Les élèves éprouvent les difficultés à interpréter cela géométriquement. Ils préfèrent calculer « la solution ».

Voici un exemple de leur calculs :

Dans le système d'équations

$$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 5x+4y-3z=8 \\ 7x+7y-2z=9 \end{cases}$$

ils isolent l'inconnue z dans les deux premières équations, cela donne le système suivant :

$$\begin{cases} z=1-2x-3y \\ z=(8-5x-4y)(-\frac{1}{3}) \\ 7x+7y-2z=9 \end{cases}$$

Ils éliminent z des deux dernières équations :

$$\begin{cases} z=1-2x-3y \\ 1-2x-3y=(8-5x-4y)(-\frac{1}{3}) \\ 7x+7y-2(1-2x-3y)=9 \end{cases}$$

et ensuite ils réduisent les expressions algébriques :

$$\begin{cases} z=1-2x-3y \\ 3-6x-9y=-8+5x+4y \\ 7x+7y-2+4x+6y=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z=1-2x-3y \\ -11x-13y=-11 \\ 11x+13y=11 \end{cases}$$

Dans ce système, les deux dernières équations sont sûrement équivalentes; l'une d'elles est donc inutile. Ainsi, le système se réduit à deux équations utiles

$$\begin{cases} z=1-2x-3y \\ 11x+13y=11 \end{cases} . \qquad (1)$$

Ceci est une occasion pour introduire la notion du rang d'un système comme le nombre d'équations utiles.

Pour résoudre le système (1), les élèves proposent de le faire par rapport à deux des trois inconnues, par exemple par rapport à y et z. On obtient alors le résultat suivant :

$$y=\frac{11}{13}-\frac{11}{13}x \quad \text{et} \quad z=-\frac{20}{13}+\frac{7}{13}x.$$

Le résultat est inattendu : le système admet une infinité des solutions, dont la forme générale est :

$$\left(x, \frac{11}{13}-\frac{11}{13}x, -\frac{20}{13}+\frac{7}{13}x\right).$$

L'inconnue x change ici de statut puisqu'elle devient un paramètre, autrement dit une variable indépendante telle qu'à chacune de ses valeurs correspond un triplet. Géométriquement, le lieu des points dont les coordonnées sont de la forme :

$$\left(\alpha, \frac{11}{13}-\frac{11}{13}\alpha, -\frac{20}{13}+\frac{7}{13}a\right)$$

est une droite.

A ce stade, l'interprétation géométrique de la position relative des trois plans est immédiate : ces plans sont sécants en une droite commune (Fig. 7) :

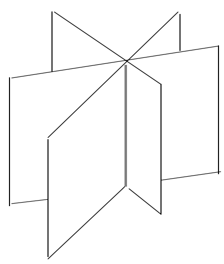

Fig. 7

Ce résultat peut être directement établi à partir du fait que la troisième équation est la somme des deux autres. En effet, toute solution des deux premières équations est également une solution de la troisième. Géométriquement cela signifie que tout point appartenant à l'intersection des deux premiers plans appartient également au troisième plan. Comme les deux premiers plans ne sont pas parallèles le troisième plan contient leur intersection (Fig. 7).Ce type de raisonnement semble être inhabituel et difficile pour la majorité des élèves.

Exercice 2 (voir ci-contre)

Le système a) n'a pas de solutions, il est représenté par trois plans sécants deux à deux (Fig. 8).

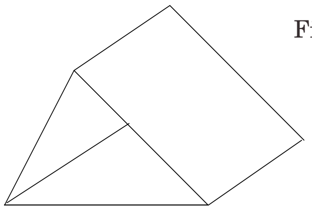

Fig. 8

Le système b) est représenté par trois plans, dont deux sont confondus ; une des deux dernières équations est inutile.

