INTERVENTIONS DES LIEUX DANS LES PROBLEMES DE CONSTRUCTIONS

J.-M. BOUSCASSE,
M.-C. CHAUMET, P. DAMEY,
A. & C. GOUTEYRON,
R. POMES, B. PINET,
J. PUYOU, Y. ROBERT

Irem d'Aquitaine

Dans un problème dit “ de construction ” on demande de construire une figure satisfaisant à des conditions imposées, la construction d'une telle figure n'étant pas *a priori* évidente.

Résoudre un problème de construction c'est déterminer l'ensemble de toutes les solutions, autrement dit de toutes les figures satisfaisant aux conditions imposées. Lorsque cet ensemble est non vide, il convient, par ailleurs, de décrire comment construire la ou les figure(s)-solution(s) du problème.

Nous n'avons pas imposé ici de contraintes instrumentales aux constructions envisagées.

COMMENT RÉSOUDRE UN PROBLÈME DE CONSTRUCTION ?

On ne dispose pas d'une méthode standard pour résoudre ce type de problème. Toutefois, on peut s'inspirer des techniques brièvement décrites dans les alinéas suivants:

Méthode 1 : On utilise les propriétés inhérentes à la figure qu'on demande de construire.

Méthode 2 : On commence par étudier des problèmes dits “ intermédiaires ” *dans lesquels on ne prend en compte qu'une partie des condi-*

tions imposées. Pour chaque problème intermédiaire envisagé, on détermine le lieu géométrique des points clés de la figure à construire (ces points n'étant pas soumis à la totalité des conditions auxquelles ils sont initialement assujettis).

Dès lors toute solution du problème initial ne peut être qu'une solution commune à tous les problèmes intermédiaires traités. Ce qui se traduit en pratique par l'intersection des lieux géométriques solutions de chacun des problèmes intermédiaires.

Méthode 3 : Lorsque, au départ, certains constituants de la figure à construire sont donnés, la difficulté du problème peut provenir du fait que l'ordre de mise en place des constituants de cette figure se trouve en partie préimposé. Pour contourner cette difficulté, on peut alors imaginer de construire l'image de la figure demandée par une transformation géométrique bijective **T** judicieusement choisie : translation, homothétie, réflexion, ... On remplace ainsi le problème initial par un deuxième problème. On remarquera que, pour **T** fixée :

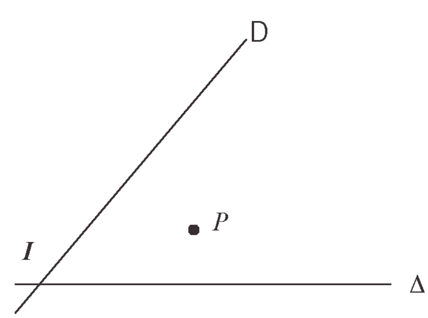
— si $\mathcal{F}$ est une figure-solution du problème initial, alors T($\mathcal{F}$) est une figure-solution du deuxième problème ;

— réciproquement, si $\mathcal{F}$' est une figure-solution du deuxième problème, alors $T^{-1}(\mathcal{F}')$ est une solution du problème initial. Autrement dit, le problème initial et le deuxième problème ont, à la transformation **T** près, les mêmes figures-solutions.

Remarques :
— cette liste n'est pas exhaustive ;
— dans un même problème on peut utiliser deux, voire les trois techniques décrites ci-dessus ;
— dans cet article nous avons volontairement privilégié la **méthode 2** car elle s'appuie sur la détermination de lieux géométriques. Nous l'avons mise en évidence dans des situations accesibles aux élèves de *collège et lycée* où les lieux obtenus sont inclus dans des droites ou des cercles. Toutefois nous présentons en annexe des résolutions des mêmes exercices avec d'autres méthodes ;
— nous n'avons pas explicité la réalisation pratique des figures avec des outils imposés ;
— les outils mathématiques utilisés sont les configurations et les transformations au fur et à mesure de leur intervention dans les programmes de collège et de lycée.

Dans les pages qui suivent, nous nous plaçons dans le plan euclidien et, un nombre l étant donné, nous écrirons AB = l pour indiquer que la longueur du segment [AB] est l.

EXERCICE 1 : Dans le plan $\mathcal{P}$ sont donnés deux droites sécantes Δ et $\mathcal{D}$ et un point P n'appartenant ni à Δ ni à $\mathcal{D}$.



Construire un segment [AB] satisfaisant aux conditions suivantes :

(**C1**) A $\in$ Δ ;

(**C2**) B $\in$ $\mathcal{D}$;

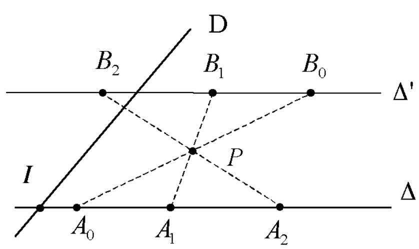
(**C3**) P est milieu du segment [AB] .

Résolution

1ère étape : on abandonne la condition (**C2**).

Les données du problème initial étant conservées, on considère le problème intermédiaire :

Construire un segment [AB] satisfaisant aux conditions :
(**C1**) $A \in \Delta$;
(**C3**) P est milieu du segment [AB] .



Il est clair que ce problème admet une infinité de solutions. Lorsque A décrit Δ, le lieu des points B tels que P soit le milieu du segment [AB] est la droite Δ' transformée de Δ par la symétrie s_P de centre P.

