LA REGLE A BORDS PARALLELES

Daniel BERTHE
Bernard CAZIER
Irem de Lille(*)

Introduction.

Ce travail a pour origine le groupe « Problèmes ouverts » de l'Irem de Lille qui réunissait au début des années 90 une bande de joyeux drilles qui, non contents de s'amuser à résoudre des problèmes, se demandaient ensuite : « Peut-on en faire quelque chose dans nos classes ? ».

La « règle à bords parallèles » ou plutôt la question des constructions qu'on peut réaliser avec elle, fut l'un de ces problèmes qui passa avec brio du statut de « spéculation pure » à celui de « pratique quotidienne » dans la classe !

En effet, Daniel Berthe en fit une activité problématisée, concentrée au début de la classe de seconde lorsqu'il était au Lycée de Calais. Et cette utilisation a l'avantage, à travers une pratique mobilisatrice, de faire revisiter de façon dynamique les connaissances du collège, tant au niveau des figures que des isométries, pour les restructurer, les réactualiser et ainsi les rendre propres à servir de fondement à une pratique scientifique plus élaborée, celle du lycée.

Aujourd'hui qu'il réside à La Réunion, il l'utilise de façon différente au collège, d'abord en quatrième et troisième, puis en sixième et en cinquième, où il l'a intégrée à son enseignement.

Il s'est par ailleurs passionné pour ce problème, au point de s'attacher à démontrer qu'avec la « règle à bords parallèles » on peut faire toutes les constructions qui se font « à la règle et au compas ».

* Cet article a été rédigé en collaboration avec Françoise Chamontin.

Position du Problème

Muni d'une règle à bords parallèles *dépourvue de toute graduation*, quelles constructions géométriques peut-on réaliser ?

Dans toute la suite, il faut entendre :
— par *bande* ou *règle*, la règle à bords parallèles sans aucune graduation,
— par *réponse*, une construction justifiée — le niveau de justification attendu dépendra de la classe où on se place,
— par *construction*, un tracé effectué uniquement avec la règle et un crayon : on pourra utiliser un côté ou deux côtés de la bande mais sans faire aucune marque sur elle.

Pour travailler en classe sur cette question, on peut se procurer du côté de l'imprimerie, des bandes de carton ou de plastique, de largeurs diverses à condition que leurs bords soient bien parallèles. Pour la commodité des réalisations, les bonnes largeurs se situent entre 1 et 4 cm. Pour le tableau, le professeur ou les élèves, pourront utiliser la règle du tableau après en avoir masqué les graduations. La largeur de la bande n'a en effet, que peu d'incidence sur la réalisation des constructions et pas du tout sur l'étendue du domaine des constructions réalisables.

Plus tard quand une ou plusieurs constructions sont intégrées dans la pratique quotidienne, les élèves les effectuent avec leur double-décimètre — en oubliant les graduations — ou avec leur règle non-graduée.

Qu'entend-t-on par constructions géométriques à la règle et au compas ?

Quand on parle de « construction géométrique à la règle et au compas », chacun sait qu'il y a ambiguïté car la même périphrase recouvre deux pratiques très différentes :

— la première est une initiation à l'utilisation des deux instruments fondamentaux de la géométrie, la règle qui trace des droites, et le compas qui trace des cercles et permet de reporter des longueurs dans toutes les directions. Cette initiation se fait en rapport avec la réalisation des configurations de base de la géométrie : milieu et médiatrice d'un segment, bissectrice d'un angle, tracé de parallèles, de perpendiculaires, de triangles répondant à des conditions données. Elle est fondamentale dans l'apprentissage de telles notions.

— la seconde est une problématique très ancienne qui fournit des problèmes intéressants qui peuvent être posés de façon ouverte, dans un deuxième temps de l'apprentissage.

L'un des plus célèbre est le problème résolu par Gergonne :

Construire un cercle tangent
à trois cercles donnés.

Leur résolution permet l'initiation à la méthode “ d'analyse [1] et synthèse [2] ” que l'on peut articuler avec la recherche de lieux géométriques.

Qu'entend-t-on par constructions géométriques à la règle à bords parallèles ?

Avec elle, on se situe dans une phase en amont des deux pratiques que l'on vient de décri-

1 On suppose le problème résolu, en effectuant la construction à l'envers, c'est-à-dire en plaçant en dernier les éléments donnés a priori. Par l'analyse de la figure, on cherche les relations entre les points cherchés et les points donnés pour en déduire une construction.

2 Elle consiste à décrire la construction en la légitimant et en discutant de l'existence et du nombre des solutions.

re. En effet, la règle et le compas font partie de l'héritage culturel, et les cercles et les droites peuplent très tôt l'univers géométrique des enfants. Pour la règle à bords parallèles, il faut commencer par explorer les figures qu'on peut tracer avec elle. Il faut analyser ces figures, étudier leurs propriétés pour en déduire les constructions de base.
— milieu et médiatrice d'un segment,
— parallèle à une droite passant par un point donné,
— perpendiculaire à une droite passant par un point donné,
— bissectrice d'un angle,
— triangle ayant des côtés de longueurs données.

On gagne le parallélisme — on peut tracer des parallèles équidistantes — mais on perd les deux fonctions du compas : le tracé des cercles et le report de longueur.

Le losange apparaît vite comme une figure de base de cet instrument. En classe de sixième, on peut exploiter cette possibilité de la règle pour obtenir certaines constructions élémentaires.

En effet, le losange est une figure « familière » pour un élève de CM2 et il est intéressant, à travers ces constructions, de revoir dans une autre perspective la définition et les propriétés de cette figure, voire de les articuler entre elles.

Néanmoins, nous ne commencerons pas d'emblée par son étude. En effet, l'enfant, au cours de son développement, évolue dans le choix des figures géométriques qu'il aime à tracer. Il commence d'abord par dessiner des ronds puis des carrés posés sur un côté, ensuite des losanges posés sur une pointe, des rectangles posés sur un côté, des trapèzes isocèles, des parallélogrammes posés sur un côté.

De façon naturelle, il choisit les figures qui possèdent le plus de régularité. Il s'en libère peu à peu, avec difficulté, souvent avec l'aide du professeur, pour être capable de généraliser les figures et étendre les propriétés.

Avec la règle à bords parallèles on « tombe naturellement » sur le losange qui nous apporte beaucoup d'égalités de toutes sortes. Mais avec cette activité, le tracé du losange ne se fait pas automatiquement dans tous les cas. Et résoudre le cas général soulève d'un coup et trop vite une difficulté trop importante qui bloque le processus de la recherche et le goût d'aller plus loin.

C'est pour cela que, si on veut faire un travail plus approfondi en classe de quatrième ou de seconde, il vaut mieux choisir une voie moins naturelle mais plus dynamique, en épuisant dans un premier temps, tout ce qu'on peut tirer des parallèles équidistantes. On répète les exercices avec des figures différentes pour consolider la technique.

On aborde ensuite le losange en mettant en évidence ses propriétés. On les utilise selon des points de vue différents pour effectuer les constructions recherchées.

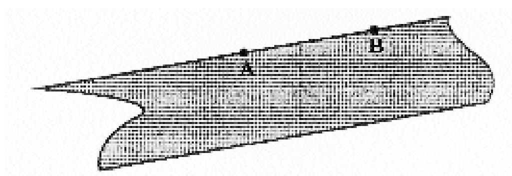
Figures fondamentales et constructions élémentaires.

Droite et parallèles équidistantes.

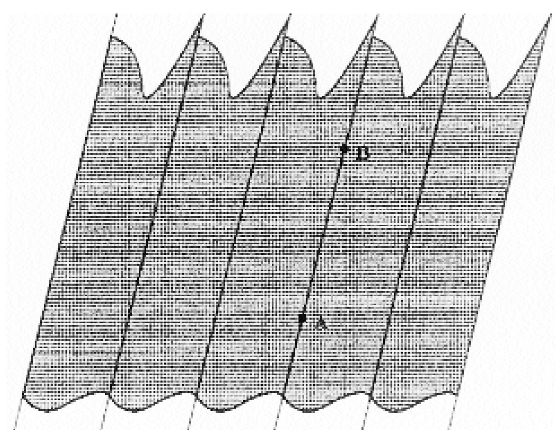
Tracé d'une droite

Deux points A et B distincts sont donnés. En utilisant un des deux bords de la règle on

Tracé d'une droite :



Tracé de parallèles équidistantes :



peut tracer une droite (AB) passant par ces points.

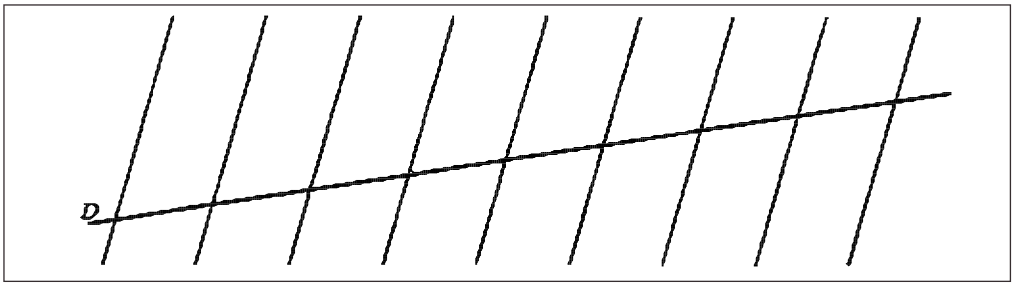
De même, une droite est donnée. À partir de celle-ci, on peut tracer de chaque côté des parallèles équidistantes.

Parallèles équidistantes et équipartition.

Toute sécante D, qui coupe la famille des parallèles équidistantes, est partagée en segments de même longueur (cf. fig. en haut de la page suivante)

Le concept de parallèles équidistantes, malgré les apparences n'est pas du tout une évidence pour beaucoup de personnes en particulier pour les élèves. Il est pourtant à la base de nombreux raisonnements en géométrie. Il nécessite un travail préliminaire pour être assimilé. Son approche est indispensable avant d'aborder la droite des milieux ou le théorème de Thalès. Il est à la source de nombreux exercices « manuels », c'est-à-dire des exercices où les élèves sont amenés à regarder des figures, à dessiner des droites, à utiliser un calque et le déplacer.