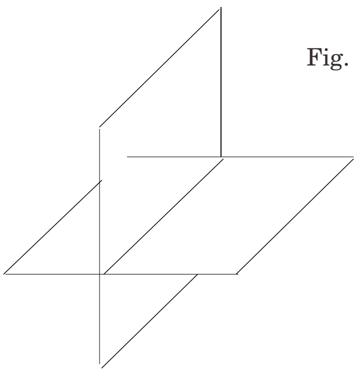

Fig. 9

Le système a une infinité de solutions — coordonnées des points appartenant à la droite d'intersection de deux premiers plans (cf. Fig. 9). Le système c) est représenté par trois plans dont deux sont parallèles non confon-

2. Pouvez-vous déterminer l'existence et le nombre de solutions de chacun des systèmes suivants sans le résoudre ?

a) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 5x+4y-3z=8 \\ 7x+7y-2z=10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 5x+4y-3z=8 \\ 15x+12y-9z=24 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ 5x+4y-3z=8 \\ 15x+12y-9z=20 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x+6y+4z=8 \\ x+3y+2z=4 \\ 3x+9y+6z=12 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+6y+4z=8 \\ x+3y+2z=4 \\ 3x+9y+6z=0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 7x+4y-z=8 \\ y+3z=1 \\ z=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x+3y+z=0 \\ 5x+4y-3z=0 \\ 7x+7y-2z=0 \end{cases}$

Dans chacun de cas, établissez le nombre d'équations utiles pour calculer des solutions.

Conjecturez le lien entre ce nombre et le type de solutions.

dus ; un tel système n'a pas de solutions (Fig. 10).

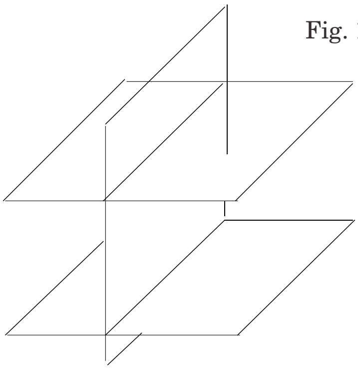

Fig. 10

Le système d) est représenté par trois plans confondus, il admet une infinité de solutions — coordonnées des points du plan commun. Dans ce cas, il n'y a qu'une équation utile.

Le système e) est représenté par trois plans parallèles dont deux premiers sont confondus, il n'a pas de solutions.

Le système f) représente trois plans sécants en un point (Fig. 11), il admet donc une solution unique — les coordonnées de ce point.

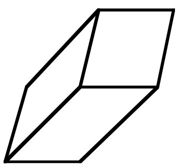

Fig. 11

En effet, la deuxième équation est représentée par un plan parallèle à l'axe Ox parce que le coefficient de x est nul, la troisième équation est représentée par un plan parallèle au plan xOy et la première équation représente un plan qui n'est parallèle à aucun de ces deux plans.

Le système g) est représenté par trois plans contenant une droite passant par l'origine et parallèles aux trois plans représentant le système a) (Fig. 7). Il admet une infinité de solutions qui sont les coordonnées des points de la droite d'intersection.

L'existence ou non de solutions, et leur nombre dépendent des positions relatives des trois plans. Cela motive la question suivante.

3. On veut étudier les solutions d'un système de trois équations à trois inconnues, leur existence et leur nombre. A quels résultats peut-on s'attendre ?

On peut choisir plusieurs critères de classement de positions relatives de trois plans. Ici, le critère qui convient le mieux est celui qui prend en considération le type d'intersections simultanées possibles entre trois plans.

Trois plans sont soit concourants, soit ils n'ont aucun point commun. Quand ils sont concourants alors cela a lieu
— soit en un point (Fig. 11),
— soit en une droite (Fig. 7),
— soit en un plan.

Dans le contexte algébrique ce classement se traduit par le fait que
— le système peut avoir une solution ;
— le système peut avoir une infinité de solutions – coordonnées des points d'une droite ;
— le système peut avoir une infinité de solutions – coordonnées des points d'un plan ;
— le système peut ne pas avoir de solution.

Les questions 4 et 5 généralisent le raisonnement déjà utilisé dans le but d'établir des règles qui permettent d'obtenir des systèmes équivalents.

4. Considérez deux plans π_1 et π_2 respectivement d'équations cartésiennes

$$2x + 3y + z = 1 \quad \text{et} \quad 5x + 4y - 3z = 8$$

et un troisième plan π_3 d'équation

$$k(2x + 3y + z) + k'(5x + 4y - 3z) = k + 8k',$$

où k et k' représentent deux nombres quelconques non-nuls simultanément. Quelle est la position du plan π_3 par rapport aux plans π_1 et π_2 ?

5. Considérez le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 2 \\ -x + 2y - 3z = -3 \end{cases}$$

a) Donnez des exemples de systèmes qui lui sont équivalents, c'est-à-dire des systèmes ayant le même ensemble de solutions. Expliquez pourquoi.

b) Déterminez les opérations algébriques sur les systèmes d'équations qui ne modifient pas l'ensemble des solutions.

