SUR LA NOTION DE PERSPECTIVE HISTORIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT D'UNE SCIENCE

Rudolf BKOUCHE
Irem de Lille

Introduction

La notion de perspective historique[1] (*) n'est pas facile à cerner. Elle est marquée par une double ambiguïté, d'une part la trop fréquente confusion entre l'enseignement et la classe, d'autre part une interprétation trop réductrice de l'apport de l'histoire d'une science dans l'enseignement, l'histoire présentée comme une motivation, une façon différente d'enseigner ou une entrée en matière, toutes formes d'interventions qui relèvent plus souvent de la pensée magique que d'une réelle mise en perspective historique.

C'est donc sur ces deux points que nous nous proposons d'intervenir, deux points que nous considérons comme liés dans la mesure où ils mettent tous deux l'accent sur le rôle du professeur.

Un certain angélisme[2] met l'accent sur l'élève au dépens de ce qui reste la raison d'être de la classe : transmettre un savoir, c'est-à-dire amener l'élève à posséder la maîtrise de ce savoir.

Si, comme le dit Sanchez, *« ce qui est objet d'enseignement n'a que la force que lui prêtent ceux qui sont enseignés »*[3], l'une des tâches de *celui qui enseigne* est d'amener *ceux qui sont enseignés* à prendre conscience de cette force. C'est en ce sens que la perspective historique peut s'inscrire, moins comme motivation (la perspective historique oscillerait alors entre l'*agit-prop* et la promotion, au sens publicitaire du terme) que comme mise en place d'une *problématisation*, point que nous développons ci-dessous.

En ce sens, l'intervention d'une perspective historique ne saurait être un simple ajout à l'enseignement ; elle doit s'intégrer à l'enseignement, qu'elle apparaisse explicitement

(*) On trouvera les notes en fin d'article.

dans la classe ou non ; en cela elle est d'abord l'affaire des professeurs.

1- et si on parlait des professeurs

Nous avons dit ci-dessus qu'il fallait distinguer l'enseignement d'une discipline et la classe ; pour préciser cette distinction, nous la replacerons dans le cadre du triptyque qui régit l'acte d'enseignement, triptyque constitué par ce que l'on peut appeler les trois moments de l'activité d'enseignement, celui de la discipline, celui de l'enseignement de la discipline et celui de la classe [4]. Ce triptyque concerne essentiellement l'activité du maître, mais c'est la prise en compte de ces trois moments et la réflexion sur l'articulation entre iceux qui permet d'avoir prise sur l'enseignement. Cela met au second plan les théories de l'apprentissage, la question du «comment l'élève apprend», pour mettre en avant la problématisation du savoir que l'on enseigne, problématisation sur laquelle nous reviendrons dans la suite.

On a beaucoup parlé du rapport au savoir, ce rapport intime qu'entretient avec un domaine de la connaissance celui qui s'intéresse à ce domaine, sa façon de le penser qui n'appartient qu'à lui et qui lui permet de se retrouver dans les arcanes de ce domaine [5]. On peut alors considérer que le rôle du maître est d'amener l'élève à construire son propre rapport au savoir qu'on lui enseigne, et non construire son propre savoir comme le clame la vulgate constructiviste, mais cela suppose que le maître soit conscient de son propre rapport au savoir ; si la construction du rapport au savoir de l'élève est fonction du rapport au savoir du maître (que l'élève le reprenne à son compte ou s'en écarte, voire en conteste la forme), ce dernier joue un rôle essentiel dans l'acte d'enseignement. C'est donc essentiellement du rapport au savoir du maître que nous parlerons, si l'on considère que la maîtrise de la discipline qu'il enseigne est une condition nécessaire (jamais suffisante il est vrai, mais quelles sont les conditions suffisantes en la matière ?) de l'acte d'enseignement. C'est la pleine conscience de ce rapport au savoir qui peut permettre au maître de pointer les difficultés de la discipline et de penser les difficultés rencontrées par les élèves, la pratique de la classe lui permettant, en fonction de ses propres conceptions sur la discipline, de reprendre constamment une réflexion qui n'est jamais terminée.

C'est donc le rapport au savoir du maître qui peut lui permettre de penser cette articulation entre les enjeux du savoir qu'il enseigne, les enjeux propres à l'enseignement de ce savoir (enjeux épistémologiques, ceux qui sont proprement liés à la connaissance de ce domaine, mais aussi enjeux institutionnels) et les difficultés rencontrées dans la classe (difficulté des élèves confrontés à un domaine de la connaissance, mais aussi difficulté du maître devant les difficultés des élèves).

2- la question de la problématisation

Nous reviendrons d'abord sur les trois moments de l'épistémologie [6].

Prolongeant l'analyse de Gonseth qui distingue entre une *stratégie de fondement* et une *stratégie d'engagement* dans la construction de la connaissance [7], nous distinguerons trois moments de l'épistémologie, une *épistémologie des fondements*, une *épistémologie du fonctionnement* et une *épistémologie des problématiques* [8].

L'épistémologie des fondements se propose l'étude des conditions de légitimation de l'activité scientifique sous ses deux formes aujourd'hui canoniques, la forme mathématico-logique et la forme expérimentale (encore faut-il préciser ce que chacune de ces deux formes signifie dans le cadre d'un domaine donné de la connaissance). Nous pouvons distinguer deux grandes formes de cette épistémologie des fondements, une forme *métaphysique*, laquelle s'appuie sur une ontologie des objets (que l'on se situe dans une philosophie empiriste où les objets mathématiques sont des *abstractions* issues de la connaissance sensible, ou que l'on adopte un point de vue platonicien), et une forme *analytique*, laquelle s'appuie essentiellement sur une analyse du langage conduisant à expliciter ce que l'on pourrait appeler *la grammaire du raisonnement*, les objets étant définis (ou redéfinis) par un système de relations donné *a priori*. En ce qui concerne les mathématiques, on peut ainsi distinguer entre *une mathématique des objets* fondée sur les vérités premières que sont les axiomes, considérés comme propositions portant sur des objets existants, propositions évidentes par elles-mêmes comme on peut le lire dans les traités classiques de géométrie élémentaire, et *une mathématique des relations* comme se présente la construction hilbertienne. La diversité des modes de raisonnement qui ont constitué dans l'histoire ce que l'on appelle la démonstration et la diversité des conditions de légitimation de ces raisonnements nous amènent à prendre en compte la diversité des approches du problème des fondements et en particulier son historicité. L'étude de l'épistémologie des fondements se pose ainsi doublement ; d'une part une étude *synchronique* s'intéressant aux principes qui régissent les règles de raisonnement à une époque donnée, d'autre part une étude *diachronique* dont l'objet est l'étude des transformations des conditions de légitimation du raisonnement dans l'histoire, ce qui pose le double problème des raisons de ces transformations d'une part et d'autre part des *invariants historiques* [9] qui font que l'on reconnaît une unité dans les diverses formes du raisonnement mathématique à travers les âges.

L'épistémologie du fonctionnement peut être considérée comme l'analyse des procédures, moins dans leurs fondements que dans leurs significations, autant sur le plan proprement technique que sur le plan conceptuel. Il s'agit ici moins de rechercher un discours fondateur que d'expliciter comment des procédures, des modes de raisonnement ou des modes de recherche se sont constitués et comment ils ont été et sont utilisés [10]. Ceci nous renvoie encore une fois aux raisons qui conduisent à fabriquer de telles procédures, c'est-à-dire aux problèmes qui en sont à l'origine.

L'épistémologie des problématiques se propose d'analyser comment les problèmes qui ont conduit l'homme à fabriquer ce mode de connaissance que nous appelons la connaissance scientifique ont modelé les théories inventées pour résoudre ces problèmes. Si, comme le dit Max Weber, *« la construction des concepts dépend de la façon de poser les problèmes, laquelle varie à son tour avec le contenu même de la civilisation »* [11], c'est à travers les problèmes que la méthode scientifique s'est construite et c'est dans le caractère même de ces problèmes et leur formulation que l'on peut essayer de comprendre comment se sont mises en place les théories plus ou moins sophistiquées qui constituent la science. Cela nous conduit à privilégier la notion de problématique (ou de champs de problèmes [12]) dans l'étude des conditions de la construction de la science, problèmes de fondements et règles de fonctionnement s'articulant autour des problématiques dans lesquelles ils se situent. Précisons ici que l'épistémologie des problématiques ne se situe pas seulement dans le cadre d'une genèse (que ce soit celle de l'histoire collective ou celle de l'histoire individuelle) et en ce sens, si le recours aux problématiques fait largement appel à l'histoire des sciences, il ne se réduit pas à celle-ci. La problématisation participe ainsi de la construction de la science en tant qu'elle est une science, c'est-à-dire une systématisation et une organisation de connaissances.