Ceci dit, la droite $\mathcal{D}$ coupant Δ coupe aussi la droite Δ' qui est parallèle à Δ. Dès lors, si le problème initial admet une figure-solution, dans cette figure :

— B ne peut être que le point commun à Δ' (lieu obtenu dans le problème intermédiaire) et $\mathcal{D}$ (condition (**C2**)).

— A ne peut être que le transformé de ce point par la symétrie s_P.

Le problème posé admet **au plus** une solution et une seule.

2ème étape : On contrôle si les points A et B précédemment retenus sont effectivement éléments d'une figure-solution du problème.

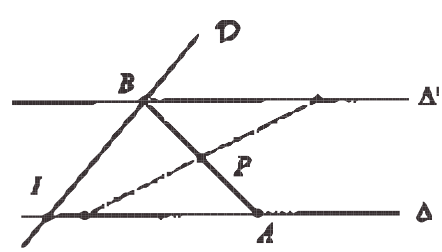
Ici, B appartient à $\mathcal{D}$ et P est le milieu de [AB] car $A = s_P(B)$ (ici $s_P^{-1} = s_P$).

En outre, comme B appartient également à Δ', son transformé A par s_P se trouve sur la droite $s_P(\Delta')$ c'est-à-dire Δ .

Les conditions (**C1**) , (**C2**) et (**C3**) sont donc satisfaites.

Conclusion : le problème posé admet une solution et une seule.

Plan de construction de la figure-solution.



— on trace Δ' transformée de Δ par la symétrie s_P de centre P ;

— on place le point B commun à $\mathcal{D}$ et Δ' ;

— on place A transformé de B par s_P ; le point A est l'intersection des droites Δ et (BP) ;

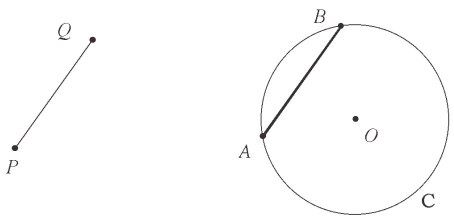
— on trace le segment [AB].

Remarques :

— l'abandon de la condition (**C1**) conduit à un problème intermédiaire analogue ;

— l'abandon de la condition (**C3**) n'aurait pas de sens par rapport au problème posé.

EXERCICE 2 : Dans le plan $\mathcal{P}$ sont donnés un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon r et deux points P et Q tels que $0 < PQ < 2r$.



Construire un bipoint (A,B) satisfaisant aux conditions suivantes :

(**C1**) $A \in \mathcal{C}$;

(**C2**) $B \in \mathcal{C}$;

(**C3**) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$.

Si $PQ > 2r$, le problème posé n'admet évidemment pas de solution. Le cas $PQ = 2r$ est laissé au soin du lecteur.

Résolution

Démarche 1

1ère étape : on abandonne la condition (**C2**).

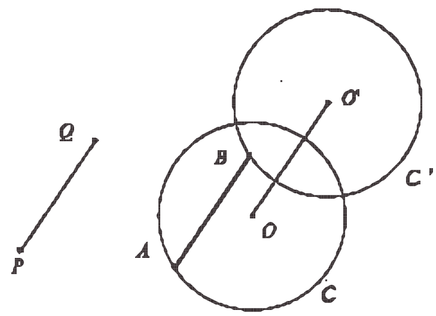
Les données du problème initial étant conservées, on considère le problème intermédiaire :

Construire un bipoint (A,B) satisfaisant aux conditions suivantes :

(**C1**) $A \in \mathcal{C}$;

(**C3**) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$.

Il est clair que ce problème admet une infinité de solutions. Lorsque A décrit le cercle $\mathcal{C}$, le lieu des points B tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ est le cercle $\mathcal{C}'$ transformé du cercle $\mathcal{C}$ par la translation t_{PQ} .



Le centre du cercle $\mathcal{C}'$ est le point O' transformé de O par cette translation et on a : $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{PQ}$.

Le rayon du cercle $\mathcal{C}'$ est r ; du fait que : $0 < OO' < 2r$, les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants.

Dès lors, si le problème initial admet une figure-solution, dans cette figure :

— B ne peut être qu'un des deux points B_1 ou B_2 communs aux cercles $\mathcal{C}$ (condition (**C2**)) et $\mathcal{C}'$ (lieu obtenu dans le problème intermédiaire) ;

— A ne peut être que le transformé de B par la translation t_{QP} (ici $t_{PQ}^{-1} = t_{QP}$)

Le problème posé admet donc au plus deux solutions.

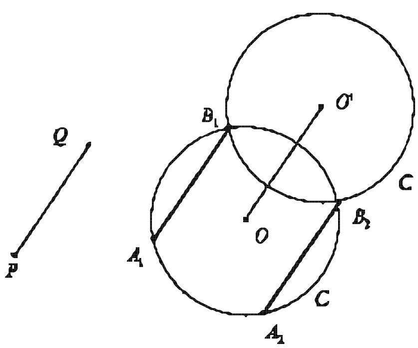
2ème étape : on contrôle si les bipoints (A_1, B_1) et (A_2, B_2) précédemment retenus sont effectivement des constituants d'une figure-solution du problème.

Ici, B_1 et B_2 sont éléments de $\mathcal{C}$. En outre, comme B_1 et B_2 sont éléments de $\mathcal{C}'$, les points A_1 et A_2 sont éléments de $t_{QP}(\mathcal{C}')$, c'est-à-dire de $\mathcal{C}$.

Ainsi, (A_1, B_1) et (A_2, B_2) vérifient les conditions (**C1**), (**C2**) et (**C3**).

Conclusion : le problème admet donc deux solutions et deux seulement.