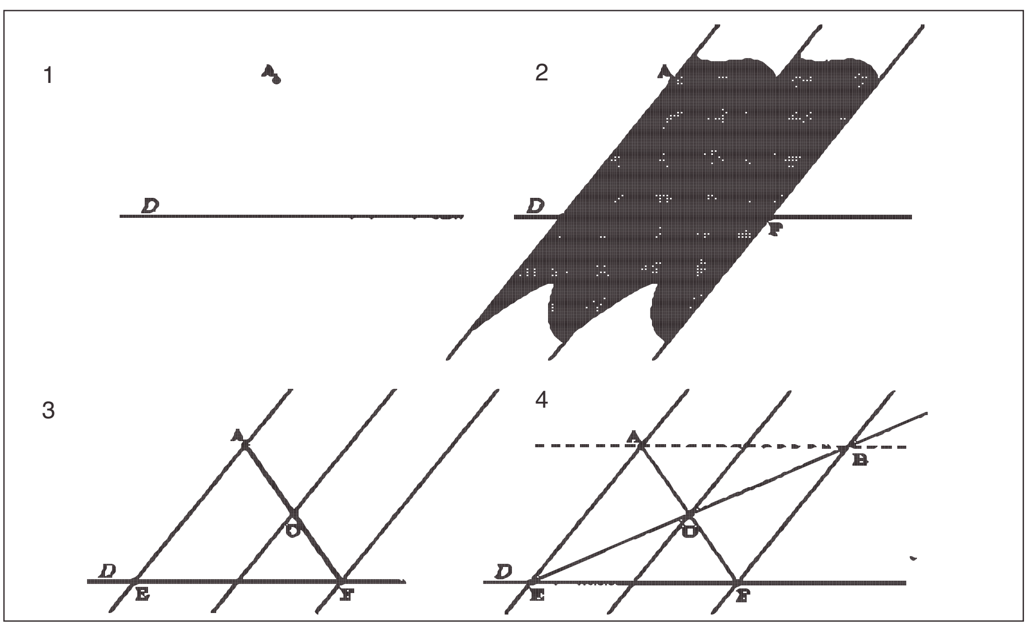
[Voir en ANNEXE un développement sur la notion de famille de parallèles équidistantes. Le texte est suivi d'une série d'exercices pratiques.]

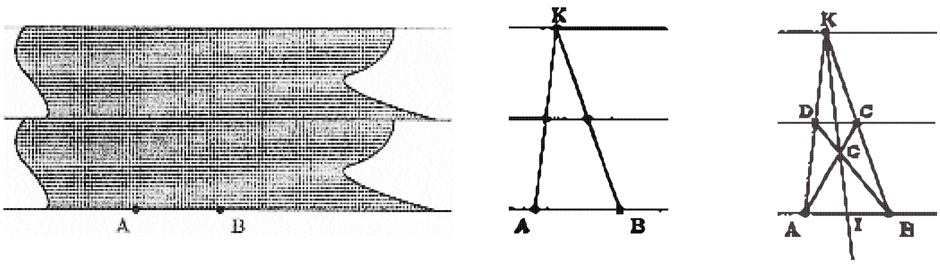


Conséquences

Un parallélogramme pour construire une parallèle à une droite donnée passant par un point donné. (voir les étapes ci-dessous)

Une droite D et un point A extérieur à cette droite sont donnés. On veut construire la parallèle à D passant par A. On trace une droite quelconque passant par A qui coupe D. On ajuste deux fois la règle, du même côté, à partir de cette sécante : on obtient ainsi trois parallèles équidistantes. La première coupe D en E et la troisième en F. La deuxième parallèle coupe le segment [AF] en O, les segments [AO] et [OF] sont égaux. La droite (EO) coupe la troisième parallèle en B, les segments [EO] et [OB] sont aussi égaux. Les diagonales [AF] et [EB] ont même milieu O donc FEAB est un parallélogramme. La droite (AB) est la parallèle cherchée.





Les médianes d'un triangle particulier pour construire le milieu d'un segment.

Les points A et B sont donnés. On trace la droite (AB) ; on ajuste successivement deux fois d'un même côté la règle sur cette droite, on obtient trois parallèles équidistantes. La première est la droite (AB).

Sur la troisième on place un point K quelconque. D'après le théorème des parallèles équidistantes, la deuxième parallèle coupe les côtés [KA] et [KB] en leurs milieux respectifs D et C. En traçant les médianes (AC) et (BD) du triangle AKB, on construit le centre de gravité G. Ainsi (KG) est la troisième médiane du triangle : elle passe par le milieu I du segment [AB].

Le losange.

La configuration et ses symétries.

Deux points A et B sont donnés, suffisamment éloignés pour que la règle puisse passer, sans les toucher, entre A et B.

— Il existe exactement deux positions de la règle telles que A et B soient sur les deux bords opposés de la règle.
— En traçant dans ces deux cas les deux paires de parallèles, on dessine un losange AMBN.

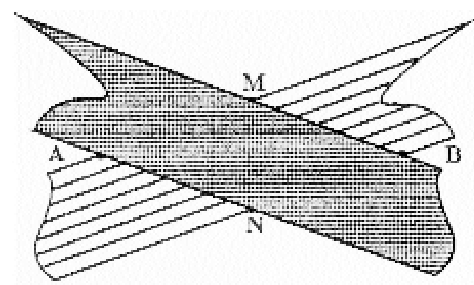


figure 1

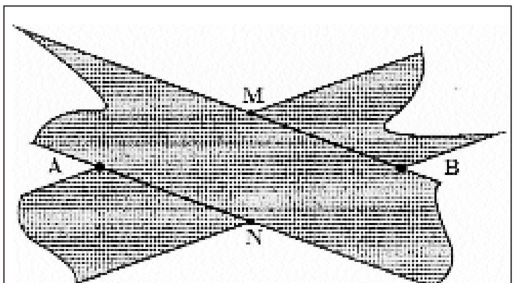
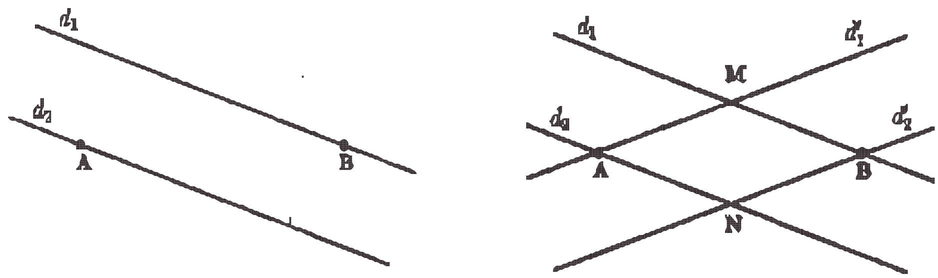


figure 2



d_1 et d_2 représentent le tracé de la règle dans la première position.

d'_1 et d'_2 représentent le tracé de la règle dans la deuxième position.

Démonstration

Figure 1

On considère l'application du plan sur lui-même qui porte A sur B et B sur A dans un anti-déplacement (c'est la symétrie orthogonale d'axe, la médiatrice de [AB]). Alors d_1 est portée sur d'_1 et d_2 est portée sur d'_2 , et vice versa : d'_1 est portée sur d_1 et d'_2 sur d_2.

Il en résulte que $d_1 \cap d_{1'}$ est porté sur $d'_1 \cap d_1$ et $d_2 \cap d'_2$ sur $d'_2 \cap d_2$. Donc M est porté sur M et N est porté sur N.

Ainsi [AM] est porté sur [BM] et [AN] est porté sur [BN]. D'où les égalités AM = BM et AN = BN.

Figure 2

On considère maintenant l'application du plan sur lui-même qui porte A sur B et B sur A dans un déplacement (c'est la symétrie centrale de centre, le milieu de [AB]). Alors d_1 est portée sur d_2 et d'_1 est portée sur d'_2, et, vice versa : d_2 est portée sur d_1 et d'_2 sur d'_1 (on obtient à l'évidence un parallélogramme !). Il en résulte que $d_1 \cap d'_1$ est porté sur $d_2 \cap d'_2$ et $d_2 \cap d'_2$ sur $d_1 \cap d'_1$. Donc M est porté sur N et N est porté sur M.

Ainsi [AM] est porté sur [BN] et [AN] est porté sur [BM]. D'où les égalités AM = BN et BM = AN.

On obtient ainsi AM = AN = BM = BN . Le quadrilatère. AMBN est bien un losange.

Monstration.

La démonstration ci-dessus peut être difficile pour la plupart des élèves. Il est possible de faire une manipulation qui lui correspond. Deux points sont donnés (par exemple par deux épingles ou deux clous enfoncés).

On trace la figure avec deux bandes de papier ou de carton identiques coincées entre ces deux points.

On colle les bandes dans cette position. En retournant de différentes façons ces deux bandes collées et en les ajustant sur les deux points, elles se replacent exactement sur le dessin initial.

