

CLES DE CONTROLE

Groupe Lycée
Irem de STRSABOURG

1. — EAN (European Artikel Number)

Presque tous les articles commercialisés sont identifiés par un code à 13 chiffres inscrit en “clair” pour le lecteur humain et sous forme de code à barres pour la saisie informatique. La procédure de codage utilisée fait l’objet d’une norme au niveau européen.

Un numéro EAN se décompose en 4 blocs dont les significations respectives sont détaillées ci-dessous (les livres et revues constituent un cas particulier qui sera examiné plus loin).

Les deux premiers chiffres correspondent au pays producteur (made in...)

Codes de quelques pays	
USA CANADA	00-09
FRANCE	30-37
ALLEMAGNE	40-43
JAPON	49
GRANDE BRETAGNE	50
BELGIQUE	54
DANEMARK	57
ITALIE	80-81
SUISSE	76
PAYS-BAS	87
AUTRICHE	90-91
Publications (livres, revue...)	97

3	1	4	8	9	5	3	3	7	2	8	7	8
PAYS		ENTREPRISE				ARTICLE					CLE	

Les dix chiffres suivant identifient l'entreprise productrice et le numéro de l'article au sein de cette entreprise.

Le dernier chiffre est une clé de contrôle dont nous allons dégager l'intérêt ci-dessous

Le principe de la clé du numéro EAN est le suivant : pour un numéro que nous noterons

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10} a_{11} a_{12} a_{13}$$

la clé a_{13} est choisie de telle manière que le nombre

$$C = a_1 + 3 \times a_2 + a_3 + 3 \times a_4 + a_5 + 3 \times a_6 + a_7 + 3 \times a_8 + a_9 + 3 \times a_{10} + a_{11} + 3 \times a_{12} + a_{13}$$

soit divisible par 10.

Ainsi dans le cas de l'exemple ci-dessus (EAN **3148953372878**) on a bien :

$$3 + 3 \times 1 + 4 + 3 \times 8 + 9 + 3 \times 5 + 3 + 3 \times 3 + 7 + 3 \times 2 + 8 + 3 \times 7 + 8 = 120$$

qui est bien divisible par 10.

Evidemment, l'adjonction d'un chiffre supplémentaire (la clé) n'a pas pour objectif d'entraîner les clients au calcul mental mais bien de tenter de détecter les éventuelles erreurs lors des frappes humaines ou les erreurs de lecture des capteurs électroniques.

On se doute bien que l'utilisation d'un seul chiffre pour en contrôler 12 ne fournira pas un moyen de contrôle infailible. Une autre procédure de contrôle serait la double saisie : on recopie deux fois le numéro demandé. La double saisie nécessite 12 chiffres pour en contrôler 12 et pourtant dans le cas (certes improbable) ou l'on reffrappe deux fois le même

numéro erroné, la procédure ne détectera pas l'erreur. Il importe donc de rechercher des procédures de vérification qui constituent un compromis acceptable entre l'économie (ne pas trop allonger l'information à contrôler) et l'efficacité (détecter " beaucoup " d'erreurs).

Nous allons constater que la clé à 1 chiffre (très économique) utilisée dans l'EAN est finalement très efficace.

Des études statistiques concernant des saisies humaines de suites d'environ 12 chiffres ont montré que les erreurs de frappe se répartissent (approximativement et sauf erreur...) selon les types ci-dessous :

Type d'erreur	fréquence
un seul chiffre faux	60%
mauvais nombre de chiffres	25%
inversion de 2 chiffres voisins	8%
deux chiffres faux	5%
autres	2%
Total	100%

Le nombre de chiffres saisis est aisé à vérifier et permet de détecter de manière certaine les erreurs correspondantes. Il reste à examiner les autres types d'erreurs fréquents.

Montrons que la clé EAN détecte toute erreur portant sur un seul des 13 chiffres.

Remarquons que la somme

$$C = a_1 + 3 \times a_2 + a_3 + 3 \times a_4 + a_5 + 3 \times a_6 + a_7 + 3 \times a_8 + a_9 + 3 \times a_{10} + a_{11} + 3 \times a_{12} + a_{13}$$

s'écrit encore :

$$C = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} + a_{13} + 3 \times (a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12})$$

Cela nous incite à envisager deux cas :

1. si le chiffre altéré est de rang impair, il intervient directement dans la somme et le dernier chiffres de celle-ci ne sera plus 0 puisque le chiffre correct et le chiffre erroné diffèrent d'un entier strictement inférieur à 10.

2. si le chiffre altéré est de rang pair et si nous désignons par n et n' respectivement la valeur exacte et la valeur erronée de ce chiffre, la différence entre la somme C correcte et divisible par 10 et celle réellement obtenue sera $3n - 3n' = 3(n - n')$. Cette différence ne peut-être un multiple de 10, car 3 est premier avec 10 et 10 ne divise pas $n - n'$ qui est strictement inférieur à 10 et non nul (Théorème de Gauss).

Dans les deux cas l'erreur sera détectée.

Dans le cas de l'interversion de deux chiffres voisins (... ab ... qui devient ... ba ...), en supposant, ce qui ne restreint pas la généralité, que a est de rang pair au départ la différence entre la somme C correcte et divisible par 10 et celle réellement obtenue sera $(3a + b) - (3b + a) = 2(a - b)$. Cette différence sera divisible par 10 si $(a - b)$ est divisible par 5 donc égal à 5 ou -5 , ce qui donne 10 couples de deux chiffres sur un total de 90 dont l'inversion ne sera pas détectée : 05 16 27 38 49 50 61 72 83 et 94. *L'inversion de deux chiffres consécutifs sera détectée dans 8 cas sur 9.*

En utilisant comme probabilités les fréquences de types d'erreurs données ci-dessus on peut minorer la probabilité de détecter une erreur grâce à la clé EAN par :

$$0.25 \times 1 + 0.60 \times 1 + 0.08 \times 8/9 \cong 0.921 .$$

On s'aperçoit que la clé EAN est efficace et économique puisqu'elle permet de déceler plus de 92% des erreurs, et ce, au prix de l'ajout d'un seul chiffre à une information qui en comporte 12 au départ.