Plan de construction des deux figures-solutions :



— on trace le cercle $\mathcal{C}'$, transformé de $\mathcal{C}$ par la translation t_{PQ} ;
— on place les points B_1 et B_2 communs aux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$;
— on place les points A_1 et A_2 transformés des points B_1 et B_2 par la translation t_{QP}.

Les points A_1 et A_2 sont respectivement les intersections du cercle C et des parallèles à la droite (PQ) menées par les points B_1 et B_2 ; on a ainsi obtenu les bipoints (A_1, B_1) et (A_2, B_2).

Démarche 2

1ère étape : le problème posé peut se ramener à la construction du milieu I de [AB].

La condition (**C3**) est équivalente à l'ensemble des trois conditions :

(**C3$_1$**) (AB) // (PQ) ;

(**C3$_2$**) les bipoints (A, B) et (P, Q) ont même sens ;

(**C3$_3$**) AB = PQ .

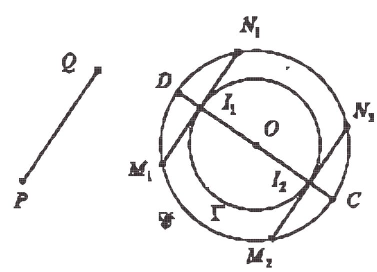
On peut alors considérer les deux problèmes intermédiaires suivants :

❑ **Problème 1 :** on abandonne les conditions (**C3$_2$**) et (**C3$_3$**).

Ainsi on cherche à construire le milieu I de [AB] sachant que :
(**C1**) $A \in \mathcal{C}$;
(**C2**) $B \in \mathcal{C}$;
(**C3$_1$**) (AB) // (PQ) .

❑ **Problème 2 :** on abandonne les conditions (**C3$_1$**) et (**C3$_2$**)

Ainsi on cherche à construire le milieu I de [AB] sachant que :
(**C1**) $A \in \mathcal{C}$;
(**C2**) $B \in \mathcal{C}$;
(**C3$_3$**) AB = PQ .



■ **Problème 1** : le lieu de I milieu de [AB] est le diamètre [CD] de $\mathcal{C}$ dont la direction est orthogonale à celle de (PQ).

■ **Problème 2** : le lieu de I milieu de [AB] est le cercle Γ de centre *O* tangent à une corde de longueur PQ.

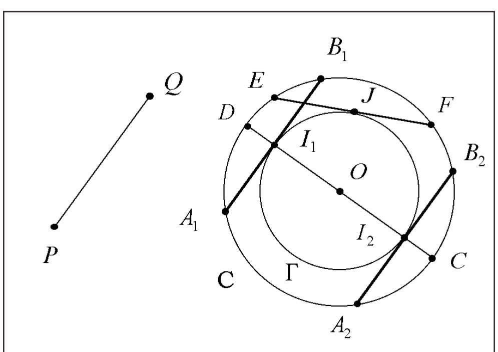
Dès lors, si le problème initial admet une figure-solution, dans cette figure :

— le point *I* ne peut être que l'un des deux points I_1 ou I_2 communs au diamètre [CD] de *C* et au cercle Γ ;
— on considère les intersections M_1 et N_1 (respectivement M_2 et N_2) de la perpendiculaire à la droite (CD) passant par I_1 (respectivement I_2) et du cercle *C* .

Le problème posé admet donc au plus quatre solutions : les bipoints (M_1 , N_1), (N_1 , M_1), (M_2 , N_2) et (N_2 , M_2).

2ème étape : on contrôle si les bipoints (M_1 , N_1), (N_1 , M_1), (M_2 , N_2) et (N_2 , M_2) sont effectivement des constituants d'une figure-solution du problème. La condition (**C3₂**) permet de conserver (dans le cas de figure considéré) les bipoints (M_1 , N_1) et (M_2 , N_2) que nous renommerons (A_1 , B_1) et (A_2 , B_2).

Plan de construction des deux figures-solutions :



— on trace la perpendiculaire à la droite (PQ) passant par *O* ; elle coupe le cercle *C* en *C* et *D* ;

— on trace sur le cercle *C* une corde [EF] telle que EF = PQ , on appelle *J* le milieu de de cette corde [EF] , puis on trace le cercle Γ de centre *O* passant par *J* ;

— le cercle Γ coupe le segment [CD] en I_1 et I_2 ;

— la perpendiculaire en I_1 à la droite (CD) coupe le cercle C en deux points ; la condition (**$C3_2$**) permet de retenir le couple de points qui convient ; la perpendiculaire à I_2 à la droite (CD) conduit de même à un autre couple de points.

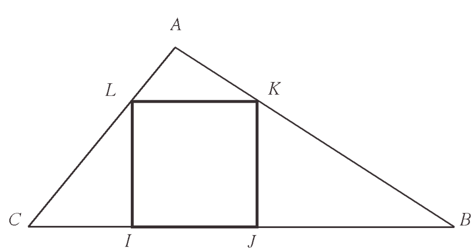
EXERCICE 3 : Soit un triangle *ABC* construire un quadrilatère *IJKL* vérifiant les contraintes suivantes :

(**C1**) les points *I* et *J* sont sur la droite (*BC*) et les bipoints (I, J) et (C, B) sont de même sens ;

(**C2**) le point *K* est sur le segment [AB] ;

(**C3**) le point *L* est sur le segment [AC] ;

(**C4**) le quadrilatère *IJKL* est un carré.



Résolution

L'utilisation d'une homothétie permet d'obtenir *une solution* au problème posé dans la plupart des cas de figure (mais pas dans tous).