On relève la *propriété* :

Il existe exactement deux positions de la règle[3] *telles que A et B soient sur les bords opposés de la règle .*

En classe de seconde, à un niveau de pratique plus avancée,on pourra mettre cette propriété en relation avec l'énoncé suivant :

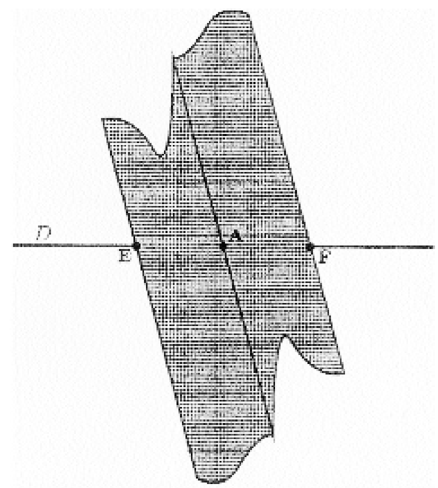
Étant donnés deux points A et B, il existe exactement deux isométries qui les échangent :
— une directe : la symétrie centrale de centre I *milieu de* [AB].
— une indirecte : la symétrie orthogonale d'axe la médiatrice de [AB];

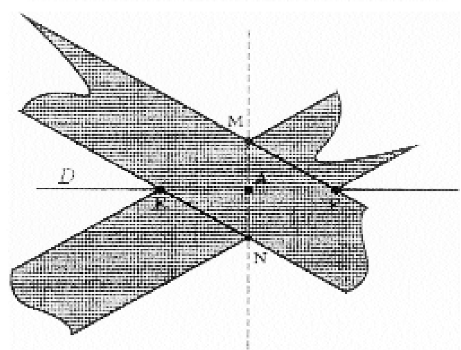
Conséquences

Construire la perpendiculaire à une droite en un point de cette droite

La droite D et le point A de cette droite sont donnés [4]. On trace une sécante quelconque à D passant par A. On ajuste la règle de part et d'autre de cette sécante pour obtenir trois parallèles équidistantes. On marque les points E et F à l'intersection de ces parallèles avec D. On obtient ainsi le segment [EF] dont A est le milieu.

Il suffit alors d'utiliser le segment [EF] pour construire, comme ci-dessus, le losange EMFN ; les diagonales (MN) et (EF) sont perpendiculaires en A. La droite (MN) est la perpendiculaire cherchée.
(voir figures ci-dessus)





Construire la médiatrice d'un segment.

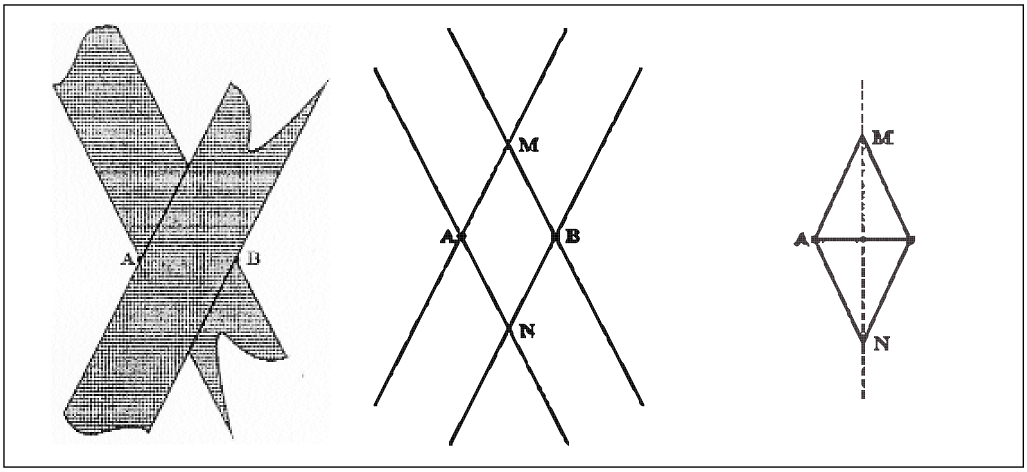
1°) Cas particulier.

On se place dans le cas où les points A et B donnés sont suffisamment écartés pour permettre la construction du losange AMBN — c'est-à-dire si la longueur AB est plus grande que la largeur de la bande.

Les diagonales d'un losange étant des axes de symétrie, (MN) est la médiatrice cherchée de [AB].

3 Il est à remarquer que dans ce travail on ne distingue pas les deux faces et les deux sens de la règle.

4 Que le point A soit sur la droite ou extérieur à la droite, conduit à deux constructions essentiellement différentes. La seconde découlera de la construction du symétrique de A par rapport à la droite.



Cette médiatrice coupe [AB] en son milieu.

On a là une autre construction du milieu quand la longueur AB *est plus grande que la largeur de la bande.*

Remarque

Quand la longueur AB est plus grande que la largeur de la bande cette construction est si simple qu'elle peut être intégrée dans les pratiques quotidiennes de constructions au début du collège avec le double-décimètre ou avec une règle non-graduée.

Elle n'est pas à opposer à la "construction à la règle et au compas" car ces deux constructions reposent sur des principes différents et vont donc permettre l'assimilation de propriétés différentes :

— la "construction à la règle et au compas" de la médiatrice repose sur sa caractérisation comme lieu des points équidistants des extrémités du segment.

— la "construction à la règle à bords parallèles" de la médiatrice par le losange va permettre d'intégrer petit à petit son statut d'axe de symétrie.

2°) Cas général.

Le segment [AB] est donné.

Si la longueur AB est plus grande que la largeur de la bande on applique la méthode du losange, sinon :

a) par la méthode des médianes d'un triangle on construit le milieu de [AB]

b) puis par la méthode du losange on construit la perpendiculaire issue de ce milieu : on obtient ainsi la médiatrice cherchée.

Construire la bissectrice d'un secteur.

Deux droites se coupent et forment le secteur (xAy). Construire avec la règle à bords parallèles, la bissectrice de cet angle.

En ajustant un bord de la règle sur Ax puis sur Ay, on construit, à l'intérieur du secteur, le losange AMPN.

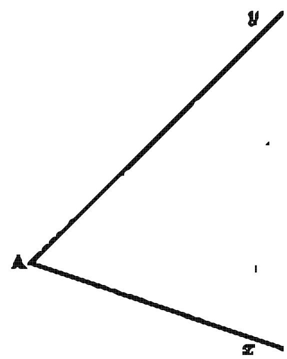
La diagonale AP est un axe de symétrie du losange : la demi-droite [AP) est la bissectrice cherchée.

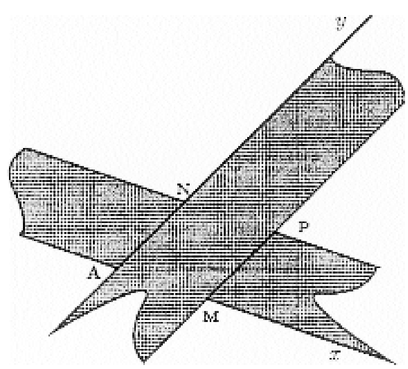
Remarque

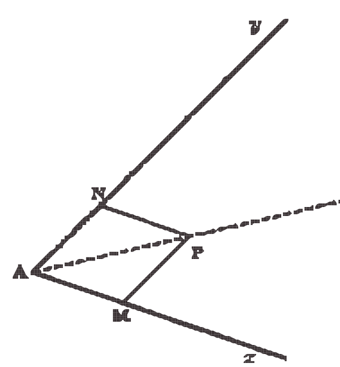
Cette construction de la bissectrice est plus simple que celle qui utilise le couple règle-compas, et elle pourra être intégrée à la pratique quotidienne de constructions dans les classes de Collège. Là encore elle n'est pas à opposer à la "construction à la règle et au compas" car ces deux constructions reposent sur des principes différents et vont permettre des apprentissages différents :

— la "construction à la règle et au compas" de la bissectrice repose sur sa caractérisation comme lieu des points équidistants des deux droites.

— la "construction à la règle à bords parallèles" de la bissectrice par le losange va permettre d'intégrer petit à petit son statut d'axe de symétrie des deux droites.







La même propriété de la diagonale du losange va permettre le tracé de la symétrique d'une droite.

Construire le symétrique orthogonal d'une droite l.

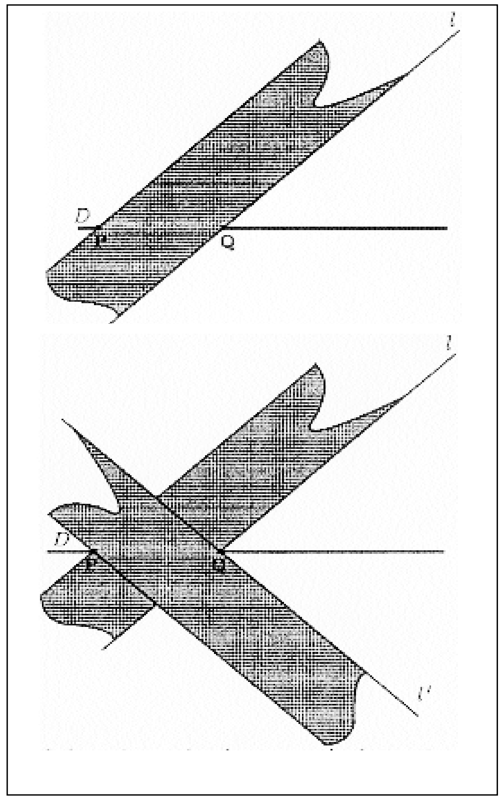
On a une droite donnée *l* qui coupe[5] la droite D. *(cf. figures page suivante)*

5 On limite ici la construction d'une symétrique de *l* dans le cas où *l* est sécante à D. La construction du symétrique d'un point, qui est vue par la suite, permet de réaliser la construction dans le cas général.

La construction s'appuie sur le fait que deux côtés consécutifs du losange sont symétriques par rapport à la diagonale passant par leur sommet commun.

Le long de l on place un des deux bords de la règle, ces bords coupent la droite D en P et en Q.

On ajuste la règle, sur ces deux points marqués, en la seconde position de la règle. On peut ainsi tracer la droite l', symétrique de l.

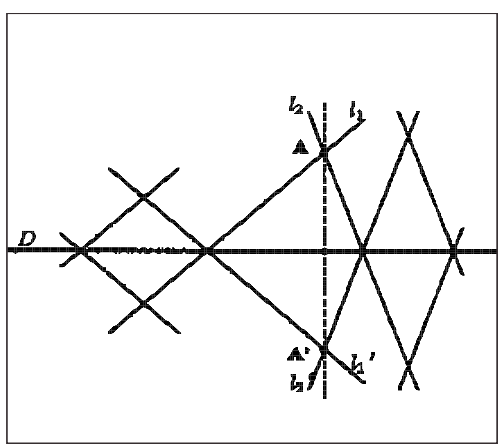


Construire le symétrique d'un point par rapport à une droite.

Un point A extérieur à la droite D est donné.

On trace deux sécantes l_1 et l_2 passant par A. On construit les droites symétriques l'_1 et l'_2 de ces droites par rapport à D.