C'est ce point de vue de l'épistémologie des problématiques que nous proposons de développer dans la suite à partir de trois questions, la notion de limite, le rôle de la perspective dans l'étude de la géométrie dans l'espace et enfin la relation entre la géométrie élémentaire et l'algèbre linéaire. Nous verrons, en cours de route, comment une mise en perspective historique peut contribuer à éclairer ces questions, même si nous considérons qu'il y a d'autres façons de faire dans l'enseignement que la mise en perspective historique.

la notion de limite

La notion de limite relève de deux problématiques qui, si elles sont liées, présentent des aspects contradictoires. La première problématique est d'ordre cinématique au sens où elle s'appuie sur la notion de mouvement ; la formulation canonique (en terme de fonction par exemple) :

« $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a »

doit alors être entendue de la façon suivante : Lorsque la variable indépendante x s'approche indéfiniment de la valeur a, alors la fonction (la variable dépendante) $f(x)$ s'approche indéfiniment de la valeur b. [13]

L'assertion citée : « $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a » est ici constituée de deux propositions, une proposition principale « $f(x)$ tend vers b » et une proposition subordonnée « lorsque x tend vers a », indiquant ainsi que la variable x entraîne, dans son mouvement vers a, la variable $f(x)$ vers la valeur b ; autrement dit c'est la variable qui commande la fonction.

La seconde problématique est celle de l'approximation, elle peut être formulée de la façon suivante : soit une suite numérique x_n, dire que la suite x_n tend vers une limite l c'est dire que « plus n est grand, plus le nombre x_n s'approche de l », ce qui participe encore du mouvement, mais s'y ajoute le problème suivant : jusqu'où faut-il aller dans la suite pour que la différence entre x_n et l soit plus petite qu'un nombre donné à l'avance, ou, si l'on préfère, pour que l'erreur que l'on fait en remplaçant l par x_n soit plus petite qu'une valeur donnée à l'avance.

Un exemple élémentaire d'approximation est le calcul décimal approché d'un nombre : combien de chiffre après la virgule pour que le nombre calculé diffère du nombre cherché de moins d'une valeur donnée à l'avance ? exemple qui a l'avantage de mettre en valeur le lien entre la notion d'approximation et le calcul lui-même. On peut citer ici la pratique de la division euclidienne lorsque « ça ne tombe pas juste ».

Ici l'aspect cinématique devient second, ce qui importe n'est plus le mouvement de la variable indépendante, mouvement défini par la succession des numéros d'ordre [14], ce que l'on cherche est le numéro d'ordre permettant l'approximation voulue. Autrement dit, c'est la variable dépendante qui s'impose et la structure grammaticale de l'assertion rituelle

« $f(x)$ tend vers b lorsque x tend vers a » est différente ; il n'y a plus qu'une seule proposition qui indique à la fois ce qu'est la limite et le principe d'un calcul approché. On reconnaît dans cette seconde formulation la définition weïerstrassienne de la limite [15].

On voit ainsi apparaître une contradiction entre les deux problématiques ; la première met l'accent sur le mouvement de la variable indépendante et l'effet d'entraînement sur la variable dépendante, la seconde met l'accent sur la variable dépendante et la façon dont elle force les valeurs de la première variable, contradiction qui constitue l'une des difficultés de la notion de limite, difficulté qui relève de l'ordre mathématique et c'est en cela qu'elle est une difficulté pédagogique.

Une conception utilitariste de l'enseignement (assurer la réussite, ce qui implique d'éviter ce type de difficulté aux élèves) conduirait à choisir une seule problématique et à choisir les exercices en fonction de cette problématique, ou bien à inventer l'artefact pédagogique convenable qui permettra aux élèves de réussir les exercices *ad hoc* qu'on leur proposera. Mais qu'auront-ils compris et qu'auront-ils appris?

Si l'on revient sur la notion de limite et les deux problématiques dites ci-dessus, on remarque que plusieurs éléments entrent en jeu parmi lesquels nous citerons l'aspect intuitif et l'aspect opératoire. Il faut alors préciser que l'aspect intuitif participe de chacune des deux problématiques définies ci-dessus, celle du mouvement et celle de l'approximation dans la mesure où c'est autour de cet aspect intuitif que se sont définies les deux problématiques considérées. Par contre l'aspect opératoire a conduit à mettre en avant la problématique de l'approximation dans la mesure où c'est la formulation weïerstrassienne qui, pour des raisons que nous n'aborderons pas ici, s'est imposée pour donner une définition rigoureuse de la notion de limite et en déduire les conditions de calcul des limites [16].

Ignorer, dans l'enseignement, les deux problématiques constitutives de la notion de limite et les deux aspects, l'intuitif et l'opératoire, qui permettent d'appréhender cette notion, ne peut que contribuer à mutiler la notion, et par cela même à mutiler la pensée mathématique des élèves.

Exemple de cette mutilation, un article récent publié dans le *Bulletin de l'APMEP* [17] : les auteurs y déclarent que l'on ne peut expliquer à un élève de lycée que la fonction $\sin x$ n'a pas de limite lorsque x tend vers l'infini. Que signifie une telle déclaration si ce n'est la disparition du concept de limite de l'enseignement du lycée ? la limite se réduit à un certain mode de calcul dans des cas très particuliers sans que l'élève soit conscient de la signification du calcul qu'il fait. Comme s'il fallait éviter à tout prix que l'élève fasse appel à son intuition (il pourrait se tromper!), comme s'il ne pouvait à ce stade (le formalisme des (ε,η) n'est pas encore introduit) que suivre aveuglément les procédures qu'on lui impose ; serait-il inconvenant qu'un élève fasse ce que tout mathématicien pratiquant fait, à savoir, s'appuyer sur son intuition et remarquer qu'une fonction périodique, oscillant constamment lorsque les valeurs de la variable augmentent, ne peut avoir de limite. Par contre, marque de conscience professionnelle de la part des auteurs de l'article, ils tiennent à montrer à leurs élèves ce qu'est une démonstration et utilisent les intervalles emboîtés pour montrer, rigoureusement, que la fonction x^2 tend vers 1 lorsque x tend vers 1. Que voilà de la belle mathématique ! Il est difficile d'expliquer une propriété évidente mais on sait démontrer d'une façon sophistiquée une autre propriété évidente en utilisant une méthode dont les élèves ne peuvent comprendre, à ce stade, la véritable signification.

On peut alors poser la question de la part de l'intuition et de la rigueur dans l'enseignement ; faut-il laisser une grande part à l'intuition, quitte à faire peu de démonstrations, ou faut-il exiger des démonstrations en forme, quitte à laisser de côté la compréhension par les élèves des mathématiques auxquelles ils sont confrontés ? Disons que lorsque la question est posée de cette façon, tout est déjà biaisé et les mathématiques disparaissent derrière une pédagogie vide. C'est que, sous cette forme, la question des limites a été déproblématisée. On ne sait plus de quoi il s'agit, on sait seulement qu'il y a un certain règlement à appliquer et que ce que l'on cherche n'a d'autre définition que l'application correcte du règlement, d'où la recherche d'un règlement facile à appliquer.

On voit ainsi la fonction de la problématisation, d'une part expliciter, autant que faire se peut, les raisons qui conduisent à étudier une notion et d'autre part mettre en valeur les aspects opératoires qui permettront de résoudre les problèmes relevant de cette notion. Notons que cette explicitation des raisons ne se réduit pas à la recherche d'une genèse de la notion (que ce soit celle de l'histoire ou celle de l'apprentissage), c'est l'activité mathématique elle-même qui est en question, la façon de penser la limite, de la calculer quand cela est possible ou d'inventer de nouvelles méthodes de détermination quand cela est nécessaire. On pourrait parler par exemple de l'un des premiers problèmes où l'on rencontre la notion de limite, la division qui ne tombe pas juste, et l'on pourrait citer de nombreux exemples où la notion de limite intervient, que ce soit pour comprendre un phénomène ou que ce soit pour calculer la valeur d'une quantité (nombre ou grandeur), usant de l'une ou de l'autre problématique explicitée ci-dessus ou même des deux ensemble.