De manière à résoudre complétement cet exercice, nous allons le traiter par la *méthode 2*… On s'intéresse alors au centre du carré *IJKL*.

1ère étape

a) *On abandonne la condition* (**C2**) .

Les données du problème initial étant conservées, on considère le problème intermédiaire :

Construire un quadrilatère *IJKL* satisfaisant aux conditions suivantes :

(**C1**) les points *I* et *J* sont sur la droite (*BC*) et les bipoints (I, J) et (C, B) sont de même sens ;

(**C3**) le point *L* est sur le segment [AC] ;

(**C4**) le quadrilatère *IJKL* est un carré.

La figure ci-dessous présente une solution particulière du problème intermédiaire, celle qui comporte le carré $I_0J_0K_0L_0$ dont le sommet L_0 est confondu avec le point *A*.

Toute solution de ce problème intermédiaire comporte un carré *IJKL* dont le centre *O* est l'image de celui O_0 du carré $I_0J_0K_0L_0$ par l'homothétie qui transforme :

(i) le bipoint (I_0, J_0) en le bipoint (I, J) ;

(ii) le point L_0 en le point *L*.

Cette homothétie a :

— pour centre *C*, d'après (*i*) et (*ii*);

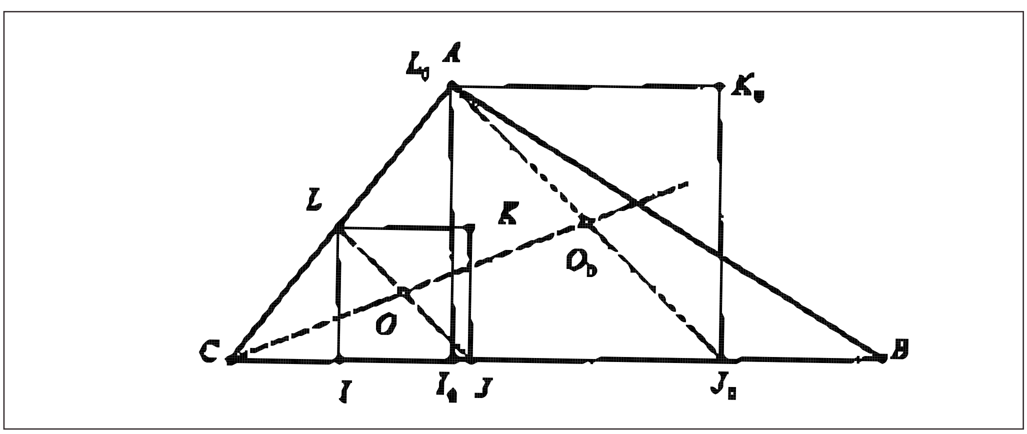
— son rapport positif d'après (*i*) car les bipoints (I, J) et (I_0, J_0) sont de même sens ;

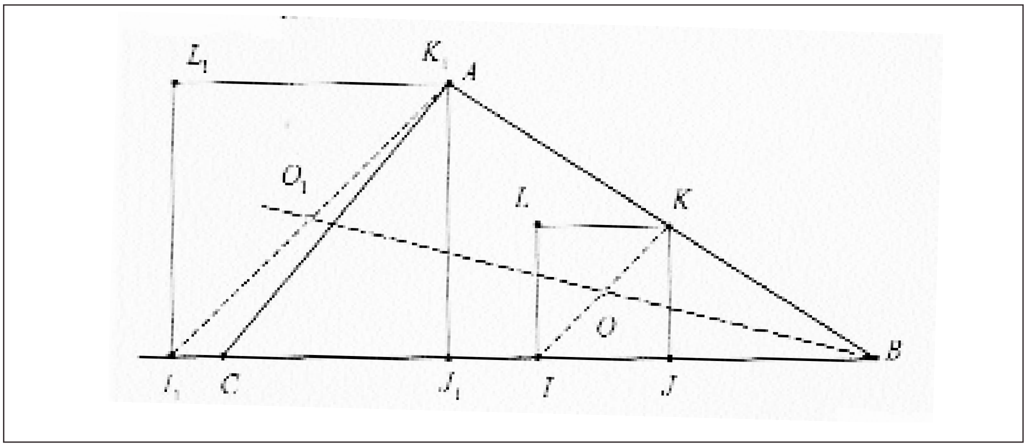
— son rapport inférieur ou égal à 1 d'après (*ii*).

Par conséquent le point *O* appartient au segment $[CO_0]$.

Il en résulte que le lieu du point *O* dans ce problème intermédiaire est inclus dans le segment $[CO_0]$.

b) *On abandonne la condition* (**C3**) . Les données du problème initial étant conservées,





on considère le problème intermédiaire :

Construire un quadrilatère *IJKL* satisfaisant aux conditions suivantes :

(**C1**) les points *I* et *J* sont sur la droite (*BC*) et les bipoints (I, J) et (C, B) sont de même sens ;

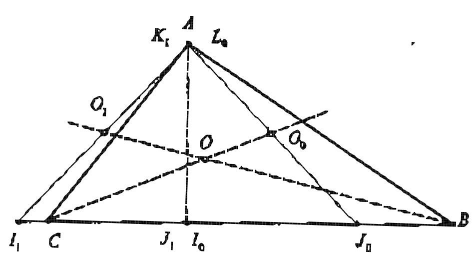
(**C2**) le point *K* est sur le segment [AB] ;

(**C4**) le quadrilatère *IJKL* est un carré.

Une étude analogue à celle du paragraphe précédent permet de montrer que le lieu du point *O* est inclus dans le segment $[BO_1]$ où O_1 est le centre du carré $I_1J_1K_1L_1$ qui fait partie de la solution particulière de ce deuxième problème intermédiaire avec $K_1 = A$.