L'intersection $l'_1 \cap l'_2$ de ces droites symétriques nous donne A' le symétrique de A cherché.
(cf. figure ci-contre, en bas à droite)



Construire la perpendiculaire à une droite issue d'un point extérieur.

Le point A et son symétrique A' par rapport à la droite D permettent de tracer la perpendiculaire issue de A à la droite D.

Conclusion provisoire

Les parallèles équidistantes ont donné accès au parallèlisme, au milieu, donc aux translations. Et on sent bien qu'à l'aide du théorème de Thalès, elles vont permettre d'effectuer des homothéties. Le losange a donné accès à la perpendicularité, donc à la symétrie orthogonale. En conjugant les deux, on va montrer qu'on peut construire « les mêmes points » qu'avec « la règle et le compas » : on entend par là que si un certain nombre de points sont donnés, tout point [6] constructible avec une « règle à bords parallèles » à partir de ceux-ci, peut être construit avec « la règle et le compas », et inversement tout point constructible à « la règle et au compas » peut être construit avec « la règle à bords parallèles ».

En particulier, ce qui va faire levier dans cette avancée, c'est qu'il est possible, étant donnée une longueur l supérieure à h, la largeur de la règle, de construire un triangle rectangle d'hypoténuse l et dont un côté de l'angle droit a pour longueur h.

Construction de "l'algèbre des longueurs"

Parmi les fonctions du compas la plus simple à récupérer est le transport des longueurs.

Report d'une longueur donnée.

Un segment [AB] et un point E sur une droite D sont donnés. Construire [7] à partir de E un segment [EF] sur D de même longueur que [AB].

(cf. figures page ci-contre)

On considère trois cas.

1° — La droite D est strictement parallèle à la droite (AB)

On sait tracer la parallèle à la droite (AE) passant par B, elle coupe D au point F. ABFE est un parallélogramme, EF = AB : [EF] est le segment cherché.

2° — La droite D est confondue avec la droite (AB)

On applique deux fois le procédé ci-dessus. On trace d'abord d une parallèle quelconque extérieure à (AB) — par exemple en utilisant la règle — on y marque P un point quelconque, puis, en faisant apparaître le parallélogramme ABQF, on construit Q tel que PQ = AB. Enfin sur D, en faisant apparaître le parallélogramme PQFE, on construit F sur D tel que EF = PQ.

Ce type de construction est fondamental pour asseoir les images mentales dont on aura besoin quand on abordera la notion de vecteur avec les élèves. Elle permettra d'affirmer que tout point du plan est origine d'un vecteur égal à un vecteur donné, ou de construire l'image d'un point quelconque du plan dans une translation de vecteur donné.

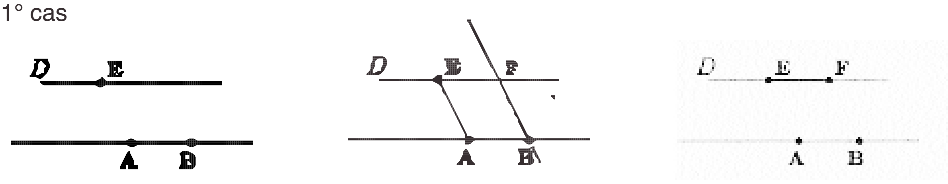
3° — La droite D n'est pas parallèle à la droite (AB)

Par E on trace la droite (Ex) parallèle à (AB). En faisant apparaître un parallélogramme, on construit C sur [Ex) tel que EC = AB. Reste à construire F sur [Ey) tel que EF = EC. Pour cela on construit la bissectrice (Et) du secteur (xEy) [ou du secteur (xEy')] : F est le symétrique de C par rapport à cette bissectrice.

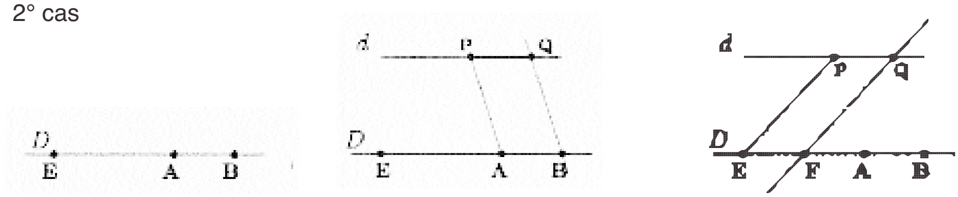
6 Il est évident que pour tracer un cercle à partir des points donnés, il vaut mieux prendre un compas ! Néanmoins chacun des points de ce cercle peut être construit à la « règle à bords parallèles ».

7 La présentation n'est pas exhaustive, on se contente de construire F tel que [AB] et [EF] soient de "même sens".

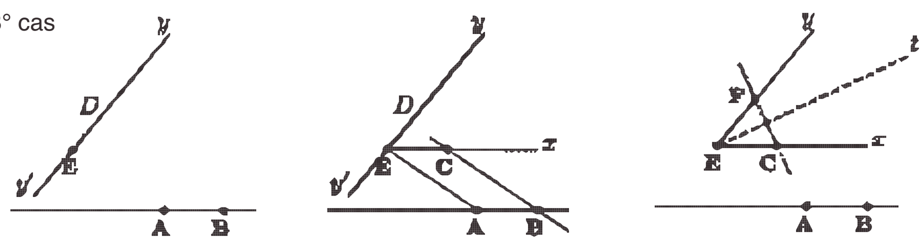
1° cas



2° cas



3° cas



Opérations sur les longueurs.

(voir figures page suivante)

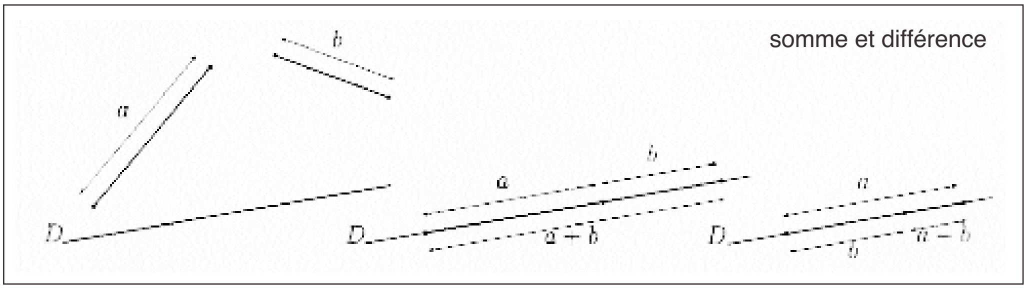
— *longueur donnée par une somme ou une différence :* Deux segments sont donnés de longueurs a et b. On peut construire, sur une droite donnée D, un segment représentant a + b et un segment représentant a – b. On utilise pour cela le principe du transport des longueurs vu ci-dessus.

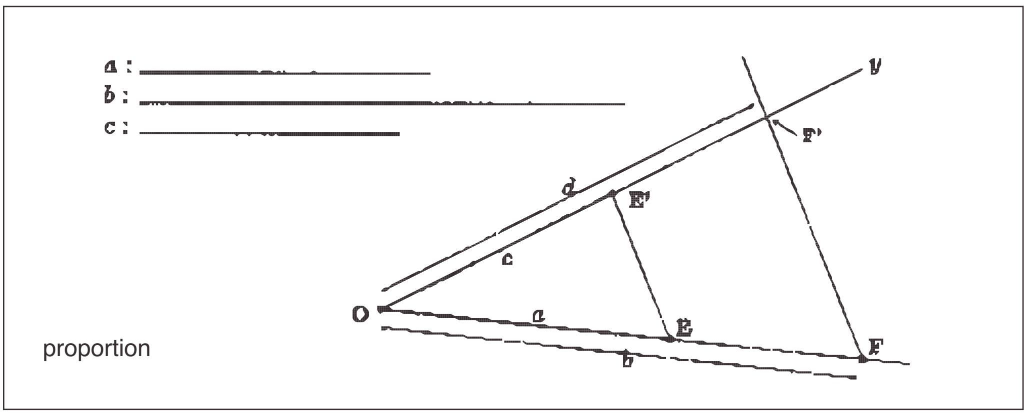
— *longueur donnée par une proportion :* Trois segments sont donnés de longueurs a, b et c. On veut construire, à partir de O sur [Oy), un segment de longueur d qui vérifie l'égalité entre les rapports de longueurs :

$$a / b = c / d .$$

Comme on sait tracer des parallèles à une droite donnée passant par un point donné, on effectue des constructions appliquant le théorème de Thalès.

Sur le côté [Ox) d'un secteur angulaire (xOy) quelconque, on porte E tel que OE = a puis F tel que OF = b. Sur [Oy) on porte E' tel que OE' = c. On trace la droite (EE') puis par F la parallèle à (EE') ; elle coupe [Oy) en F'. Le segment [OF'] a la longueur d cherchée.





Il est à remarquer qu'ici on ne parle pas de nombres mais de longueurs de segments. Ce travail permet de structurer la notion de longueur et la comparaison entre longueurs.

— *Moyenne géométrique de deux longueurs :*

Principe : Etant donnée une longueur l supérieure à h la largeur de la règle, on peut construire un triangle rectangle d'hypoténuse l et dont un côté de l'angle droit a pour longueur h.

En effet si AB = l on place la règle entre A et B, chacun des points étant sur un bord de la règle, et il suffit d'abaisser de A la perpendiculaire AH à l'autre bord. On a AH = h et z = HB vérifie bien : $z^2 = l^2 - h^2$.

On se donne deux longueurs a et b avec a > b .

Il s'agit de construire un segment de longueur c tel que $c = \sqrt{a \times b}$

$$c = \sqrt{a \times b} \quad = \frac{1}{2} \times \sqrt{(a+b)^2 - (a-b)^2}$$

Avec la bande à bords parallèles on ne sait construire $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ à l'aide du théorème de Pythagore que si y = h où h est la largeur de la bande.

On écrit donc :

$$c = \frac{a-b}{2h} \cdot \sqrt{\left(h.\frac{a+b}{a-b}\right)^2 - h^2}$$

On en déduit les diverses étapes de la construction :

1° à partir de a et b , on construit a + b et a – b .