Se pose alors la question de la mise en perspective historique. En fait ici elle se réduit à peu ; point n'est besoin de faire appel à l'histoire pour exposer les deux problématiques constitutives de la notion de limite et pour en distinguer les aspects intuitifs et les aspects opératoires. Il reste qu'un regard historique permet de comprendre comment chacune des problématiques conduit à la notion de limite et comment s'est joué, dans le développement de l'analyse mathématique, le lien entre les deux problématiques conduisant à mettre en avant la problématique de l'approximation ; on peut par exemple comparer les diverses définitions de la notion de limite au cours des âges [18].

la géométrie dans l'espace et la question de la représentation

Lorsque nous parlons du rôle que joue la représentation perspectiviste dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace, nous faisons moins référence à l'aspect historique qu'aux problèmes que pose un tel mode de représentation, problèmes essentiellement géométriques qui conduisent à mettre en place à la fois certaines constructions géométriques et les raisonnements légitimant ces constructions.

Le problème de la représentation est exemplaire en ce sens que la théorisation, ici la géométrisation, se construit aux limites d'une pratique, pratique du peintre ou pratique architecturale si l'on se place du point de vue de l'histoire, mais simplement pratique du dessin si l'on se place du point de vue de la classe [19]. La théorisation se situe ici à deux niveaux, le premier répond à la question du « comment faire » lorsque l'on ne sait pas ou ne sait plus faire, le second répond à la question de la légitimation des réponses à la première question.

On peut alors considérer cet usage de la représentation perspectiviste dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace de deux façons. Ou bien l'on considère que la question de la représentation est une simple motivation pour «vendre» la géométrie dans l'espace et dans ce cas la problématisation est une donnée extérieure, une belle histoire qui peut convaincre quelques élèves et laisser les autres sceptiques [20] ; ou bien l'on considère que la problématique de la représentation participe de la géométrie elle-même et dans ce cas la pratique perspectiviste participe pleinement de l'enseignement de la géométrie.

Il faut rappeler ici l'une des difficultés de l'enseignement de la géométrie dans l'espace ; d'une part la nécessité d'user de représentations planes pour étudier les situations spatiales, d'autre part la nécessité de règles de représentation s'appuyant sur la géométrie dans l'espace. Le recours à l'histoire et en particulier à celle du développement de la représentation perspectiviste permet d'aborder la difficulté en montrant comment une pratique de dessin a conduit d'une part à construire les concepts théoriques qui la légitiment et d'autre part comment la construction de tels concepts a conduit la théorie à s'émanciper de ses origines avec le développement de la géométrie projective [21]. En ce sens, on peut concevoir que l'enseignement de la géométrie dans l'espace prenne en compte assez tôt le point de vue projectif [22].

On voit ainsi l'apport d'une mise en perspective historique, d'abord la mise en évidence du rôle joué par une pratique (ici le dessin) dans le développement d'une théorie mathématique, ensuite la façon dont cette théorie d'une part légitime des règles pratiques et d'autre part s'émancipe de cette pratique pour constituer un nouveau domaine de la science. C'est alors une façon de rompre avec la dichotomie « mathématiques pures/mathématiques appliquées » et de mieux comprendre comment les mathématiques dites *pures* interviennent dans la connaissance du monde.

la linéarisation de la géométrie élémentaire

La question des rapports entre algèbre linéaire et géométrie élémentaire est difficile et si l'*on* sait aujourd'hui que l'exposé de la géométrie élémentaire peut se réduire à un chapitre de l'algèbre linéaire [23], il ne semble pas facile d'accéder à ce « *on* ». Nous donnerons comme exemple certaines réactions de refus des étudiants qui préparent les concours d'enseignement lorsqu'on leur demande de comparer ces deux sommes de la géométrie de notre siècle que sont les *Leçons de Géométrie Elémentaire* de Hadamard [24] et la *Géométrie* de Berger [25] ; en quoi sont-ils différents et en quoi sont-ils semblables?

La linéarisation de la géométrie élémentaire s'est construite à partir de deux types de problèmes, le premier est lié au rôle joué par les équations linéaires dans le développement des méthodes analytiques mettant en valeur le rôle du calcul linéaire [26] en géométrie, le second est lié au calcul vectoriel, deux types de problèmes qui se sont développés de façon indépendante. Il faudrait aussi noter le rôle joué par la géométrie projective dans le développement du calcul linéaire, avec la définition « numérique » des espaces projectifs et la représentation analytique des transformations projectives comme transformations linéaires sur les coordonnées homogènes [27] ; nous pouvons citer par exemple l'article de Fano-Cartan dans l'*Encyclopédie des Sciences Mathématiques* [28] où le calcul linéaire est présent tout au long de l'article alors que la notion de vecteur en est absente [29]. Quant au calcul vectoriel, il se situe dans une autre problématique dans la mesure où il se propose comme un calcul *libre de coordonnées* même si certains ouvrages, pour le justifier, le présentent comme une écriture condensée des calculs portant sur les coordonnées [30].

Cet indépendance des deux formes d'intervention du linéaire en géométrie peut paraître surprenante pour qui connaît le lien entre l'algèbre linéaire et la géométrie élémentaire. Il est clair que l'on ne peut reconstituer l'histoire et il faut considérer cette indépendance comme un fait historique. Mais qu'en est-il dans l'enseignement ? on peut penser que la linéarisation de la géométrie faisant aujourd'hui partie de la vulgate mathématique, il semble inutile de revenir à des distinctions anciennes et l'on peut se borner à la présentation «algèbre linéaire» de la géométrie telle qu'elle est exposée par exemple dans l'ouvrage de Dieudonné *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire* [31]. Ce fut le point de vue de la réforme des *mathématiques modernes* et ce point de vue avait sa cohérence sur laquelle nous ne reviendrons pas [32]. Mais si, du point de vue structural la géométrie élémentaire peut être considérée comme un chapitre de l'algèbre linéaire, elle ne peut s'y réduire dans la mesure où elle participe d'autres enjeux de connaissance. La définition de Legendre, *« La géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue »* [33] reste toujours vraie et cette conception de la géométrie reste l'une des voies d'accès à la connaissance géométrique d'aujourd'hui.

La question se pose alors, en ce qui concerne l'enseignement de la géométrie, d'une part de prendre en compte la géométrie élémentaire en tant que telle, et jusqu'à maintenant, à quelques changements de point de vue près (ainsi l'introduction explicite du mouvement dans la réforme de 1902 [34]), la géométrie élémentaire reste celle tracée par le cadre euclidien, c'est-à-dire celle de l'étude des situations spatiales, d'autre part d'amener *ceux qui sont enseignés* à prendre en compte les méthodes contemporaines fondées sur la linéarisation non seulement parce qu'elles sont modernes mais parce qu'elles ouvrent d'autres horizons, dont celui de la *géométrisation* des divers domaines de la connaissance (mathématiques, sciences physiques, …) où intervient le linéaire n'est pas le moins important.

C'est encore une fois vers l'aspect problématique que nous nous retournerons.

Nous avons vu que le linéaire intervient en géométrie sous les deux formes du calcul linéaire et du calcul vectoriel, la question se pose alors d'expliciter les conditions de leur intervention et c'est cette explicitation qui permet d'en décider la place effective dans l'enseignement. Cette question est essentiellement d'ordre mathématique ; si l'histoire des mathématiques peut apporter des éléments de réponse en renvoyant aux problématiques originelles, il faut alors prendre en compte les changements de perspective qui ont pu transformer ces problématiques et les confronter aux problématiques telles qu'elles se posent aujourd'hui.

La question de l'enseignement est alors celle de la définition de problématiques signifiantes, signifiantes par rapport à ce que l'on veut enseigner, signifiantes aussi pour les élèves si l'on veut que ces derniers y trouve la force dont parlait Sanchez dans l'assertion citée au début de cet article. Ainsi la notion de problématique, parce qu'elle se situe au cœur de l'activité scientifique, se situe au cœur du triptyque défini ci-dessus: la discipline, l'enseignement, la classe.