Conclusion : le problème posé admet au plus une solution celle qui contient le carré *IJKL* dont le centre est le point *O* intersection des segments $[CO_0]$ et $[BO_1]$.

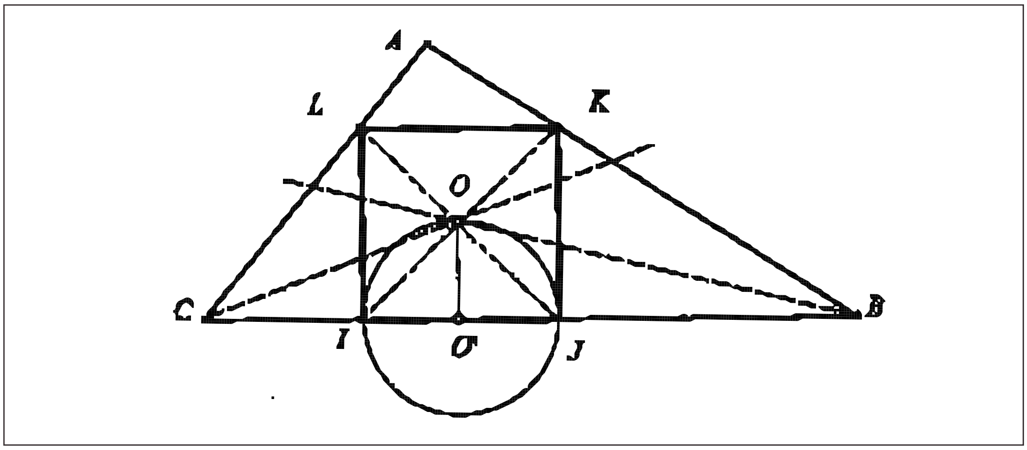
Les segments $[CO_0]$ et $[BO_1]$ sont sécants. En effet, on a $\overrightarrow{O_0O_1} = \frac{1}{2} . \overrightarrow{J_0I_1} = - \overrightarrow{I_0J_0}$ donc d'après la condition (**C1**) les bipoints (O_0, O_1) et (C, B) sont de sens contraires, d'où le résultat annoncé.



2ème étape et plan de construction

On vérifie que le point *O* précédemment construit conduit à une figure-solution.

On construit le projeté orthogonal *O'* de *O* sur (BC) puis les points *I* et *J* intersections du cercle de centre *O'* et de rayon *OO'* et de



la droite (BC) avec la condition C, I, J et B alignés dans cet ordre.

La droite (IO) coupe le segment [AB] en K, la droite (JO) coupe le segment [AC] en L.

Le point O est le milieu des segments [IK] et [JL] . Le quadrilatère $IJKL$ dont les diagonales sont orthogonales, ont même milieu et même longueur, est un carré.

Conclusion : le problème posé admet une seule figure-solution.

EXERCICE 4

Soit deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sécantes en I, un point F n'appartenant ni à $\mathcal{D}_1$, ni à $\mathcal{D}_2$.

Construire les points M communs aux paraboles $\mathcal{P}_1$ (de foyer F et de directrice $\mathcal{D}_1$) et $\mathcal{P}_2$ (de foyer F et de directrice $\mathcal{D}_2$).

Ce problème est équivalent au problème suivant :

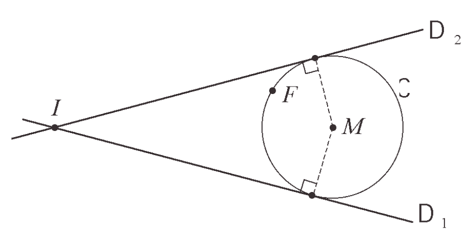
Soit deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sécantes en I, un point F n'appartenant ni à $\mathcal{D}_1$, ni à $\mathcal{D}_2$.

Construire les centres M des cercles $\mathcal{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

(**C1**) $\mathcal{C}$ est tangent à $\mathcal{D}_1$;

(**C2**) $\mathcal{C}$ est tangent à $\mathcal{D}_2$;

(**C3**) $\mathcal{C}$ passe par F.



Remarque :

La parabole $\mathcal{P}_1$ est le lieu solution du problème intermédiaire obtenu en abandonnant la condition (**C2**) .

La parabole $\mathcal{P}_2$ est le lieu solution du problème intermédiaire obtenu en abandonnant la condition (**C1**) .

On remplace ici le problème de la construction d'une intersection de lieux par un autre problème de construction.

Résolution

1ère étape

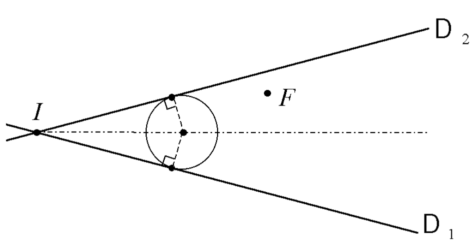
a) *On abandonne la condition* (**C3**) .

Les données du problème initial étant conservées, on considère le problème intermédiaire :

Construire les centres M des cercles $\mathcal{C}$ vérifiant les conditions suivantes :

(**C1**) $\mathcal{C}$ est tangent à $\mathcal{D}_1$;

(**C2**) $\mathcal{C}$ est tangent à $\mathcal{D}_2$.