2° à partir de h, a + b et a – b, on construit un segment de longueur l, $l = h\,\dfrac{a+b}{a-b}$

3° On construit deux points E et F tels que EF = l. On place la règle de façon que E et F soient sur les bords opposés. On trace les parallèles.

4° On abaisse en H la perpendiculaire issue de E sur la parallèle contenant F

$$FH = d = \sqrt{\left(h.\frac{a+b}{a-b}\right)^2 - h^2}$$

5° On construit enfin $\dfrac{a-b}{2h} \times FH$,

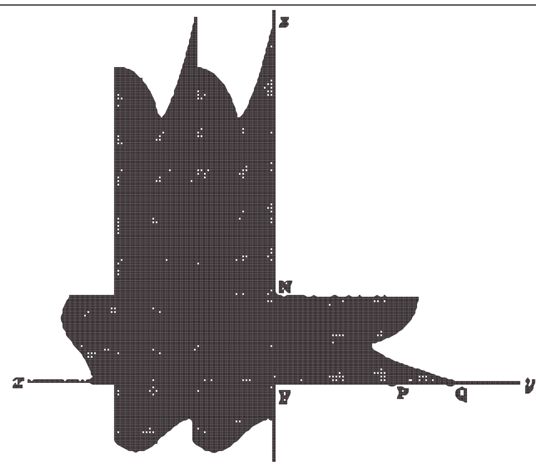
qui est $c = \sqrt{a \times b}$ le résultat cherché.

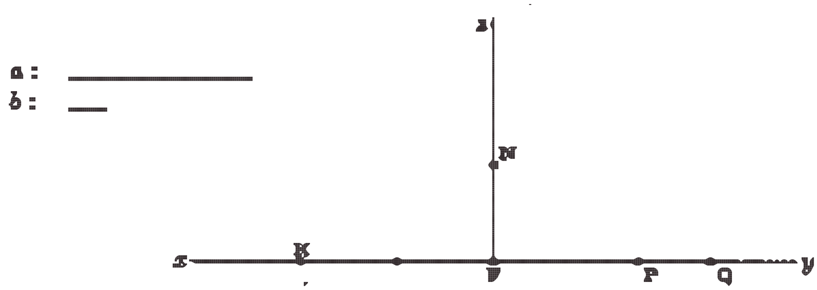
Le tracé proprement dit.

— Pour faciliter la représentation de la largeur h de la règle on commence par tracer (xy) contenant F et la demi-droite [Fz) qui lui est perpendiculaire.

On porte P et Q sur [Fy) tel que FP = a – b et FQ = a + b. **(cf. 1°)**

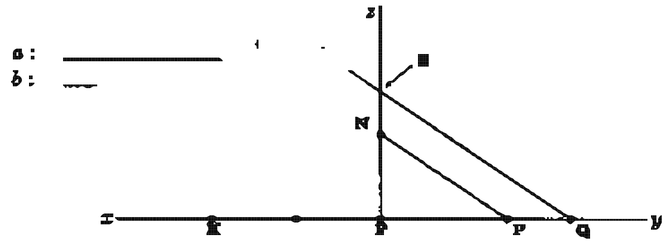
On porte K sur [Fx) tel que FK = $2h$. On porte N sur [Fz) tel que FN = h.

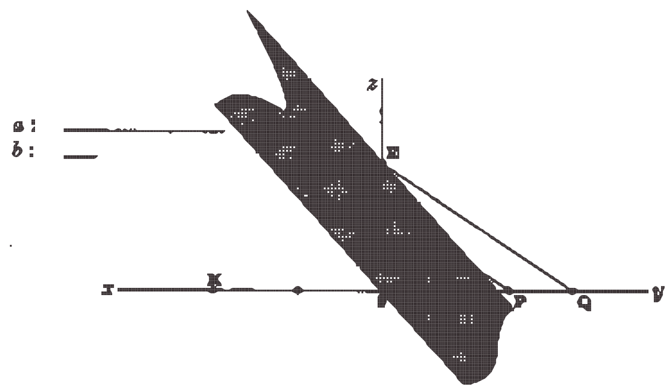




…/…

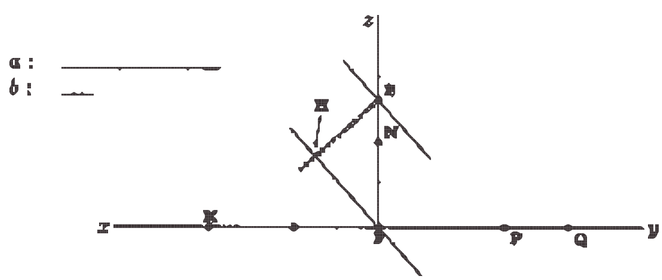
— On construit E tel que FE = l. On trace par Q la parallèle à (PN) ; elle coupe [Fz] en E. **(cf. 2°)**



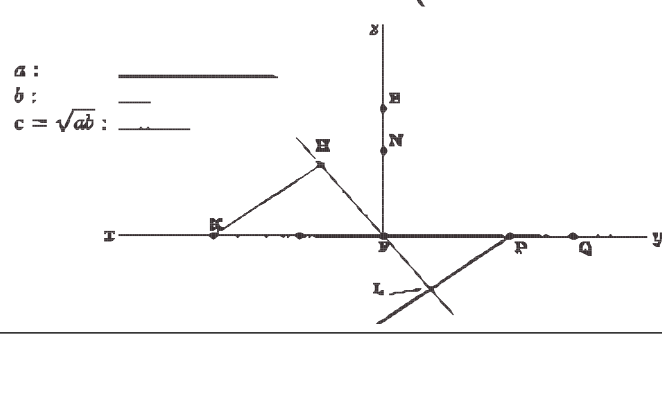


— La règle permet de tracer deux parallèles passant par E et F distantes de la longueur h. **(cf. 3°)**

— La perpendiculaire, issue, de E, abaissée en H sur la parallèle passant par F donne le segment [FH] de longueur d. **(cf. 4°)**

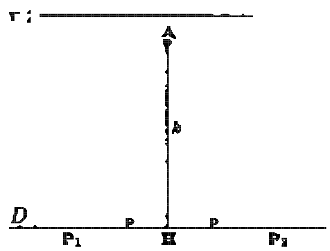


— La parallèle à la droite [KH] passant par P coupe la droite [HF] en L. Le segment [FL] représente c la moyenne géométrique de a et b cherchée. **(cf. 5°)**



Intersection d'un cercle et d'une droite.

Un point A, une droite D et une longueur r représentée par un segment sont donnés. On veut construire l'intersection P du cercle de centre A et de rayon r avec la droite D.



On appelle H le pied de la perpendiculaire abaissée de A sur D, et k la longueur AH. Pour qu'il y ait intersection, il faut que r soit plus grand que k.

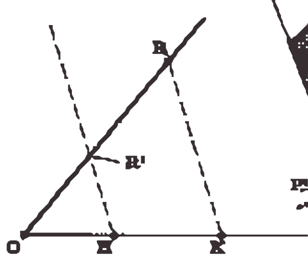
Dans ce cas il existe deux points P_1 et P_2
.

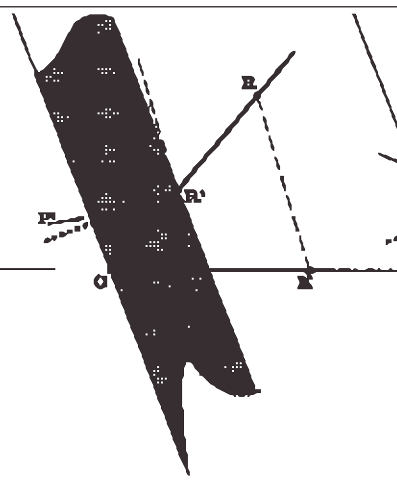
On va construire un segment de longueur p égale à la longueur HP ; il suffit ensuite de placer, de part et d'autre de H, les points P_1 et P_2 sur D.

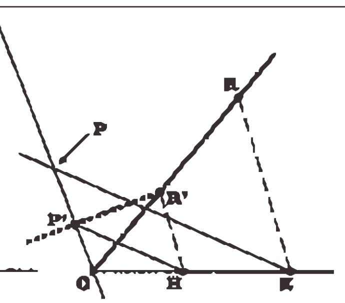
$$p = \sqrt{r^2 - k^2} = \frac{k}{h}\sqrt{\left(\frac{h}{k}.r\right)^2 - h^2}$$

on pose : $r' = \frac{h}{k} \times r$, puis $p' = \sqrt{r'^2 - h^2}$,

donc $p = \frac{k}{h} \times p'$. (voir figures ci-dessous)







1° — Sur le premier côté d'un secteur de sommet O on place H tel que OH = h et K tel que OK = k. Sur l'autre côté on place R tel que OR = r.

Par H, on trace la parallèle à (KR) ; elle coupe (OR) en R'.

On obtient OR' = $\frac{h}{k}.r = r'$.

2° — On pose la règle sur le segment [OR'] et on trace la droite du bord de la règle contenant O. On construit la perpendiculaire issue de R' à cette droite qu'elle coupe en P'. On obtient

$$OP' = m\sqrt{r'^2 - h^2} = p'.$$

3° — On trace la parallèle à HP' passant par K elle coupe (OP') en P. [2mm]

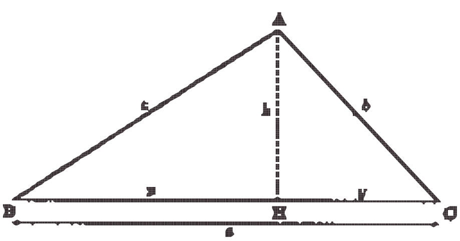
On obtient :

$$OP = \frac{h}{k}.p' = p.$$

p est la longueur cherchée.

Intersection de deux cercles.

Trois longueurs a, b et c et deux points B et C sont donnés tels que BC = a. On veut construire l'intersection des deux cercles $\mathcal{C}$(B ; c) et $\mathcal{C}$(C ; b).