En ce qui concerne la question ici posée des relations entre géométrie élémentaire et algèbre linéaire, l'aspect problématique doit permettre non seulement de penser la linéarisation de la géométrie élémentaire mais plus encore, car c'est l'un des apports les plus intéressants des mathématiques contemporaines, la géométrisation de tous les lieux où intervient le linéaire. On oublie trop dans l'enseignement que l'algébrisation de la géométrie a conduit à la géométrisation de l'algèbre et que cette double liaison entre géométrie et algèbre s'est développée dès la mise en place de la méthode des coordonnées comme le montrent les textes de Descartes et de Fermat.

Dans la mesure où le calcul linéaire participe des méthodes analytiques on peut considérer que son enseignement s'insère dans celui de la géométrie analytique encore qu'il nous semble nécessaire que l'accent soit mis, chaque fois que cela est possible, sur les invariants mis en évidence par ce calcul [35].

Par contre le calcul vectoriel apparaît, dès le commencement de son enseignement, comme une méthode nouvelle et par conséquent exige une intervention spécifique. Cette spécificité est d'autant plus importante que le calcul vectoriel ne participe pas de la seule géométrie ; en ce sens la première rencontre avec le calcul vectoriel ne peut se réduire, pour être signifiante, au seul domaine géométrique si l'on veut éviter que le calcul vectoriel n'apparaisse que comme une reformulation plus ou moins compliqué de situations connues [36]. Si les reformulations de situations connues et de problèmes déjà résolus jouent un rôle important dans le développement de l'activité scientifique, ces reformulations doivent être signifiantes sans quoi elles n'apparaissent que comme un verbiage sans intérêt aucun.

Le recours à l'histoire peut alors nous permettre de replacer l'enseignement du calcul vectoriel dans un cadre problématique prenant en compte ses divers aspects.

Dans son ouvrage sur l'histoire du calcul vectoriel [37] Crowe énonce trois grandes idées qui ont conduit au calcul vectoriel, le parallélogramme des forces, le calcul géométrique de Leibniz et la représentation géométrique des nombres complexes.

Si les deux dernières idées participent de la mise en place d'un calcul portant directement sur les objets géométriques (c'est ainsi que l'on peut comprendre la représentation géométrique des nombres complexes moins comme une représentation géométrique d'objets numériques que comme un calcul portant sur les objets géométriques eux-mêmes [38]), la première renvoie à la signification physique, plus précisément mécanique, du calcul vectoriel. Les vecteurs sont alors une façon de représenter des concepts mécaniques (les forces et les vitesses), un vecteur permettant de « mesurer » les grandeurs correspondantes de la même façon que les nombres permettent de mesurer les grandeurs scalaires (les longueurs, les temps…).

On distingue ainsi les grandeurs scalaires, une telle grandeur étant déterminée, une fois choisie l'unité de mesure, par le nombre qui la mesure et les grandeurs orientées qui, pour être déterminées, exigent des informations supplémentaires [39]. On voit ainsi se dessiner une problématique des grandeurs orientées qui s'inscrit autant dans la géométrie que dans la mécanique et qui se propose la mise en place d'un calcul sur ces grandeurs, ce qui constitue le calcul vectoriel.

On voit ainsi la multiplicité des problématiques qui ont conduit non seulement à penser le concept de vecteur, mais à en ordonner le calcul ; la question se pose alors de la rencontre de ces problématiques conduisant à la mise en place de ce chapitre spécifique que constitue le calcul vectoriel. Ce n'est pas ici le lieu d'une histoire de cette rencontre, nous nous contenterons de citer le *Traité de Mécanique Rationnelle* [40] d'Appell dans lequel l'auteur explique comment les calculs sur les vitesses et les calculs sur les forces relèvent d'un même calcul, ce qui à la fois justifie l'introduction d'un chapitre préliminaire de calcul vectoriel et guide ce calcul puisque celui-ci se construit, indépendamment de sa genèse historique, *via* les questions de mécanique auxquelles il va répondre ; on pourrait de même citer les divers chapitres préliminaires de calcul vectoriel dans les traités de mécanique et de physique (ainsi les volumes de Mécanique et d'Electricité du *Cours de Physique Générale* de Georges Bruhat [41]). On rencontre dans ces ouvrages moins l'usage d'un calcul vectoriel que l'on appliquerait en mécanique et en physique que la définition d'un calcul sur les objets que l'on étudie en mécanique ou en physique et l'explicitation d'analogies qui permettent d'unifier les divers modes de calcul en un seul. L'activité mathématique (celle du mathématicien praticquant comme celle de l'apprenti) se construit ainsi à l'intérieur de la problématique elle-même et celle-ci ne saurait se réduire à la simple motivation pour mettre en place une théorie mathématique.

On peut alors noter la différence entre le calcul vectoriel qui s'inscrit dans un calcul portant sur des objets géométriques ou mécanique spécifiques [42] et l'algèbre linéaire, laquelle participe d'un calcul sur les signes, indépendamment de toute signification de ces signes [43]. En ce sens le calcul vectoriel ne se réduit pas à l'algèbre linéaire même si, sur le plan formel, il peut n'apparaître que comme une partie d'icelle. On peut noter que le terme *espace vectoriel* né de la rencontre du calcul vectoriel et du calcul linéaire est moins la réduction du calcul vectoriel à l'algèbre linéaire qu'une heureuse métaphore ouvrant vers de nouvelles manières de penser les situations linéaires, d'autant plus heureuse qu'elle a permis un regard géométrique sur d'autres lieux tels par exemple l'analyse mathématique [44].

Il nous reste à dire comment le calcul linéaire et le calcul vectoriel se sont rencontrés ; nous nous contenterons, dans le cadre de cet article, de citer deux ouvrages, *Calcolo Geometrico* de Giuseppe Peano [45] et *Space, Time, Matter* de Hermann Weyl [46], dans lequel on peut lire d'une part une définition générale des espaces vectoriels et d'autre part comment la géométrie se construit dans ce contexte.

Reste, pour terminer ce paragraphe sur la problématisation, à revenir sur quelques points d'enseignement.

Si l'algèbre linéaire est le lieu d'une unification des connaissances, et c'est cela qui lui donne sa valeur universelle et en fait un chapitre essentiel des mathématiques contemporaines, on peut choisir de placer son enseignement au commencement ; ce fut la conception de la réforme des *mathématiques modernes* qui supposait que, une fois les grandes structures mathématiques connues par les élèves, le reste viendrait sans difficulté.

On peut considérer au contraire qu'une structure unifiante ne peut être enseignée qu'à partir de ce qu'elle unifie. On peut alors considérer deux points de vue.

Le premier point de vue met en avant la structure unificatrice ; c'est elle qui constitue l'objectif de l'enseignement, les domaines qui participent de cette unification n'étant plus que les préliminaires à l'apprentissage de l'algèbre linéaire. En particulier la géométrie élémentaire n'est plus qu'un passage obligé qui deviendra obsolète le jour où l'élève aura enfin compris moins la reformulation linéaire de la géométrie que le fait que cette première géométrie n'était qu'une étape.

C'est une telle conception qui conduit à écrire :

« Une difficulté rencontrée dans l'enseignement de concepts unificateurs et généralisateurs est le rôle des connaissances et des compétences préliminaires moins formalisées. En effet celles-ci doivent être réintégrées dans un processus d'abstraction, ce qui signifie qu'elles doivent être reconsidérées, pour mettre en évidence leurs caractéristiques communes, qui devraient être généralisées et unifiées, mais aussi pour laisser tomber des particularités intrinsèques qui deviendront obsolètes ou inadéquates dans la nouvelle approche.» [47]

Une telle conception nous semble doublement réductrice.

D'une part, elle oublie la signification scientifique de toute unification. L'algèbre linéaire ne rend pas obsolètes les domaines qu'elle unifie [48] en les replaçant dans un cadre général, bien au contraire. Non seulement elle approfondit la connaissance de ces domaines en en renouvellent les méthodes comme le montrent par exemple, en ce qui concerne la géométrie, l'article cité de Fano-Cartan ou plus récemment l'ouvrage d'Emil Artin qu'il faut savoir lire comme un prolongement de la géométrie élémentaire [49], mais encore, en mettant en valeur les structures formelles communes entre les divers domaines qu'elle unifie, elle permet ce que Dieudonné a appelé des *transferts d'intuition* [50], lesquels conduisent de la linéarisation de la géométrie élémentaire à la géométrisation de tous les lieux où intervient le linéaire (cf. ci-dessus).