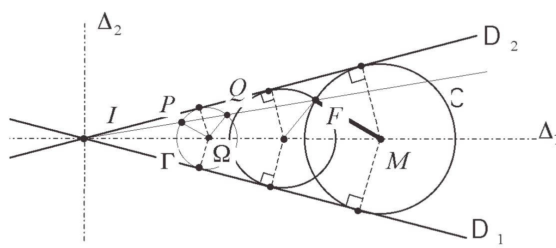


Il est clair que ce problème intermédiaire admet une infinité de solutions, à savoir l'union $\Delta_1 \cup \Delta_2$ des axes de symétrie qui échangent les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Dès lors si le problème initial admet une figure solution, dans cette figure :

— $M \in \Delta_1 \cup \Delta_2$;

— $F \in \mathcal{C}$.



Un cercle tangent à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sera contenu dans le secteur angulaire délimité par $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et contenant F.

Soit Γ un cercle de centre Ω contenu dans ce secteur et tangent à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Les cercles $\mathcal{C}$ cherchés se déduisent de Γ par une homothétie de centre I et de rapport positif. Le point F est donc l'image d'un point de Γ par une telle homothétie.

La droite (IF) coupe Γ en deux points P et Q, car F n'appartient ni à $\mathcal{D}_1$, ni à $\mathcal{D}_2$.

Les seules homothéties transformant Γ en une figure-solution sont donc l'homothétie de centre I qui envoie P sur F et l'homothétie de centre I qui envoie Q sur F. Les points M solutions sont les images de Ω par ces homothéties.

Conclusion : le problème posé admet deux solutions et deux seulement. La construction découle de ce qui précède.

EXERCICE 5

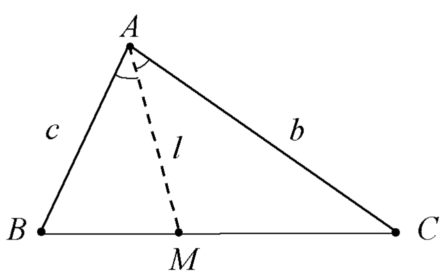
Dans un triangle *ABC* on appelle *M* le pied de la bissectrice intérieure issue de *A*.

Soit deux points A et *B* du plan P et des réels *b* et *l* strictement positifs.

Construire un triangle *ABC* satisfaisant aux conditions suivantes :

(**C1**) AC = b ;

(**C2**) AM = l.



Résolution

On pose AB = c .

Rappelons que le point *M* du segment [BC] est **caractérisé** par la relation :

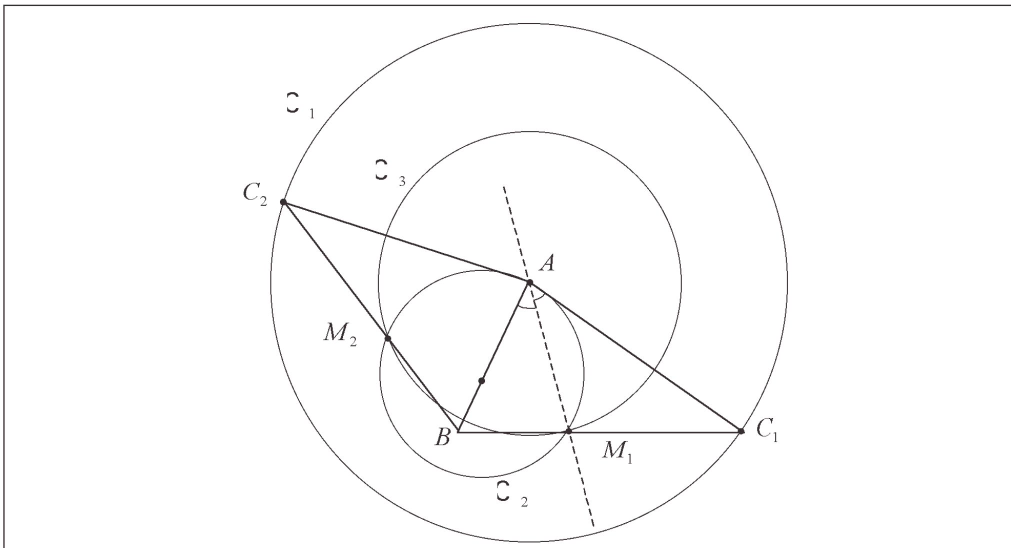
$$\frac{\mathrm{MB}}{\mathrm{MC}} = \frac{c}{b} \quad (*).$$

1$^{\text{ère}}$ étape : on abandonne la condition (**C2**) et on s'intéresse au lieu du point *M*.

Le point *M* est l'image du point *C* dans l'homothétie **h** de centre *B* et de rapport $\frac{c}{b+c}$.

Le point *C* appartient au cercle $\mathcal{C}_1$ de centre *A* et de rayon *b*, par conséquent le point *M* appartient au cercle $\mathcal{C}_2 = \mathrm{h}(\mathcal{C}_1)$.

Dès lors, si problème initial admet une figure-solution, dans cette figure :



— M ne peut être que l'un des points d'intersection M_1 et M_2 de $\mathcal{C}_2$ et du cercle $\mathcal{C}_3$ de centre A et de rayon l (condition (**C2**)).

— C ne peut être que le point d'intersection C_1 du cercle $\mathcal{C}_1$ et de la demi-droite $[BM_1)$ ou le point d'intersection C_2 du cercle $\mathcal{C}_1$ et de la demi-droite $[BM_2)$.

Conclusion : le problème posé admet au plus deux solutions symétriques par rapport à la droite (AB).

2ème étape

— on trace le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre A et de rayon b ;
— on trace le cercle $\mathcal{C}_2 = \mathrm{h}(\mathcal{C}_1)$; ce cercle passe par A et a pour rayon $\dfrac{bc}{b+c}$.
— on trace le cercle $\mathcal{C}_3$ de centre A et de rayon l .