2. — ISBN (International Standart Book Number)

Toutes les publications sont identifiées par un tel numéro. Il comporte 10 caractères dont les neuf premiers sont des chiffres et le dernier (la " clé ") est un chiffre ou, dans certains cas, la lettre X (cf. exemple en bas de page).

Les premiers chiffres donnent la langue (0=anglais, 2=français, 3=allemand, 4=japonaais, russe=5, 84=espagnol, 977=egyptien etc.)

Les chiffres suivant donnent le numéro d'éditeur et d'ouvrage. Les éditeurs les plus importants ont des codes à deux chiffres (de 00 a 19 par exemple, 01=Hachette, 04=Bordas) et disposent ainsi de plus de chiffres pour le code de l'ouvrage. Les " petits " éditeurs ont un code plus long (à 3 chiffres de 200 à 699, ou à 4 chiffres de 7000 à 8499, ou à 5

2	0	4	0	1	9	6	5	2	8
Langue	Editeur et numéro de l'ouvrage								Clé

chiffres de 85000 à 89999, ou à 6 chiffres de 90000 à 949999 ou même à 7 chiffres de 9500000 à 9999999, par exemple 9506960=Editions Archimède) et disposent ainsi de moins de place pour coder les ouvrages.

Dans le code ISBN

$$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8 a_9 a_{10}$$

la clé a_{10} est calculée de telle manière que la somme :

$$S = 10 \times a_1 + 9 \times a_2 + 8 \times a_3 + 7 \times a_4 + 6 \times a_5 + 5 \times a_6 + 4 \times a_7 + 3 \times a_8 + 2 \times a_9 + a_{10}$$

soit un multiple de 11. La valeur 10 est remplacée par X.

On peut encore écrire que $S = \sum_{i=1}^{i=10} (11 - i)a_i$ doit être un multiple de 11.

La clé ISBN permet, elle aussi, de détecter toute altération d'un seul chiffre. Si a_i est remplacé par un chiffre différent a'_i la différence entre la somme S initiale et la nouvel-

le somme S' sera $S' - S = (11 - i)(a'_i - a_i)$. Cette différence n'est pas un multiple de 11 car chaque facteur est non nul et strictement inférieur à 11.

L'interversion de deux chiffres voisins sera, elle aussi, détectée. En effet si a_i est permuté avec a_{i+1} la différence entre la somme S initiale et la nouvelle somme S' sera :

$$S - S' = [(11 - i)a_i + (11 - i - 1)a_{i+1}] - [(11 - i)a_{i+1} + (11 - i - 1)a_i] = a_i - a_{i+1}$$

et n'est pas un multiple de 11.

On obtient le code EAN d'un livre en juxtaposant "978" puis le code ISBN sans sa clé, puis la clé du code EAN. Par exemple :

A partir du code ISBN 2 01 135037 **9**
on supprime la clé, 2 01 135037
on ajoute 978 devant, **978** 2 01 135037
on calcule la clé EAN :

$$9 + 3 \times 7 + 8 + 3 \times 2 + 0 + 3 \times 1 + 1 + 3 \times 3 + 5 + 3 \times 0 + 3 + 3 \times 7 = 86$$

et on obtient le code EAN : 978 2 01 135037 **4**

ANNEXE

Enoncés d'exercices pour les élèves.

La clé EAN

1) Parmi les codes EAN de produits français ci-dessous, lesquels ne sont pas acceptables ?

3133200185806 3178047245916 4059940008351 3034250007820

2) On donne les 12 premiers chiffres des code EAN d'articles, calculer la clé. On cherchera à trouver une méthode plus efficace que le calcul explicite complet.

400580885538 321965081111 321965081110 321965080201

Question subsidiaire (ce n'est pas une question d'arithmétique !) : quel fabricant de produits de beauté voit ici figurer les codes EAN de trois de ses productions ? (Faire parvenir toute contribution volontaire à cette publicité gratuite à l'Irem de Strasbourg.)

3) Montrer que, pour deux entiers distincts n et n' inférieurs à 10, $3 \times n$ et $3 \times n'$ ne se terminent jamais par le même chiffre. En déduire que la clé EAN détecte toute erreur portant sur un seul des 13 chiffres (on distinguera le cas d'un chiffre de rang pair et celui d'un chiffre de rang impair).

4) Montrer que l'inversion de deux chiffres voisins ($..ab..$ qui devient $..ba..$) ne sera pas détectée par la procédure EAN si la différence $(3a + b) - (3b + a)$ est divisible par dix. En déduire la liste de tous les blocs de deux chiffres dont l'inversion ne sera pas détectée.

5) En utilisant comme probabilités les fréquences de types d'erreurs données dans le tableau ci-dessus, donner une majoration de la probabilité qu'une erreur ne soit pas détectée par la clé EAN.

... / ...

La clé ISBN

6) Montrer que la clé ISBN permet de détecter toutes les erreurs portant sur un seul caractère.

7) Montrer que la clé ISBN permet de détecter toutes les inversions de deux chiffres consécutifs.

8) On obtient le code EAN d'un livre en juxtaposant " 978 " puis le code ISBN sans sa clé, puis la clé du code EAN. On donne ci-dessous des codes EAN ou ISBN. Trouver dans chaque cas le code manquant.

	2100037811
9782278046775	
	2950696007

Entête à
compléter
←