D'autre part, et c'est là que se situe la difficulté signalée par les auteurs du texte cité, l'abstraction, même si elle est présentée comme un processus, est coupée de toute signification et la décontextualisation chère aux didacticiens n'est plus qu'une vaste déproblématisation. Comme si la seule question de l'enseignement scientifique était d'enseigner le dernier discours de la science sans se poser la question des raisons de ce dernier discours, sans se poser la question des chemins qui permettent d'accéder à la compréhension de ce dernier discours [51].

Le second point de vue se propose de replacer l'algèbre linéaire dans sa perspective épistémologique (qu'il faut distinguer de la perspective historique) ; pourquoi l'algèbre linéaire ? qu'apporte-t-elle à la géométrie élémentaire, à la fois sur le plan des méthodes et sur le plan de la compréhension ? que signifie l'unification de plusieurs domaines de la connaissance ? Si un point de vue historique permet d'aborder ces questions, il est clair qu'avant de ressortir d'un point de vue historique, elles participent de l'activité du mathématicien et c'est de ce point de vue qu'il faut l'aborder dans l'enseignement des mathématiques.

Dans ce cadre, la géométrie élémentaire reste l'objectif prioritaire dans l'enseignement de la géométrie et c'est parce qu'elle est prioritaire que l'on peut aller plus loin, c'est-à-dire aborder les trois aspects de la géométrie que sont la géométrie comme science autonome, autrement dit la science des *situations spatiales*, ensuite la géométrie dans ses rapports avec les autres domaines de la connaissance, enfin la géométrie comme langage et comme représentation, ce que l'on peut appeler *l'aspect métaphorique* de la géométrie, lequel constitue le fondement de la géométrisation [52].

Dans ce cadre, c'est moins la relation formelle entre géométrie élémentaire et algèbre linéaire qui importe que la façon dont le *linéaire* intervient dans la géométrie. Le linéaire apparaît, comme nous l'avons dit ci-dessus, *via* les méthodes analytiques et les méthodes vectorielles, méthodes qui, si elles sont étroitement liées, restent distinctes, non seulement par les conditions d'apparition dans l'histoire mais parce qu'elles mettent en jeu des modes d'appréhension différents de la géométrie: une réduction au calcul numérique puis littéral d'une part, la mise en place d'un calcul géométrique portant directement sur certains objets géométriques d'autre part. La rencontre des divers ingrédients qui constituent la géométrie doit ainsi apparaître, non comme une simple répétition de l'histoire (ce qui, comme le dit l'adage, ne serait qu'une farce), mais comme une rencontre problématisée ; dans le cas contraire la multiplicité des méthodes risque de n'apparaître que comme une complication de la réglementation.

On voit ainsi la nécessité de mettre en valeur l'usage de méthodes linéaires dans l'enseignement de la géométrie, que ce soit *via* la géométrie analytique des droites et des plans, en particulier les problèmes d'intersection, et la recherche de courbes algébriques satisfaisant des conditions linéaires ou que ce soit *via* le calcul vectoriel, lequel permet de mettre en place, en dimension 2 et 3 et dans un cadre géométrique, divers concepts de l'algèbre linéaire ; tout en sachant que cet usage du linéaire n'implique en rien un enseignement préalable d'algèbre linéaire [53] ; bien au contraire, c'est cet usage du linéaire en géométrie, confronté avec d'autres usages du linéaire dans d'autres domaines, qui permettra de comprendre la signification de l'unification proposée par l'algèbre linéaire, qui permettra aussi (et c'est, me semble-t-il, le point le plus important) les liens que l'on peut tisser entre les divers domaines où intervient le linéaire. Evidemment, la mise en place d'un tel enseignement ne va pas de soi et elle exige une réflexion mathématique constante, autant, voire peut-être plus, de la part de *celui qui enseigne* que de *ceux qui sont enseignés* ; mais c'est que le rapport au savoir du maître (et il est bon de rappeler que *celui qui enseigne* doit savoir être un maître [54]) reste essentiel dans l'acte d'enseignement.

de la problématisation à la hiérarchisation des connaissances

La prise en compte de l'aspect problématique, tel que nous l'avons rencontré ci-dessus, conduit à construire une hiérarchie des connaissances, et par conséquent une hiérarchie de ces connaissances dans l'enseignement. La hiérarchisation des connaissances n'est pas une construction intangible, elle dépend, comme tout mode de classification des connaissances, d'une part des conditions dans lesquelles s'élaborent celles-ci, d'autre part du niveau de connaissances de celui qui use de cette hiérarchisation. Cette hiérarchisation est donc à la fois nécessaire et instable et l'un des rôles de l'enseignant (du maître faudrait-il dire) est de définir les hiérarchisations en fonction du niveau d'études. A défaut d'une réflexion sur cette hiérarchisation, on peut être tenté soit par l'illusion langagière de la réforme des *mathématiques modernes* [55], soit par une pédagogie formelle telle que celle proposée dans l'ouvrage cité sur l'enseignement de l'algèbre linéaire.

Le rôle d'une perspective historique dans l'enseignement peut alors apporter des éléments de réflexion qui permettent d'établir une hiérarchisation des connaissances au sens que nous avons dit ci-dessus ; il ne s'agit pas de la seule hiérarchisation liée à l'apprentissage, il s'agit d'une hiérarchisation bien plus profonde qui se situe à l'intérieur du savoir lui-même, dans les liens entre les divers domaines qui le constituent et dans le rapport difficile entre les divers niveaux de hiérarchisation.

Pour préciser cette notion de hiérarchie, nous reviendrons sur la double hiérarchisation définie par la relation entre la géométrie élémentaire et l'algèbre linéaire. Dans un premier temps, la géométrie élémentaire intervient comme connaissance première et c'est en s'appuyant sur elle que l'on peut montrer comment se construit une intervention du linéaire ; dans un second temps, le linéaire ayant été mis en place sous la forme moderne de l'algèbre linéaire, on reconstruit la géométrie élémentaire comme chapitre de l'algèbre linéaire. Cette reconstruction n'est pas une simple reformulation, ce qui serait de peu d'intérêt, elle constitue à la fois un approfondissement et un élargissement de la géométrie et conduit à penser la géométrisation dont nous avons déjà parlé.

Notons que la double hiérarchisation dite ci-dessus ne relève pas seulement d'un ordre historique (la géométrie élémentaire précédant l'algèbre linéaire dans le temps jusqu'à ce que cette dernière remette la première à sa «vraie» place) ou d'un ordre génétique (l'apprentissage de la géométrie élémentaire considérée comme une étape vers la connaissance de l'algèbre linéaire) ; elle marque une prise en compte des enjeux de la connaissance, autant ceux de la géométrie élémentaire (l'étude des situations spatiales) que ceux de l'algèbre linéaire (la structuration d'un ensemble de connaissances), autant ceux de la reformulation de la géométrie en termes d'algèbre linéaire que ceux de la géométrisation des domaines de la connaissances où intervient le linéaire. En ce sens si une mise en perspective historique permet l'établissement de la double hiérarchisation définie ci-dessus, cette mise en perspective historique ne relève pas de la seule histoire ; elle est aussi un élément de compréhension de l'état présent de la connaissance et c'est à ce titre qu'elle participe de l'enseignement.

On peut alors considérer que la prise en compte d'une perspective historique dans l'enseignement participe de l'hygiène scolaire (nous parlons ici de l'enseignement, pas de la classe) en amenant *ceux qui enseignent* à une réflexion sur les enjeux et les significations de leur enseignement ; le danger est alors que, de ce recours à la perspective historique, on fabrique des « méthodes d'enseignement » donnant l'illusion d'un prêt-à-enseigner qui ne peut être que néfaste, autant pour *ceux qui sont enseignés* que pour *ceux qui enseignent*.

une conception réductrice de la problématisation

Notons que la notion de problématique peut être comprise dans un sens plus étroit, celui d'une simple motivation ; son rôle est alors, pour reprendre une expression aujourd'hui à la mode dans l'enseignement français, de *donner du sens* à ce que l'on enseigne. A défaut d'expliciter le sens de ce que l'on enseigne, on se contente de *donner du sens*, la problématisation devient un artefact didactique destiné à convaincre l'élève de l'intérêt de ce qu'on lui enseigne, une forme d'*agit-prop* si l'on veut, autrement dit une forme de propagande. Il est vrai qu'une conception didacticienne isolant l'acte de l'élève, ou plutôt le réduisant au seul phénomène d'apprentissage, peut enlever toute épaisseur à la problématisation.