La question 6 prépare la mise en place de la méthode de Gauss de résolution des systèmes linéaires d'équations.

6. Lequel parmi les systèmes proposés en 2 serait-il le plus facile à résoudre ? Pourquoi ?

…/…

Résolvez quelques uns des systèmes proposés en les ramenant à un système équivalent qui a la forme du système f).

Établissez le lien entre le nombre de paramètres dans l'écriture générale des solutions, le nombre d'équations utiles (ou le nombre d'inconnues principales) et la dimension de l'ensemble de solutions.

Il n'y a aucun doute que le système f) est le plus facile à résoudre.

Le système a) ramené à la forme f) et représenté sous forme symbolique d'un tableau donne le résultat suivant :

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} & -\frac{11}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

La dernière ligne signifie que $0x + 0y + 0z = 1$. Une telle équation est impossible. On en conclut que le système n'a pas de solutions.

Dans le cas du système b) on obtient le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} & -\frac{11}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

La dernière ligne représente l'équation $0x + 0y + 0z = 0$; tout triplet est sa solution. Le système peut se limiter aux deux premières équations. Dans leurs solutions il y aura un paramètre.

Le système c) devient

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{11}{7} & -\frac{11}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}.$$

La dernière ligne confirme qu'il n'a pas de solutions.

Le système d) devient

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

La seule équation utile $x+3y+2z=4$ admet une infinité de solutions avec deux paramètres.

Le système e) devient

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}.$$

La dernière équation n'a pas de solutions.

A ce stade là, on peut conjecturer que tout système de trois équations linéaires à trois inconnues peut être remplacé par un système équivalent représenté par une des formes symboliques suivantes :

$$\underset{\text{i)}}{\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 1 & f \end{array}} \quad \underset{\text{ii)}}{\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & f \end{array}} \quad \underset{\text{iii)}}{\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}$$

$$\underset{\text{iv)}}{\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}} \quad \underset{\text{v)}}{\begin{array}{ccc|c} 1 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}} \quad \underset{\text{vi)}}{\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}$$

$$\underset{\text{vii)}}{\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}$$

Le tableau i) représente un système avec une solution unique, et il correspond à trois plans sécants en un point : les trois équations sont utiles (rang 3) et dans la solution il n'y a aucun paramètre.

Les tableaux ii) et iii) sont apparentés : la dernière ligne des coefficients est composée de 0. Le système ii) n'a aucune solution; géométriquement, le système initial correspondait à trois plans formant une tente (Fig. 8) Le système iii) a une infinité de solutions et il correspond à trois plans sécant en une droite (Fig. 12) : les deux premières équations sont utiles (rang 2) et dans l'écriture générale des solutions du système on utilise un paramètre. Géométriquement, on peut passer du système ii) au système iii) par la translation de l'un des trois plans vers le plan passant par la droite commune des deux autres.

Les tableaux iv) et v) sont apparentés car deux lignes de coefficients sont composées de 0. Le système iv) n'a aucune solution : géométriquement le système initial correspondait à trois plans parallèles distincts. Le système v) a une infinité de solutions et il correspond à trois plans confondus : une équation seulement est utile ici (rang 1) et dans l'écriture générale des solutions du système sont utilisés deux paramètres. Géométriquement, on peut passer du système iv) au système v) par les translations de deux plans vers le troisième ce qui revient à ajuster les termes indépendants dans leurs équations.

Les tableaux vi) et vii) sont apparentés car les trois lignes de coefficients sont composées de 0. Le système vi) n'a aucune solution, mais tout triplet est solution du système vii) : aucune équation n'est utile (rang 0) et dans l'écriture générale des solutions on utilise trois paramètres.

De tout cela on peut conjecturer le lien entre le rang d'un système et le nombre de solutions dans le cas ou le système admet des solutions :

trois équations utiles
$\leftrightarrow$ une solution (avec zéro paramètres) ;
deux équations utiles
$\leftrightarrow$ une infinité de solutions avec un paramètre ;
une équation utile
$\leftrightarrow$ une infinité de solutions avec deux paramètres ;
aucune équation utile
$\leftrightarrow$ une infinité de solutions avec trois paramètres.