Les points M cherchés sont, s'ils existent, les points communs aux cercles $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

Trois cas peuvent se présenter :

1) $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \emptyset$ pas de solution.

2) $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \{ M \}$ dans ce cas les points A, B et M sont alignés donc pas de solution.

3) $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \{ M_1, M_2 \}$ le point C ne peut être que le point d'intersection C_1 du cercle $\mathcal{C}_1$ et de la demi-droite $[BM_1)$ ou le point d'intersection C_2 du cercle $\mathcal{C}_1$ et de la demi-droite $[BM_2)$.

Les points M_1 et M_2 des segments $[BC_1]$ et $[BC_2]$ vérifient la relation (*) et sont les pieds des bissectrices intérieures issues de A dans les triangles ABC_1 et ABC_2 .

Discussion :

Cette discussion porte sur l'intersection des cercles $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

Le cercle $\mathcal{C}_2$ passe par le centre A du cercle $\mathcal{C}_3$. Il nous faut donc comparer le diamètre de $\mathcal{C}_2$ et le rayon de $\mathcal{C}_3$.

Ainsi :

1) $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2bc}{b+c} < l$;

2) $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \{ M \} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2bc}{b+c} = l$;

3) $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \{ M_1, M_2 \} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{2bc}{b+c} > l$.

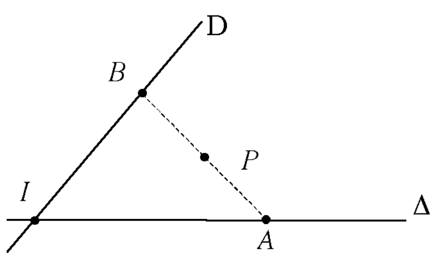
Conclusion : le problème posé admet deux solutions et deux seulement lorsque $\dfrac{2bc}{b+c} > l$ et aucune dans le cas contraire.

ANNEXE

La méthode de résolution privilégiée dans l'article n'est ni la seule, ni toujours la plus pertinente. A titre d'exemple nous présentons une résolution de l'exercice 1 avec la *méthode 1* et de l'exercice 2 avec la *méthode 3.* Le point de départ de la résolution dans les méthodes 1 et 3 est l'étude d'une figure solution dont on suppose *a priori* l'existence.

EXERCICE 1 (Méthode 1)

Dans le plan $\mathcal{P}$ sont donnés deux droites sécantes Δ et $\mathcal{D}$ et un point P n'appartenant ni à Δ ni à $\mathcal{D}$.



Construire un segment [AB] satisfaisant aux conditions suivantes :

(**C1**) $A \in \Delta$;

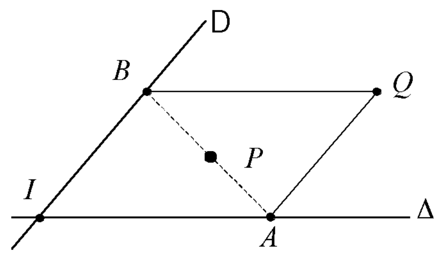
(**C2**) $B \in \mathcal{D}$;

(**C3**) P est milieu du segment [AB] .

Résolution

1ère étape

Le segment [AB] a pour milieu le point P. Soit Q le point tel que le quadrilatère AIBQ est un parallélogramme. Dès lors, **si** le problème posé admet une figure-solution, dans cette figure, le point A ne peut être que l'intersection de la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par Q et le point B l'intersection de la droite (AP) et de $\mathcal{D}$.



Conclusion : le problème posé admet **au plus** une solution.

2ème étape : on contrôle que les points A et B précédemment obtenus sont **effectivement** éléments d'une figure-solution du problème.

Ici, A et B sont respectivement éléments de Δ et $\mathcal{D}$. En outre, étant donné que le quadrilatère $AIBQ$ est un parallélogramme et que P est le milieu de [IQ], on est assuré que P est aussi le milieu de [AB] .

Les conditions (**C1**) , (**C2**) et (**C3**) sont donc satisfaites.

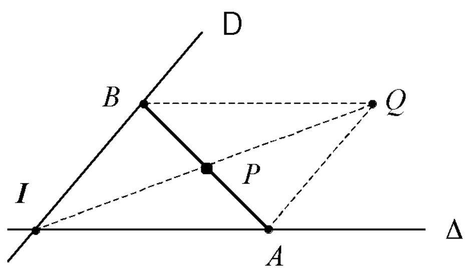
Conclusion : le problème posé admet une solution et une seule.

Plan de construction de la figure-solution.

— on place le point Q symétrique de I para rapport à P ;

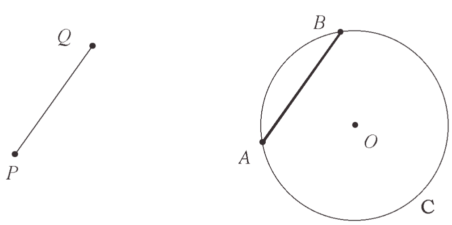
— on place le point A intersection de Δ et de la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par Q ;

— on place le point B intersection de $\mathcal{D}$ et de la droite (AP) .



EXERCICE 2 (Méthode 3)

Dans le plan $\mathcal{P}$ sont donnés un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, de rayon r et deux points P et Q tels que $0 < PQ < 2r$.



Construire un bipoint (A,B) satisfaisant aux conditions suivantes :

(**C1**) $A \in \mathcal{C}$;

(**C2**) $B \in \mathcal{C}$;

(**C3**) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$.