Le danger réside ainsi dans une vision purement instrumentale de la problématisation : « la problématisation, ça sert à … », ce qui revient à dire qu'elle ne sert à rien d'autre qu'à rassurer le professeur : « ai-je bien dit ce qu'il fallait dire ? », ce qui le met dans la même posture que l'élève qui se pose la question « qu'est-ce que je dois dire ? ».

La connaissance disparaît derrière la sécurité. Notons que l'usage de l'histoire des mathématiques peut conforter cette *problématisation-alibi* lorsque cette histoire est elle-même présentée sous la seule forme d'une *donation de sens*.

3- lecture historique et lecture mathématique

Il y a plusieurs façons de lire un texte mathématique ancien ; nous distinguerons ici la *lecture historique* proprement dite et la *lecture mathématique*.

La lecture historique demande de replacer le texte à la fois dans son contexte scientifique et dans son contexte historique et d'expliciter, autant que faire se peut, le lien entre ces deux contextes, c'est-à-dire la façon dont le contexte scientifique se définit dans l'histoire et la façon dont le contexte scientifique modèle l'histoire. Cette lecture est essentiellement le travail de l'historien des mathématiques. Nous verrons comment ce travail d'historien intervient dans la mise en place d'une perspective historique, moins en tant que travail d'historien que travail accompagnant une réflexion mathématique propre.

La lecture mathématique ne met en jeu que le seul contexte mathématique ; elle engage le lecteur dans son activité mathématique propre indépendamment de tout recours aux conditions dans lesquelles le texte a été écrit. En ce sens elle peut être anachronique, son objet étant moins de comprendre la signification d'un texte dans son époque que de prendre en charge une question mathématique à l'aune d'aujourd'hui.

Nous citerons l'étude des diverses démonstrations du théorème de Pythagore [56] ; la question est alors moins celle d'une démonstration originelle (que l'on ne connaît pas) que celle des divers formes de cette démonstration, étude qui conduit à distinguer les deux lectures possibles de l'énoncé canonique :

Le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

la géométrique et la numérique, double lecture qui correspond à deux modes distincts de démonstration, un mode géométrique et un mode numérique.

La lecture géométrique nous dit que l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale aux aires réunies des carrés construits sur les côtés ; c'est une proposition qui porte sur des aires, c'est-à-dire des grandeurs géométriques, sans aucune intervention du numérique. C'est ainsi par exemple que l'énonce et la démontre Euclide dans le livre I des *Eléments* (proposition 47) [57].

La lecture numérique suppose que les grandeurs, longueurs des côtés et aires des carrés, ont été mesurées et la proposition porte sur les mesures de ces grandeurs, c'est-à-dire sur des nombres. C'est la démonstration classique qui s'appuie sur la similitude et que l'on trouve dans nombres d'ouvrages classiques telles les *Leçons de Géométrie Elémentaire* de Hadamard [58].

L'histoire n'intervient ici, si elle intervient, que par le matériau qu'elle nous apporte et l'on ne saurait parler de perspective historique, même si c'est la connaissance historique qui permet, comme le montre l'ouvrage cité de Fourrey, de réunir ces démonstrations. La distinction proposée ici entre démonstrations géométriques et démonstrations numériques est d'ordre purement mathématique et c'est en ce sens qu'elle peut prendre place dans l'enseignement. Le regard historique a pour but d'expliciter les raisons qui font que, dans un contexte historique donné, ce sera le point de vue géométrique ou le point de vue numérique qui sera mis en avant. Nous renvoyons ici à une lecture comparée des livres V et VI des *Eléments* d'Euclide [59] et du chapitre III des *Eléments de Géométrie* de Legendre [60] ; si Euclide, pour des raisons liées à ce que l'on a appelé la *crise des irrationnelles* se propose d'édifier une théorie des rapports de grandeurs libre de toute notion numérique (les seuls nombres intervenant étant les entiers naturels, ceux du comptage), Legendre en appelle à une arithmétique préalable, le rapport de deux grandeurs étant définis par le rapport des nombres qui les mesurent comme il l'explique au début du chapitre III de son ouvrage [61]. Cette lecture comparée et les questions qu'elle pose, d'une part une théorie euclidienne des proportions indépendante de toute pratique de mesure, voire contradictoire à une telle pratique [62], et d'autre part un renvoi à une arithmétique préalable et à la mesure des grandeurs alors que les nombres, autres que les rationnels, n'ont pas de statut théorique défini [63], nous conduit à mettre en relief quelques unes des raisons (ici celles liées à la mesure des grandeurs) qui conduisent à penser et construire le concept de nombre réel. La perspective historique a ainsi pour but d'expliciter une problématique ; que celle-ci soit la problématique originelle ou non importe peu, le rôle d'une perspective historique est moins de répéter l'histoire que de mettre en relief certains problèmes en s'appuyant sur la façon dont l'histoire les a rencontrés.

Les *Eléments* d'Euclide nous offrent plusieurs exemples de cette double lecture (l'historique et la mathématique) dans la mesure où ils constituent un socle sur lequel s'appuient les constructions géométriques ultérieures, que les auteurs de ces dernières se réclament explicitement d'Euclide où que, au contraire, ils le contestent. C'est en cela que les *Eléments* gardent toute leur valeur pédagogique et que l'on peut y puiser du matériau pour l'enseignement d'aujourd'hui. La lecture mathématique que suppose un tel usage ne participe pas d'une mise en perspective historique ; la place de cette dernière serait alors, à partir d'une lecture mathématique des *Eléments* et d'une étude critique de certaines démonstrations, d'expliciter les raisons qui ont conduit à sortir du cadre euclidien et à inventer les constructions géométriques sophistiquées d'aujourd'hui, éliminant ce que l'on appelle quelque peu abusivement les *lacunes* d'Euclide, abusivement au sens que ces lacunes sont moins dans la construction euclidienne que dans les limites d'icelle rencontrées par les géomètres ultérieurs confrontés à de nouveaux problèmes.

Nous mettrons à part le postulat des parallèles ; la place de cet énoncé parmi les postulats apparaît comme une position provisoire pour un énoncé nécessairement vrai bien que indémontré (*« le scandale de la géométrie »* selon D'Alembert [64]) et il faudra la découverte (l'invention !) des géométries non-euclidiennes pour que l'on prenne conscience que cet *indémontré* est un *indémontrable*. Un regard historique sur la question des parallèles peut alors être une façon de comprendre d'une part les raisons qui ont conduit les géomètres à rechercher une démonstration du « postulat » des parallèles, d'autre part les raisons qui ont conduit à penser le « non-euclidien ». Pourquoi la démonstration euclidienne sur la somme des angles d'une triangle n'est-elle pas suffisante pour assurer cette « vérité » ? demandait une étudiante après la lecture d'un article d'Evelyne Barbin sur les démonstrations du théorème de la somme des angles d'un triangle [65].

On pourrait multiplier les exemples de cette double lecture, ce que nous ne ferons pas ici. Nous voulons seulement mettre l'accent sur le fait que l'intervention de l'histoire ne relève pas seulement de la perspective historique, qu'un texte ancien peut se prêter à plusieurs modes de lecture et que cette lecture dépend de l'objectif que l'on se propose.

En ce qui concerne l'enseignement, la question de la lecture des textes anciens se complique dans la mesure où il nous faut considérer d'une part les textes que le maître va utiliser dans la construction de son enseignement et qui n'impliquent pas directement les élèves et les textes que le maître proposera à la lecture des élèves. Dans ce dernier cas se pose encore la question du mode de lecture, purement mathématique ou prenant en compte le contexte historique, comme nous l'avons expliqué à propos des démonstrations du théorème de Pythagore citées ci-dessus.

On voit ici le double usage des textes anciens dans l'enseignement, matériau destiné au seul usage du maître dans la construction de son enseignement ou matériau à l'usage des élèves. Dans chacun de ces cas se pose la question du mode de lecture, moins les aspects historiques en tant que tels que l'apport de ces textes dans l'enseignement, lequel apport peut se réduire au seul aspect mathématique ou peut au contraire s'appuyer explicitement sur le contexte historique. C'est alors au maître de décider du mode d'emploi de ces textes, ce qui implique que le maître soit capable de prendre en charge les divers aspects d'une intervention de l'histoire dans l'enseignement ; cela nous renvoie à la formation des maîtres, question que nous ne pouvons aborder dans le cadre de cet article.