A partir des résultats obtenus en géométrie analytique on a l'interprétation géométrique des solutions :
— deux équations utiles ou une infinité de solutions avec un paramètre correspondent à une droite ;
— une équation utile ou une infinité de solutions avec deux paramètres correspondent à un plan ;

Par l'intermédiaire des vecteurs normaux des plans, on peut porter un autre regard sur les rapprochements entre les tableaux ii) et iii), iv) et v), vi) et vii). Ce point de vue est développé à partir de la question suivante.

> 7. Discutez les conditions d'existence et le nombre de solutions d'un système d'équations 3×3 en fonction des positions relatives des vecteurs normaux de trois plans.

Quand les vecteurs normaux ne sont pas coplanaires, alors les plans correspondants sont sécants en un point unique. Le système d'équations a une solution unique (tableau i)).

Quand les trois vecteurs normaux sont coplanaires (et au moins deux non multiples entre eux), les plans correspondants sont soit sécants en une droite (Fig. 7), soit ils forment une «tente» (Fig.8). Dans le premier cas, le système d'équations admet une infinité de solutions avec un paramètre ; dans le second cas, il n'a aucune solution (tableaux ii) et iii)).

Quand les trois vecteurs sont multiples entre eux, les plans correspondants sont soit tous confondus soit au moins deux entre eux sont disjoints. Dans le premier cas, le système d'équations admet une infinité de solutions avec deux paramètres ; dans le second cas, il n'a aucune solution (tableaux iv) et v)).

Si trois vecteurs dans l'espace sont tous multiples entre eux, on dira que leur rang est égal à 1.

Si trois vecteurs dans l'espace sont coplanaires et au moins deux ne sont pas multiples entre eux, on dira que leur rang est égale à 2.

Si trois vecteurs dans l'espace ne sont pas coplanaires, on dira que leur rang est égal à 3.

En rapprochant le rang d'un système d'équations du rang d'un système de vecteurs (normaux), on peut établir qu'ils sont égaux quand ils correspondent à une même position relative de trois plans. Les questions traitées dans cette section montrent que l'étude des systèmes d'équations linéaires ne demande pas d'outils algébriques sophistiqués tel le déterminant et qu'elle peut s'appuyer efficacement sur la géométrie synthétique et analytique de l'espace et se limiter à l'utilisation de la méthode de Gauss.

5. Transformations de l'espace et leurs expression analytiques

Les deux questions suivantes permettent de rencontrer quelques isométries de l'espace et de se familiariser avec leurs expressions analytiques.

1. Considérez trois plans orthogonaux deux à deux. Imaginez les symétries par rapport à ces plans et par rapport à leurs intersections et composez-les entres elles. Traduisez l'effet de ces symétries sur les coordonnées d'un point quelconque.

2. Caractérisez les transformations de l'espace correspondant aux expressions ci-dessous.

$$f_1(x,y,z)=(x,\frac{1}{2}y,z)$$
$$f_2(x,y,z)=(x,z,-y)$$
$$f_3(x,y,z)=(x,2-y,-z)$$
$$f_4(x,y,z)=(0,y,1)$$
$$f_5(x,y,z)=(\frac{1}{2}(x+y),\frac{1}{2}(x+y),z)$$

La question 3 a pour but d'établir le lien entre les invariants d'une transformation affine tels que la conservation d'alignement, du rapport de section, du parallélisme, et son expression analytique.

3. Considérez une rotation de 120°.

a) Quelles sont les coordonnées du point *P'* image du point *P* par cette rotation quand son axe est la droite x = y = z ?

b) Quelle est l'expression analytique de la rotation si son axe devient l'axe Oz*?*

Question subsidiaire pour b) : Construisez des images des points (1,0,0),(0,1,0) et (0,0,1), représentez les dans le plan xOy vu d'en haut et calculez leurs coordonnées.

Comment, à partir de là, pouvez-vous construire les images des points (1,1,0) et ($\frac{3}{2}$,2,0), et ensuite calculer leurs coordonnées ?