Il s'agit de construire le triangle ABC tel que BC = a, AC = b et AB = c.

On projette A en H sur (BC). On pose BH = x, HC = y et AH = k.

Remarque : Il faut considérer trois cas : H est sur [BC], H est à l'extérieur, du côté de B et H est à l'extérieur, du côté de C : dans ces trois cas, les calculs restent les mêmes au signe près.

On va considérer ici le cas où H est entre B et C. On a : (x+y = a) et dans les triangles rectangles HBA et HCA , on a :

$$\begin{cases} c^2 - x^2 = k^2 \\ b^2 - y^2 = k^2 \end{cases}$$

d'où : $x^2 - y^2 = c^2 - b^2$

et $x = a - b \times \frac{b}{a} + c \times \frac{c}{a}$

$$y = a + b \times \frac{b}{a} - c \times \frac{c}{a}$$

que l'on sait représenter à partir de a, b et c.

On sait aussi représenter $c' = c \times \frac{h}{x}$, *h* étant la largeur de la règle à bords parallèles. Et avec cette même règle on sait construire :

$$k' = \sqrt{c'^2 - h^2} = \sqrt{\left(c \times \frac{h}{x}\right)^2 - h^2}$$

$$= \frac{h}{x} \times \sqrt{c^2 - x^2}$$

Enfin on sait représenter :

$$k = \frac{x}{h} \times k' = \sqrt{c^2 - x^2}$$

Sur le segment [BC], on sait placer H tel que BH = x , on sait tracer la perpendiculaire issue de H à la droite (BC) et sur cette perpendiculaire placer les points A_1 et A_2 tels que $HA_1 = HA_2 = k$. A_1 et A_2 sont les intersections cherchées des deux cercles.

L'équivalence des constructions à "la règle et au compas" et à "la règle à bords parallèles"

Dans un premier temps, pour démontrer cette équivalence nous nous sommes reportés à l'ouvrage d'Henri Lebesgue[8] qui énonce six critères pour qu'un système de constructions soit équivalent avec "la règle et le compas".

Nous nous en sommes inspirés pour développer l'algèbre des longueurs, comme le dit Descartes : *Trois longueurs a, b et c étant données, construire des segments de longueur*

* a + b *et* a – b * $a \times \frac{b}{c}$ *et* $\sqrt{a \times b}$

Et cela nous a conduit à élaborer les constructions de l'intersection d'une droite et d'un cercle, et de l'intersection de deux cercles. Ce qui démontre, à l'évidence, l'équivalence recherchée.

8 Leçons sur les Constructions géométriques, Gauthier-Villars. ré-édité par Jacques Gabay

Conclusion

Chacun aura compris que dans cet article, il y a deux niveaux :

— une pratique que l'on peut adapter différemment suivant les classes, et en formation continue.

— une recherche sur des questions mathématiques qui se sont posées à nous.

Nous ne reviendrons pas sur ce dernier aspect.

On a ici une problématique très riche et de difficultés très diverses. Elle élargit le registre des images mentales et géométriques d'une configuration importante : les parallèles équidistantes. Les figures déjà connues sont re-visitées : les connaissances qu'on en avait, servent à élaborer de nouvelles stratégies de dessin qui vont elles-mêmes enrichir la connaissance que l'on a de ces figures.

Il faut toujours avoir en tête l'objectif de leurs tracés :

— faire un beau dessin ?
— démontrer une propriété ?
— mettre en place un outil ?
— structurer la pensée ?

De toute façon on demande aux élèves de raisonner et, ce qui est particulier ici, de raisonner sans faire obligatoirement du texte : la démonstration en plusieurs étapes existe mais c'est le dessin qui témoigne du bon déroulement de la démarche.

Attention ! Ces exercices ne sont pas une fin en soi en tant que tel. Leur intérêt réside dans l'apport spécifique de leur pratique : la connaissance presqu'automatique des procédés de construction conforte et permet l'assimilation des notions acquises sur le parallélogramme, les médianes, le losange, la symétrie, la bissectrice, la médiatrice. Ils donnent une aisance et des moyens de recherches dans la résolution d'exercices et permettent parfois la trouvaille de solutions originales.

Il est utile de proposer les même exercices, si possible avec quelques variantes — ne serait-ce qu'en changeant l'orientation des figures et leurs grandeurs : tant que l'élève exécute les exercices avec un certain intérêt c'est qu'il apprend quelque chose ; quand il commence à se lasser c'est que, pour le moment, il n'a plus rien à en tirer.

Certains élèves ont tout compris en quelques secondes et d'autres sont prêts, sans déplaisir, à effectuer une bonne dizaine de tracés ; à chaque fois il leur faut du temps pour comprendre la figure, même simple, pour élaborer leur stratégie, pour placer la règle, tirer leurs traits et en fin de compte aboutir au résultat demandé.

La géométrie permet au sujet d'élaborer son propre rapport à l'espace qui l'entoure, et son apprentissage passe par le mouvement, le corps, le dessin, qui mobilise le regard, la pensée en même temps que le geste de la main. Certains enfants ont besoin qu'on leur offre le temps et la possibilité d'effectuer ces activités aux différentes étapes de leur scolarité. D'autres en ont moins besoin parce qu'ils ont acquis ailleurs, cette forme de maturité.

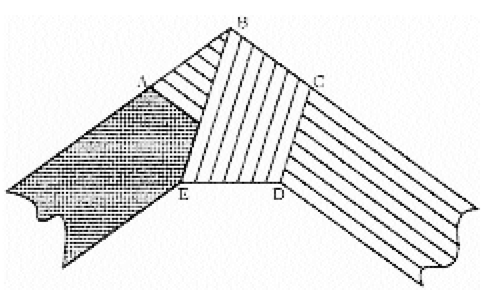
Mais quand ces modes de construction sont bien compris et bien appris il fautalors "les oublier". En effet en géométrie, très souvent on raisonne sur des figures tracées à main levé…

Mais ceci est une autre histoire…

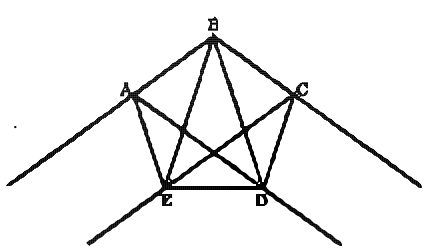
Le nœud doré.

Dernière configuration que l'on obtient avec la règle à bords parallèles, c'est uniquement une curiosité : elle n'a aucune fonction dans les constructions. Juste la cerise sur le gâteau…

On dispose d'une bande suffisamment souple pour se déformer dans l'espace, se plier, se resserrer tout en gardant une largeur constante comme on le ferait pour fabriquer un nœud. On voit apparaître ainsi un pentagone régulier ABCDE.



Démonstration :



Entre A et B passe le morceau de règle déterminé par les points ABCD et le morceau de règle déterminé par les points ABDE.

Dans l'anti-déplacement qui porte A sur B et B sur A (c'est-à-dire dans la symétrie orthogonale d'axe la médiatrice de [AB]) : (AD) est porté sur (BD) et (BD) est porté sur (AD) ; donc D qui est à l'intersection est porté sur lui-même D. (AE) est porté sur (BC) et (EC) parallèle à (AB) est portée sur elle-même donc le point E, intersection de (AE) et (CE) est porté sur C, intersection de (BC) et (CE). On obtient les égalités :

$$AE = BC \text{ et } ED = CD,$$

$$\widehat{EAB} = \widehat{CBA} \quad \text{et} \quad \widehat{DEA} = \widehat{DCB} \; .$$

De la même façon, on considère les morceaux de règles détermins par les points BCDE et les points BCEA, avec l'anti-déplacement qui porte B sur C et C sur B, alors E est porté sur E et A sur D. On obtient les égalités :

$$BA = CD \text{ et } AE = DE,$$

$$\widehat{ABC} = \widehat{DCB} \quad \text{et} \quad \widehat{EAB} = \widehat{EDC} \; .$$

Par suite le pentagone ABCDE a ses cinq côtés égaux et ses cinq angles égaux : ABCDE est bien un pentagone régulier.

Pour en savoir plus, on pourra consulter :

Leçons sur les constructions géométriques, Henri Lebesgue (1949), Gauthier-Villars, réédité par Jacques Gabay.

Problèmes de constructions géométriques, Julius Petersen (1879), Gauthier-Villars, réédité par Jacques Gabay.

Les constructions géométriques à la règle et au compas, Jean-Claude Carrega, éditions Hermann.

ANNEXE
Parallèles équidistantes

Le concept de parallèles équidistantes, malgré les apparences, n'est pas du tout une évidence en particulier pour les élèves. Il est pourtant à la base de nombreux raisonnements en géométrie. Il nécessite un travail préliminaire pour être assimilé. Son approche est indispensable avant d'aborder la droite des milieux ou le théorème de Thalès.

Nous allons en présenter une justification théorique qui utilise essentiellement la notion de déplacement dans le plan : le plan glisse sur lui même en conservant ses figures et ses propriétés.

Cette démonstration est trop difficile pour la plupart des élèves mais il lui correspond une manipulation convaincante avec le papier calque qui permet de leur montrer rigoureusement ces mêmes propriétés. On commence, dans cet état d'esprit, à revisiter la définition du parallélogramme et à présenter deux de ses propriétés caractéristiques.

Introduction du parallélogramme.

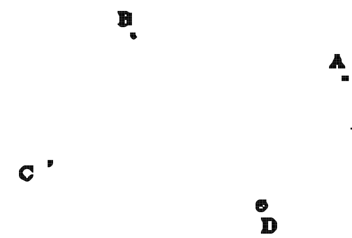
On utilise les propriétés fondamentales suivantes :

— deux points distincts du plan déterminent une droite et une seule,

— une droite du plan le partage en deux demi-plans disjoints,

— un segment étant donné, il existe un déplacement qui le fait coïncider avec lui-même en permutant ses extrémités ; dans ce déplacement les deux demi-plans définis par la droite qui porte le segment permutent aussi.