4- les limites de la perspective historique

Les considérations précédentes nous conduisent à poser quelques questions sur l'usage de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement. Nous avons vu que cet usage ne se réduit pas à la seule perspective historique, nous avons vu aussi la nécessité de distinguer le travail du maître organisant son enseignement et le travail proposé en classe.

Cette diversité des formes de l'intervention de l'histoire en montre aussi la difficulté, voire les effets pervers. C'est alors au maître à décider de cette forme, celle-ci n'étant pas déterminée (déterminable !) *a priori*. C'est cela qui nous conduit à poser la question des limites de l'usage d'une perspective historique dans l'enseignement.

Une double question peut être posée qui nous renvoie à la double lecture expliquée ci-dessus, non seulement la question de l'apport de l'histoire d'un domaine de mathématiques pour une meilleure appréhension de ce domaine, mais aussi la question des formes sous lesquelles s'effectue cet apport.

Nous avons déjà dit que la lecture de certains textes anciens demandait une traduction préalable en termes modernes. Si du point de vue de l'histoire cette première lecture est insuffisante, voire dangereuse par les risques d'anachronisme auxquels elle peut conduire, elle permet cependant une première appréhension du texte et peut s'avérer suffisante dans le cadre d'un travail en classe. Dans ce cadre, les considérations historiques sont secondes et leur intervention a pour objectif moins d'introduire une notion ou une théorie que d'en montrer les divers aspects lorsque nécessaire ou d'amener les élèves, mais peut-être d'abord les maîtres, à prendre conscience des difficultés d'appréhension de la notion ou de la théorie considérée. La question est moins la mise en place d'une perspective historique que l'approche d'une notion à travers des textes anciens, moins pour leur caractère proprement historique que pour l'intérêt mathématique de tels textes. Nous pouvons citer ici certains textes grecs, en particulier les *Eléments* d'Euclide dont nous avons dit ailleurs la modernité [66], ainsi que certains textes de Descartes et Fermat qui permettent de comprendre l'apport de la méthode des coordonnées dans la résolution des problèmes de géométrie.

On voit encore une fois apparaître la nécessaire distinction entre le travail du maître, lequel exige une part importante de connaissance historique, et l'usage par les élèves pour lesquels l'histoire apparaît comme un éclairage particulier de ce qui est enseigné. Le travail du maître se situe alors dans l'organisation de son enseignement, la connaissance de l'histoire d'une notion ou d'une théorie, en particulier de sa genèse, et lorsque cela lui semble utile, le recours à des textes anciens, lui permettant de mieux penser son enseignement et d'en prévoir les difficultés d'appréhension. Nous pouvons citer la question des rapports entre la géométrie élémentaire et le linéaire dont nous avons parlé ci-dessus ; la question est alors moins la lecture de textes historiques, que la construction d'une problématique générale qui amène les élèves à comprendre d'une part l'apport des considérations linéaires dans l'étude de la géométrie élémentaire, que ce soit sous la forme du calcul linéaire ou sous la forme du calcul vectoriel, et d'autre part l'apport de la géométrisation dans les divers domaines de la connaissance où intervient le linéaire.

On voit donc ici un usage de l'histoire qui relève moins de la mise en perspective historique que d'une forme de problématisation au sens que nous avons dit ci-dessus ; cela implique alors, même si l'histoire n'apparaît pas en tant que telle pour les élèves, une connaissance historique de la part des maîtres, ce qui nous renvoie encore une fois à l'intervention de l'histoire dans la formation des maîtres.

Nous avons abordé ci-dessus la seconde partie de la double question posée au début de ce paragraphe, celle où l'on s'appuie sur l'usage de l'histoire, que ce soit sous la forme d'une mise en perspective historique ou sous la forme du seul usage mathématique de textes anciens ; nous voulons aborder maintenant la première partie de la question, celle de la pertinence d'un recours à l'histoire, voire des nuisances possibles de ce recours dans l'appréhension de connaissances mathématiques.

L'enseignement des mathématiques a pour objet les mathématiques et c'est par rapport à cet objectif et seulement par rapport à cet objectif que l'on peut définir une intervention de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement. Un usage non maîtrisé de l'histoire risque alors, sinon de substituer un enseignement de l'histoire des mathématiques à l'enseignement des mathématiques, du moins d'*inventer* une méthode historique qui ne ferait qu'ajouter aux difficultés de l'appréhension de la discipline de nouvelles difficultés.

Nous avons parlé au début de ce texte des possibilités d'un usage « magique » de l'histoire des mathématiques dans l'enseignement ; la méthode historique serait ainsi une façon de répondre aux difficultés de l'enseignement. La méthode historique ne serait alors plus qu'une forme de ce que certains appellent *une ingénierie didactique*, une façon de chercher une réponse technique à des problèmes qui sont essentiellement épistémologiques au sens qu'ils engagent le sujet connaissant dans sa globalité, que ce soit *celui qui enseigne* ou *celui qui est enseigné*. Rien ne nous semble plus dangereux que de réduire les problèmes de l'enseignement à la seule mise en place de techniques convenables, celles-ci fussent-elle fondées sur l'histoire, ce serait à la fois conforter une illusion et fabriquer un nouveau dogmatisme, mais ce n'est pas le lieu de développer cette question ici et nous renvoyons à un article antérieur [67].

Présentant l'ouvrage *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques* [68] qui relate plusieurs expériences d'utilisation de l'histoire des mathématiques dans des classes de lycées et de collèges, Evelyne Barbin écrivait :

> *« Toutefois le lecteur ne trouvera pas ici une formule toute faite ou une réponse unique... »*

précisant

> *« Le lecteur ne doit pas considérer les expériences ici relatées comme des modèles ou des achèvements ; elles sont le fait d'enseignants, de collèges ou de lycées, en situation de recherche. »*

Cette situation de recherche implique une maîtrise suffisante de l'histoire des mathématiques, maîtrise qui ne peut s'acquérir que par une pratique d'icelle, et particulièrement une pratique de la lecture des textes anciens. L'histoire des mathématiques devient ainsi un point important de la formation des maîtres ; qu'elle intervienne dans la formation continue comme cela est pratiqué depuis plusieurs années dans les Irem, ou qu'elle intervienne dans la formation initiale comme cela est encore à faire, elle représente un point fort de la culture des futurs professeurs, cette culture sans laquelle l'enseignement n'est que répétition, culture qui ne se réduit pas à la seule connaissance technique d'une discipline mais qui se situe dans la prise de conscience par le *sujet connaissant* des significations et des enjeux de la discipline en question.

Ceci nous renvoie encore une fois à la formation des maîtres et c'est sur cette remarque que nous terminerons cet article, renvoyant à un article ultérieur sur la place de l'histoire des mathématiques dans la formation des maîtres.

Bibliographie

Jean Le Rond D'ALEMBERT, *Essai sur les Eléments de Philosophie* (1759), Fayard, Paris 1986

Paul APPELL, *Traité de Mécanique Rationnelle* (1893), Réédition Jacques Gabay, Paris 1995

Emil ARTIN, *Algèbre géométrique*, traduit par Michel Lazard, avant-propos de Gaston Julia, «Cahiers scientifiques», Gauthier-Villars, Paris 1962

Evelyne BARBIN, «Trois démonstrations pour un théorème de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie», *La Démonstration Mathématique dans l'Histoire*, Actes du 7ème Colloque Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques (Besançon, mai 1989), IREM de Besançon & IREM de Lyon, 1990

Marcel BERGER, *Géométrie* (5 volumes), CEDIC-Nathan, Paris 1977, réédition en 2 volumes, Nathan, Paris 1991

Didier BESSOT et Jean-Pierre LE GOFF, «Mais où est donc passée la troisième dimension?» in *Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques*, Commission Inter-IREM Epistémologie, Ellipses, Paris 1993

Georges BRUHAT, *Cours de Physique Générale* (4 volumes), Masson, Paris

Rudolf BKOUCHE, «Variations autour de la réforme de 1902/1905» in Hélène Gispert et *al* : *La France Mathématique*, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences et Société Mathématique de France, Paris 1991

Rudolf BKOUCHE, «L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique», *Repères-IREM* n°9 octobre 1992

Rudolf BKOUCHE, «Des limites et de la continuité dans l'enseignement», *Repères-IREM* n°24, juillet 1996

Rudolf BKOUCHE, «La place de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques en France, de la réforme de 1902 à la réforme des mathématiques modernes», in *Les Sciences au Lycée*, sous la direction de Bruno Belhoste, Hélène Gispert et Nicole Hulin, Vuibert, Paris 1996.