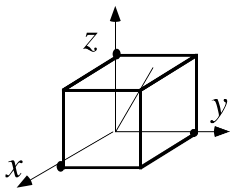

Fig. 13

a) Le cube unitaire attaché au système d'axes permet de visualiser la rotation. Mais pour cela il faut bien connaître le cube et ses rotations de 120° qui le conservent (Fig. 13). A partir de là, on peut observer que l'axe Ox est envoyé sur Oy, l'axe Oy sur Oz et l'axe Oz sur Ox. En classe, cela suffit pour que les élèves affirment que f(x,y,z) = (z,x,y) sans se soucier des autres points dans l'espace que ceux qui sont situés sur les axes.

b) Cette fois-ci la réponse n'est plus évidente et sans indications la classe ne progresse pas. Les coordonnées des points *I'* et *J'* sont calculées à l'aide de la trigonométrie :

$$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right) \text{ et } \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},0\right).$$

Les coordonnées de *M'*, quatrième sommet du rectangle, sont égales à la somme des coordonnées des points *I'* et *J'* (Fig. 14) :

$$\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2},0\right).$$

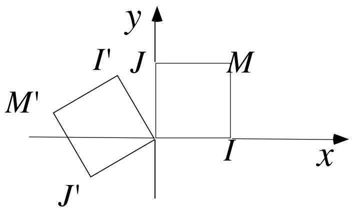

Fig. 14

Les coordonnées des points *A'* et *B'* sont égales à : $\left(-\frac{1}{2}\times\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{2},0\right)$ et $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2,-\frac{1}{2}\times 2,0\right)$.

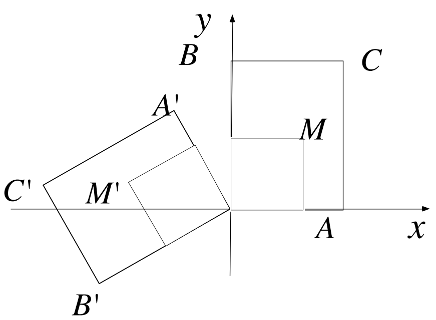

Fig. 15

Les coordonnées du point *C'* (Fig. 15), quatrième sommet du rectangle, sont égales à la somme des coordonnées des points *A'* et *B'*.

Ainsi, les coordonnées de l'image d'un point quelconque (x,y,z) son égales à

$$\left(-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y,z\right).$$

La réponse à la première question permet de mettre en évidence la structure du calcul sous forme de l'égalité suivante :

f(x,y,z) = xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) (L).

Elle est l'expression analytique des invariants de la rotation : l'alignement des points et le parallélisme des droites.

Cette égalité est confirmée dans le cas de la deuxième rotation. Elle signifie que les expressions analytiques des deux rotations étudiées sont entièrement établies à partir des images des points (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,1) (l'origine (0,0,0) est l'un des points fixes de la transformation).

La question suivante permettra d'institutionnaliser cette procédure et de délimiter son champ d'application.

4. Pour trouver l'image d'un point quelconque par la rotation considérée nous nous sommes servis de la propriété (L) suivante : pour tous les triplets (x,y,z)
f(x,y,z) = xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) (L).

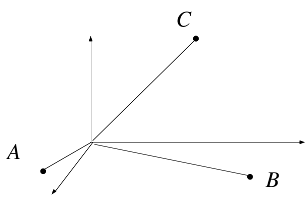

Fig.16

a) Sur la Fig.16 on représente les points A, B et C images des points de coordonnées

(1,0,0) , (0,1,0) et (0,0,1) par une transformation qui satisfait à la condition (L). Construisez l'image du point de coordonnées (1,1/3,1/2).

b) Quelles propriétés géométriques doivent être satisfaites par une transformation pour que son expression analytique satisfasse (L) ?

c) Notons f(1,0,0) , f(0,1,0) , f(0,0,1) respectivement par (a_1,a_2,a_3) , (b_1,b_2,b_3) et (c_1,c_2,c_3). Comment à partir de là peut-on établir l'expression de f(x,y,z) ? Comment peut-on la noter d'une manière compacte ?

d) Voici l'expression analytique d'une transformation de l'espace donnée par :
f(x,y,z) =

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right).$$

Peut-on la représenter matriciellement ? Pourquoi ?

La construction demandée à la question a) est représentée à la Fig. 17. Elle permet de mieux prendre conscience des propriétés géométriques présentes derrière la condition (L).