Trois points A, B et C non alignés sont donnés :

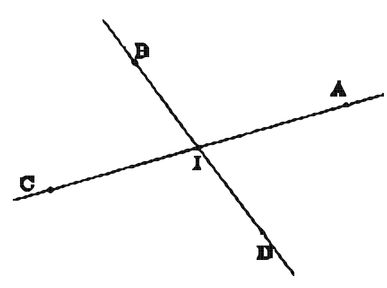


On considère l'application obtenue par glissement du plan sur lui-même qui porte A sur C et C sur A.

La droite (AC) se porte sur la droite (CA), donc sur elle-même. Les deux demi-plans, déterminés par cette droite, permutent. Dans ce déplacement B est porté, dans le demi-plan opposé, en un point qu'on appelle D.

En recommençant l'opération, D revient sur B.

Conséquence 1. (figure 1)



La droite (AC) est portée sur la droite (CA), c'est-à-dire sur elle-même. La droite (BD) est portée sur la droite (DB), c'est-à-dire sur elle-même. Le point I à l'intersection des droites (AC) et (BD) est porté sur l'intersection des droites (CA) et (DB) c'est-à-dire sur I. Le point I est donc un point fixe.

Par suite le segment [IA] est porté sur [IC] d'où l'égalité des longueurs : IA = IC. De même le segment [IB] est porté sur [ID] d'où l'égalité des longueurs : IB = ID.

Résultat :

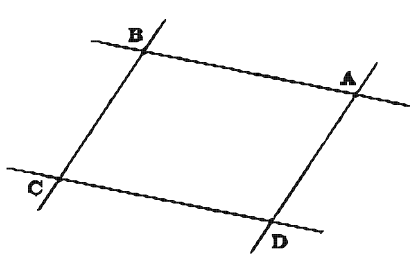
Les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD se coupent en leur milieu I.

Symétrie centrale.

La même opération envoie un point courant M du plan sur M' tel que I, milieu de [AC], soit aussi le milieu de [MM']. Ce déplacement est la symétrie centrale s_I *de centre* I, *le milieu de* [AC].

Tout point d'une droite passant par I a son image sur elle-même. Réciproquement, tout point de cette droite est l'image d'un point lui appartenant : ***Dans une symétrie centrale, l'image d'une droite passant par le centre, est la droite elle-même.***

Conséquence 2. (figure 2)



La droite (AB) est portée sur (CD) et la droite (CD) est portée sur (AB). Ces deux droites n'ont aucun point commun. En effet supposons qu'il en existe un, appelé P ; P est sa propre image. Il ne peut pas se trouver dans l'un des deux demi-plans car ceux-ci sont disjoints et le déplacement les permute. Le point P se trouverait alors sur (AC) en même temps que sur (AB) et (CD). Ce qui est impossible.

Par suite les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Il en est de même des droites (BC) et (DA).

Résultat :

Les supports des côtés opposés du quadrilatère ABCD sont parallèles deux à deux.

Dans une symétrie centrale, l'image d'une droite ne passant pas par le centre est une droite parallèle.

Autres résultats :

Dans ce déplacement les longueurs [9] et les angles [10] sont conservés.

D'où :

— Les côtés opposés ont même longueur.

— Les angles opposés sont égaux.

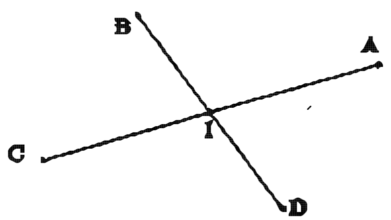
Conclusion et définition.

On appelle parallélogramme ABCD, *une figure déterminée par les sommets* A, B, C, D *non alignés, qui a toutes ces propriétés :*
— les diagonales ont même milieu,
— les côtés opposés sont parallèles deux à deux,
— les côtés opposés sont égaux deux à deux,
— les angles opposés sont égaux deux à deux.

9 deux segments ont même longueur s'ils sont superposables par déplacement.
10 deux secteurs ont des angles égaux s'ils sont superposables par déplacement.

Deux propriétés caractéristiques.

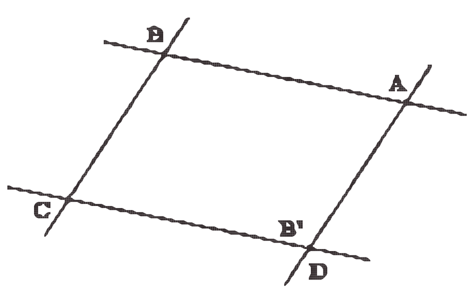
1°— Si les diagonales d'un quadrilatère ABCD ont même milieu, alors c'est un parallélogramme.



Démonstration.

Soit un quadrilatère ABCD tel que les diagonales [AC] et [BD] se coupent en leur milieu I. La symétrie de centre I porte A sur C et B sur D. D'après ce qui précède ABCD est un parallélogramme.

2°— Si les supports des côtés opposés d'un quadrilatère ABCD sont parallèles et distincts deux à deux, alors ABCD est un parallélogramme.



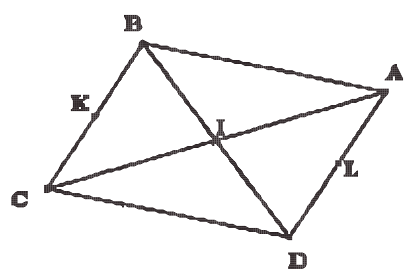
Démonstration.

Soit un quadrilatère ABCD tel que les droites (AB) et (CD) et les droites (BC) et (DA) des côtés opposés sont parallèles deux à deux. Le déplacement, qui porte A sur C et C sur A, envoie B sur B'. D'après ce qui précède, ABCB' estun parallélogramme et (CB') est parallèle à (AB).

Mais (CD) est aussi parallèle à (AB) : *d'après l'axiome d'Euclide*, (CD) et (CB') sont confondues. Donc B' est sur (CD).

Pour la même raison (AD) et (AB') sont confondues. Donc B' est sur (AD). Par suite B' = D et ABCD est un parallélogramme.

Application



Soit ABCD un parallélogramme et K le milieu de [BC].

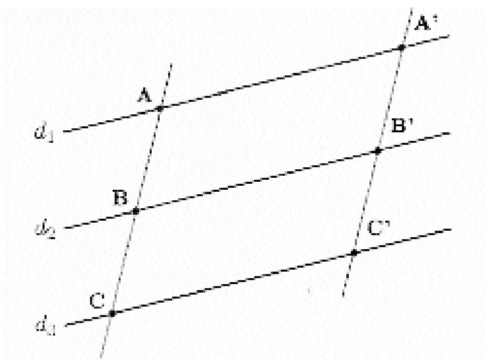
La symétrie de centre I porte le parallélogramme ABCD sur lui-même CDAB. En particulier, le milieu K de [BC] est porté sur L le milieu de [DA].

L, milieu de [DA] est donc l'image de K dans la symétrie de centre I.

Parallèles équidistantes.

Soient trois droites parallèles qui découpent sur une sécante deux segments égaux.

Première propriété : Toute sécante parallèle à la première est aussi partagée en deux segments égaux.

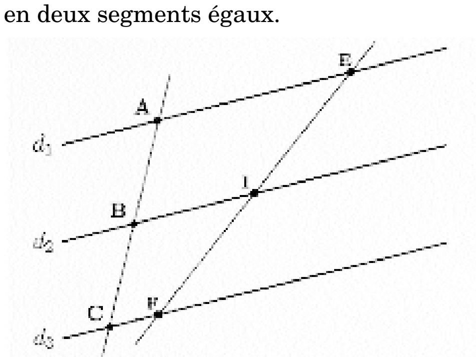


Démonstration : La première et la deuxième sécantes coupent les parallèles d_1, d_2, d_3 respectivement en A, B, C et en A', B', C'.

On sait que AB = BC. Il apparaît immédiatement que ABB'A' et BCC'B' sont des parallélogrammes. Par suite AB = A'B' et BC = B'C'.

Il en résulte que A'B' = B'C'.

Deuxième propriété : Toute sécante est partagée en deux segments égaux.



Démonstration : La première sécante coupe les parallèles d_1, d_2, d_3 respectivement en A, B, C. On sait que AB = BC. La deuxième sécante coupe les parallèles d_1, d_2, d_3 respectivement en E, I, F.

On considère B' tel que I est le milieu de [BB']. Par B' on trace la parallèle à (AC) qui coupe la parallèle d_1 en A' et la parallèle d_3 en C'. Il en résulte que A'B' = B'C'.

Le quadrilatère ACC'A' est un parallélogramme. Il a un centre de symétrie, symétrie qui porte, d'après ce qui précède, B milieu de [AC] sur B' le milieu de [C'A']. Donc ce centre est I le milieu de [BB'].

Dans cette symétrie l'image de d_1 est d_3, et l'image de (EF), qui contient I, est elle-même. L'image de E, à l'intersection de d_1 et (EI) est F, à l'intersection de d_3 et (FI). D'où FI = IE

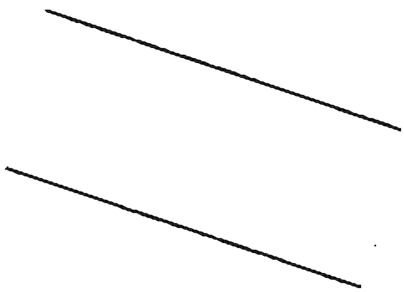
Conclusion.

Si une famille de droites parallèles partage une sécante en segments égaux entre eux, alors elle partage toute autre sécante en segments égaux entre eux. On parlera de *famille de parallèles équidistantes* lorsque qu'elle aura cette propriété.

Exercices et applications.

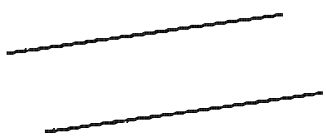
Refaire les démonstrations concernant le parallélogramme et le théorème des parallèles équidistantes en se servant d'un papier calque.

Dans les exercices qui suivent des droites parallèles sont tracées. On demande d'en tracer d'autres pour obtenir une famille de parallèles équidistantes. Il est possible et utile d'en proposer beaucoup d'autres du même type.