On sait qu'une translation transforme :

— un bipoint (A, B) en un bipoint (A', B') avec $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$;

— un cercle en un cercle de même rayon et dont le centre est l'image du centre du premier cercle par la translation considérée.

Ainsi, si le problème posé admet une figure-solution, la translation qui envoie le bipoint (A, B) sur le bipoint (P, Q) transforme le cercle $\mathcal{C}$ en un cercle de même rayon passant par P et Q.

On est amené à résoudre le problème suivant (cf. figure page suivante) :

Construire un cercle de rayon r passant par P et Q.

Il est clair que ce dernier problème admet deux figures-solutions car $PQ < 2r$:

— $\mathcal{F}_1$ constituée du cercle $\mathcal{C}_1$ de centre Ω_1 et du bipoint (P, Q) ;

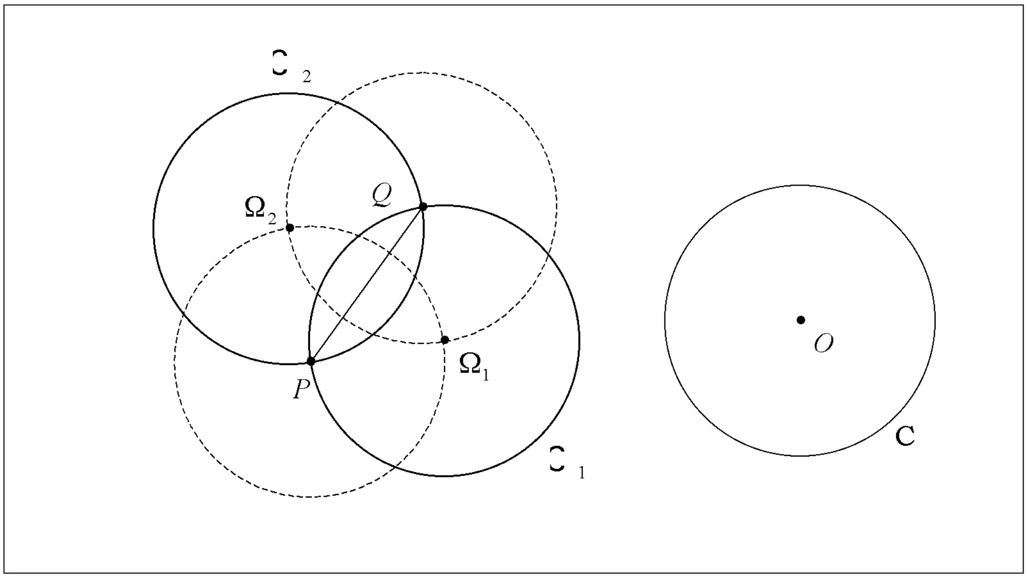
— $\mathcal{F}_2$ constituée du cercle $\mathcal{C}_2$ de centre Ω_2 et du bipoint (P, Q) .

Par conséquent le problème initial admet deux figures-solutions :

— la transformée de la figure $\mathcal{F}_1$ par la translation $\boldsymbol{t}_{\Omega_1 O}$;

— la transformée de la figure $\mathcal{F}_1$ par la translation $\boldsymbol{t}_{\Omega_2 O}$;

On en déduit le plan de construction.



Conclusion

Le mot construction est souvent employé au collège ou au lycée au sens de réalisation pratique d'**une** figure c'est à dire de la détermination d'**une** figure-solution.

Nous avons ici pris l'expression **problème de construction** au sens de la détermination de toutes les figures-solutions et abordé quelques unes des méthodes qui permettent de résoudre ces problèmes en développant particulièrement celles qui s'appuient sur l'étude de lieux géométriques.

Les exercices qui nous ont servi de support sont accessibles aux élèves de lycée, voire de collège. Nous avons essayé de donner quelques pistes pour réhabiliter dans notre enseignement tout à la fois l'étude des lieux géométriques et celle des problèmes de constructions.

BIBLIOGRAPHIE

[1] **FRESNEL Jean:** “Géométrie”, *Hermann.*

[2] **GROUPE DE GEOMETRIE:** “Points de départ en Géométrie dans l’espace”, *IREM de Bordeaux (1991).*

[3] **GROUPE DE GEOMETRIE:** “Angles de couples de vecteurs non nuls et Rotations” *IREM de Bordeaux, (1998).*

[4] **GROUPE DE GEOMETRIE:** “Cinq problèmes de Géométrie”, *IREM de Bordeaux, (1989).*

[5] **GROUPE DE GEOMETRIE**: “Activité géométriques en classe de Seconde”, *IREM de Bordeaux, (1981).*

[6] **GROUPE DE GEOMETRIE**: “Aires et quadrillages”, *IREM de Bordeaux (à paraître).*

[7] **GROUPE DE GEOMETRIE**: “L’enseignement des vecteurs”, *IREM de Bordeaux, (1992).*

[8] **GROUPE DE GEOMETRIE:** “Similitudes”, *IREM de Bordeaux, (1999)*

[9] **LEHMANN Daniel - BKOUCHE Rudolf**: “Initiation à la géométrie” *PUF, (1988)*

[10] **LESPINARD V. - PERNET R.**: “Géométrie (Cours Complet)”, Classes de Mathématiques Elémentaires, Programme 1962, *André Desvigne , (1962)*

[11] **PAPELIER G**.: “Exercices de géométrie moderne”, *Vuibert, (1926).*

[12] **VAQUANT et MACE DE LEPINAY**: “Eléments de Géométrie à l’usage des classes de Sciences (Second Cycle)”, Programmes de 1905 et 1912, Masson *(1920)*.