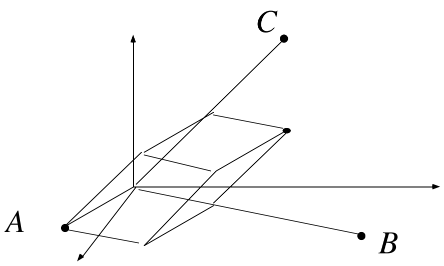

Fig. 17

b) L'égalité (L) exprime la conservation de la structure linéaire de l'ensemble des triplets. Elle est la conséquence de la conservation de l'alignement et des rapports de section et la conservation du parallélisme. De telles transformations s'appellent transformations affines. Remarquons que la condition (L) impose que l'image de (0,0,0) est (0,0,0), donc il s'agit des transformations qui ont, au moins, un point fixe : une translation, par exemple, est une transformation affine sans point fixe, donc elle ne satisfait pas la condition (L).

c) La condition (L) permet d'établir, dans un repère donné, l'expression analytique générale d'une transformation affine qui conserve l'origine :

f(x,y,z) =

$$x(a_1,a_2,a_3)+y(b_1,b_2,b_3)+z(c_1,c_2,c_3)$$
$$=(a_1x+b_1y+c_1z, a_2x+b_2y+$$
$$+c_2z, a_3x+b_3y+c_3z)$$

L'expression de chacune des composantes est un polynôme homogène du premier degré en *x, y* et *z*. Cette condition permet également d'associer une représentation matricielle à chaque transformation affine avec au moins un point fixe :

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Cette représentation dépend de choix du repère, mais elle implique que l'image de l'origine est toujours l'origine.

d) La transformation définie par les formules :

f(x,y,z) =

$$\left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2}\right),$$

envoie (1,0,0) sur (1,0,0), (0,1,0) sur (0,1,0) et (0,0,1) sur (0,0,1). Ainsi la matrice éventuelle de la transformation serait la matrice identique donc la transformation elle même serait identique. Cela n'est pas le cas car, par exemple, l'image du plan z = 1 est la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = z$ ou d'équation :

$$x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} .$$

Pour la même raison, cette transformation n'est pas affine car elle ne conserve pas l'alignement des points. D'autre part, son expression analytique n'est pas du premier degré en x, y et z. Ce contre-exemple permet de mieux comprendre le lien entre les propriétés affines d'une transformation, le premier degré dans son expression analytique et sa représentation matricielle.

On peut définir le rang d'une transformation affine (avec un point fixe) de la manière suivante :

— quand les triplets f(1,0,0) , f(0,1,0) et f(0,0,1) sont multiples entre eux, ou quand les points correspondants sont alignés avec l'origine, le rang est égal à 1,

— quand l'un des triplets f(1,0,0) , f(0,1,0) et f(0,0,1) est la combinaison linéaire des autres sans être tous multiples entre eux ou quand les points correspondants sont coplanaires sans être alignés avec l'origine, alors le rang est 2,

— quand aucun des triplets n'est combinaison linéaire de autres ou quand les points correspondants ne sont pas coplanaires alors le rang est 3.

L'écriture matricielle d'un système d'équations 3×3 permettra de conjecturer que le rang d'une transformation, le rang d'un système d'équations et le rang d'un système de vecteurs sont égaux quand la transformation et le système d'équations sont représentés par une même matrice, et le système des vecteurs est celui des vecteurs normaux.

6. Conclusion

Les prémisses des concepts fondamentaux de l'algèbre linéaire comme la dépendance et l'indépendance linéaires, le rang d'un système ou d'une matrice, la structure linéaire et sa dimension, peuvent être présentes dans un enseignement du calcul linéaire au niveau de l'école secondaire. L'étude des lieux qui s'appuie sur deux cadres, géométrique et algébrique, y contribue d'une manière significative. Les raisonnements synthétique-géométrique et analytique-algébrique sont concomitants et complémentaires.

Bibliographie

(1) J-L Dorier, avec les contributions de G. Harel, J. Hillel, M. Rogalski, J. Robinet, A. Robert, A. Sierpinska et *al*., *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* , ed. La pensée Sauvage, 1997 ;

(2) F. Borceux, *Invitation à la géométrie,* Ciaco éditeur, Louvain-la - Neuve,

(3) CREM, *Les mathématiques de la maternelle jusqu'à 18 ans*, Crem, Nivelles, 1985

(4) A-M Minet, *Des transformations au carrefour de trois géométies synthétique, analytique, vectorielle,* mémoire UCL, Louvain-la-Neuve, 1984 ;

(5) C. Pisvin, L'algèbre *linéaire au cycle secondaire, repères et propositions*, mémoire FUNDP, Namur, 1997.

(6) M-I. Grand'Henry-Krysinska, *Géométrie dans l'espace et géométrie de l'espace,* 2e éd. Proposition 17, GEM et Academia-Bruylant, 1998.