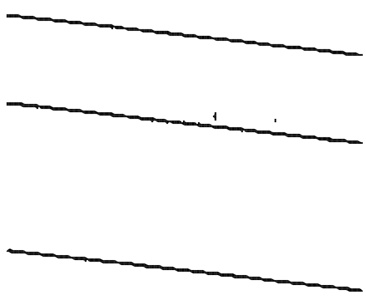
Exercice 1

Ajouter, à l'intérieur de ces deux parallèles, 2 droites pour obtenir une famille de 4 parallèles équidistantes.



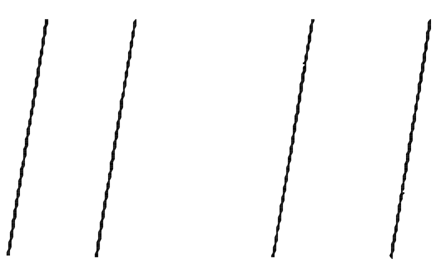
Exercice 2

Ajouter, à ces deux parallèles, 2 droites à l'intérieur et 3 à l'extérieur pour obtenir une famille de 7 parallèles équidistantes.



Exercice 3

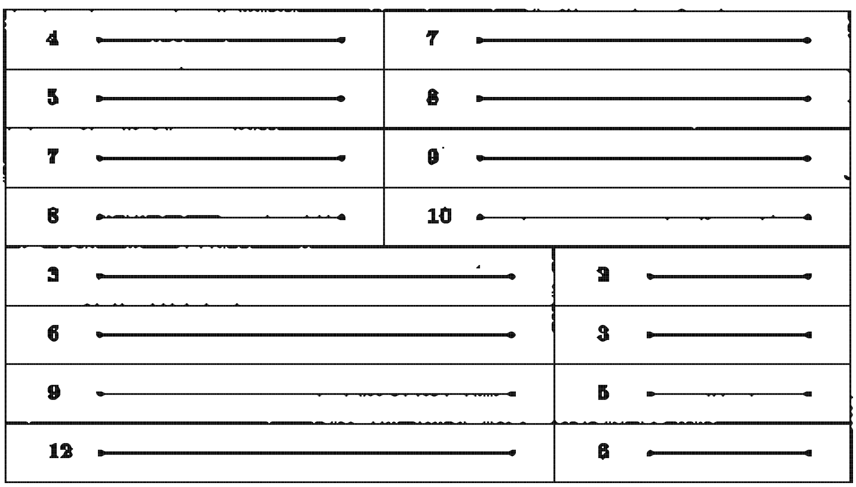
Ajouter, à l'intérieur de ces parallèles, 6 droites pour obtenir une famille de 9 parallèles équidistantes.



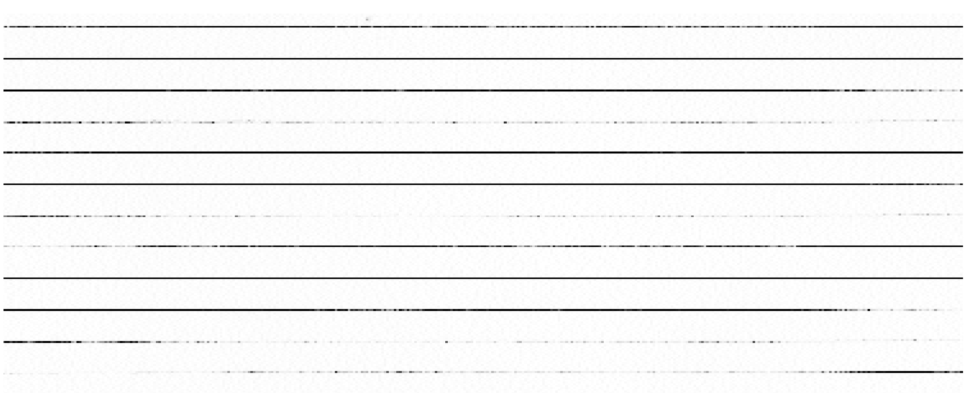
Exercice 4

Ajouter, à l'intérieur de ces parallèles, 10 droites pour obtenir une famille de 14 parallèles équidistantes.

Exercice 5. Le dessin ci-dessous représente des segments que l'on veut partager en segments égaux — leur nombre est indiqué sur la gauche. Pour cela on les reproduit sur du papier calque et on découpe les rectangles contenant ces segments.

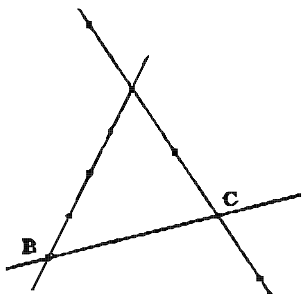


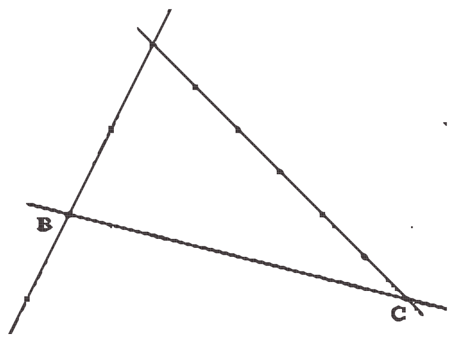
Utiliser le tracé de la famille de droites parallèles équidistantes, effectué ci-dessous, pour partager les segments donnés en segments égaux.

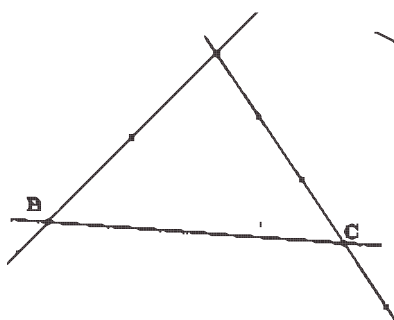


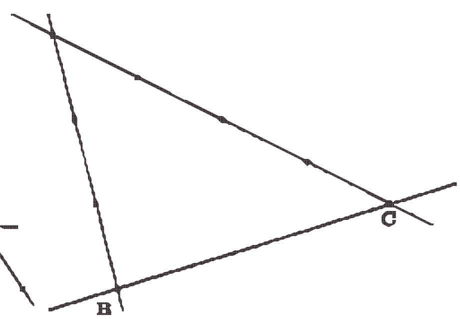
Coller ensuite les morceaux à leur place sur la feuille après avoir pris soin de réduire les dimensions des rectangles découpés.
Remarque : Certains partages ne sont pas possibles dans le cadre de cet exercice.

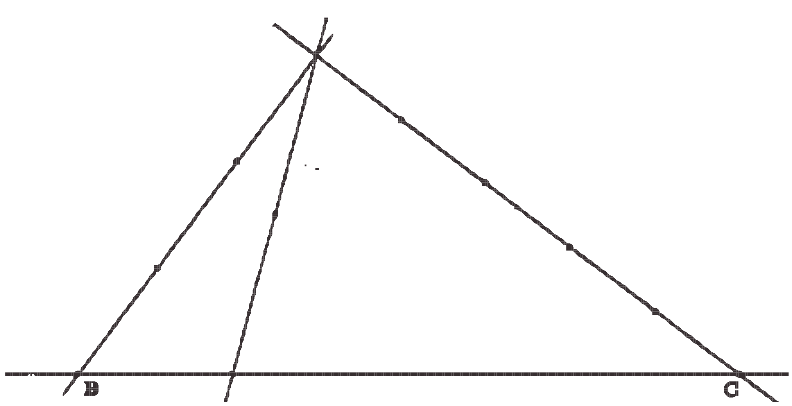
Exercices 6. Dans les exercices qui suivent, les points déterminent sur les droites des segments égaux. On demande de tracer une famille de droites parallèles à (BC) *équidistantes* passant par ces points.
Remarque : Des parallèles ne comportant pas de points marqués *doivent parfois* être tracées.



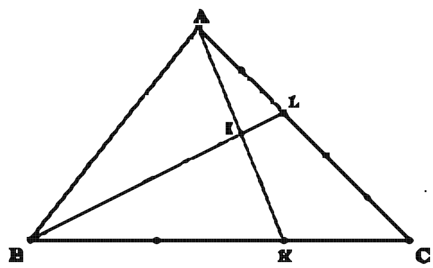






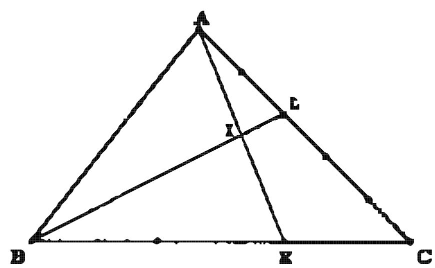


Exercices 7. *Dans les exercices qui suivent, les points déterminent sur les droites des segments égaux.*



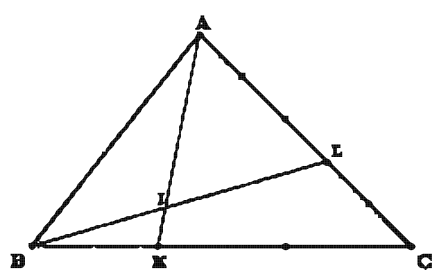
Tracer une famille de parallèles à (BL), *équidistantes*, passant par les points marqués.

En déduire le rapport des longueurs $\frac{AI}{AK}$.



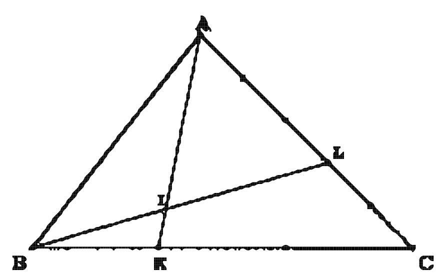
Tracer une famille de parallèles à (AK), *équidistantes*, passant par les points marqués.

En déduire le rapport des longueurs $\frac{BI}{BL}$.



Tracer une famille de parallèles à (BL), *équidistantes*, passant par les points marqués.

En déduire le rapport des longueurs $\frac{AI}{AK}$.



Tracer une famille de parallèles à (AK), *équidistantes*, passant par les points marqués.

En déduire le rapport des longueurs $\frac{BI}{BL}$.