Rudolf BKOUCHE, «Quelques remarques sur l'enseignement de la géométrie», *Repères-IREM* n°26, janvier 1997

Rudolf BKOUCHE, «Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques», *for the learning of mathematics*, vol. 17, n°1, february 1997

Rudolf BKOUCHE, Bernard CHARLOT, Nicolas ROUCHE, *Faire des mathématiques: le plaisir du sens*, Armand Colin, Paris 1991, chapitre XII

Raoul BRICARD, *Le Calcul Vectoriel*, Armand Colin, Paris 1929

Michel CARRAL, *Géométrie élémentaire*, Ellipses, Paris 1995

Arthur CAYLEY, «A memoir on abstract geometry» *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, vol. CLX, 1870, p. 51-63 ; n° 413 in *Collected Mathematical Papers*, o.c. vol. VI p. 456- 469

Bernard CAZIER, Françoise CHAMONTIN, *La perspective centrale au collège et … peut-être au lycée*, IREM de Lille, 1999

Bernard CHARLOT, *Du Rapport au Savoir*, Anthropos, Paris 1997

Jean CORDIER et Christiane JEANJEAN, «Limites en 1ère et en Terminale», *Bulletin de l'APMEP* n°405, juin-juillet 1996

Luigi CREMONA, *Eléments de Géométrie Projective*, première partie, traduit, avec la collaboration de l'auteur, par Ed. Dewulf, Gauthier-Villars, Paris 1875

Michael J. CROWE, *A History of Vector Analysis* (1967), Dover Publ. New York 1985

Jean DIEUDONNÉ, *Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire*, Hermann, Paris 1964

Jean DIEUDONNÉ (ed.) *Abrégé d'histoire des mathématiques* (1700-1900) (2 volumes), Hermann, Paris 1978

Jean DIEUDONNÉ, *History of functionnal analysis*, North-Holland Publications

FANO-CARTAN, «La Théorie des Groupes Continus et la Géométrie», *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées*, Tome III (premier volume), réédition Jacques Gabay, Paris 1991

Jean-Luc DORIER et *al*., *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*, La pensée sauvage, Grenoble 1996

EUCLIDE, *Les Eléments*, volume 1, introduction générale par Maurice Caveing, Livre I à IV, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, PUF, Paris 1990

EUCLIDE, *Les Eléments*, volume 2, Livres V à IX, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, Paris 1994

Emile FOURREY, *Curiosités Géométriques* (1907), réédition 1994 augmentée d'une préface d'Evelyne Barbin, Vuibert, Paris 1994

Ferdinand GONSETH, *Le référentiel, univers obligé de médiatisation,* L'Age d'Homme, Lausanne 1975

Jacques HADAMARD, *Leçons de Géométrie élémentaire* (2 volumes), Armand Colin, Paris 1947-1949

Adrien-Marie LEGENDRE, *Eléments de Géométrie*, douzième édition, Paris 1823

Jean-Pierre Le Goff, «La perspective en première scientifique: une certaine suite dans les idées», *Repères-IREM* n°7, avril 1992

G. W. LEIBNIZ, *La naissance du calcul différentiel*, introduction, tradition et notes par Marc Parmentier, Vrin, Paris 1989

G. W. LEIBNIZ, *La caractéristique géométrique* (1677-1685), Texte établi, introduit et annoté par Javier Echeverria, traduit, annoté et post-facé par Marc Parmentier, Collection «Mathesis», Vrin Paris 1995

Giuseppe PEANO, *Calcolo Geometrico* (secondo l'*Ausdehnunglehrer* di H. Grassmann), Fratelli Bocca Editori, Torino 1888

Henri PENSA-RUIZ, *L'Ecole*, «Dominos», Flammarion, Paris 1999

Frédéric PHAM, «Vivent les déterminants», *Repères-IREM*, n°26, janvier 1997

Francisco SANCHEZ, *Il n'est science de rien* (1581) (traduit du latin par Andrée Camparot), Klincksieck, Paris 1984

Paul VEYNE, *L'inventaire des différences*, Seuil, Paris 1976

Max WEBER, *Essai sur la théorie de la science* (traduit par Julien Freund), Plon, Paris 1965

Hermann WEYL, *Space, Time, Matter* (1918), translated from the German by Henry L. Brose, Dover 1952

L'Enseignement des mathématiques, publié par la CIEAEM (Commission International pour l'étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques), Delachaux & Niestlé, Neuchâtel Paris 1955

Mathématiques au Fil des Ages, édité par la Commission Inter-IREM Epistémologie, Gauthier-Villars. Paris 1987

Commission Inter-IREM Epistémologie, *Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques*, Bulletin Inter-IREM, 1988

Notes

1 Ce texte se situe dans la continuité de mon intervention à Braga (juillet 1996) (Rudolf Bkouche, «Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques», for the learning of mathematics, vol. 17, n°1, february 1997)

2 au carrefour d'une conception moralisante (l'élève au centre du système éducatif) et d'une conception scientifique marquée par les théories d'apprentissage et la didactique (Rudolf Bkouche, «L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique», Repères-IREM n°9 octobre 1992). Cette centralité de l'élève a pour conséquence, sinon de diminuer l'importance des disciplines, du moins de les redéfinir en fonction de l'enseignement (ce que l'on appelle la transposition didactique).

3 Francisco Sanchez, Il n'est science de rien (1581) (traduit du latin par Andrée Camparot), Klincksieck, Paris 1984

4 Ce triptyque présente l'avantage sur le classique triangle didactique (le savoir, le maître, l'élève) de mettre en valeur la place centrale du savoir dans l'acte d'enseignement.

5 Bernard Charlot, Du Rapport au Savoir, Anthropos, Paris 1997

6 Pour la cohérence du texte, je reprends la partie correspondante de mon intervention à Braga (cf. Rudolf Bkouche, «Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques», o.c.)

7 Ferdinand Gonseth, Le référentiel, univers obligé de médiatisation, L'Age d'Homme, Lausanne 1975, préface.

8 Ces trois aspects de l'épistémologie seront développés dans un article à venir.

9 Pour la notion d'invariant historique, nous renvoyons à la leçon inaugurale de Paul Veyne au Collège de France (Paul Veyne, L'inventaire des différences, Seuil, Paris 1976)

10 On pourrait citer le calcul différentiel de Leibniz (cf. G. W. Leibniz, La naissance du calcul différentiel, introduction, tradition et notes par Marc Parmentier, Vrin, Paris 1989) ou le rôle de l'analytique dans les travaux de Lagrange .

11 Max Weber, Essai sur la théorie de la science (traduit par Julien Freund), Plon, Paris 1965, p. 203

12 pour reprendre l'heureuse expression du Groupe d'Enseignement Mathématiques de Louvain-la-Neuve (G.E.M.) (cf. Rudolf Bkouche, Bernard Charlot, Nicolas Rouche, Faire des mathématiques: le plaisir du sens, Armand Colin, Paris 1991, chapitre XII).

13 Lorsque la différence x - a devient infiniment petite, alors la différence f(x) - b devient infiniment petite, formulation que l'on peut rapprocher de celle de Cauchy dans son Résumé des leçons données à l'Ecole Polytechnique (1823), réédité in Le Calcul Infinitésimal, ACL-Editions, Paris 1987, p. 6-7.

14 il faut prendre ici le terme «suite» dans son acception usuelle et non comme désignant une application de l'ensemble des entiers dans l'ensemble des nombres.

15 Rappelons la formulation originale de Weïerstrass: «S'il est possible de déterminer une borne d telle que, pour toute valeur de h plus petite en valeur absolue que d, f(x+h) - f(x) soit plus petite qu'une quantité e, aussi petite que l'on veut, alors on dira qu'on a fait correspondre à une variation infiniment petite de la variable une variation infiniment petite de la fonction.» (cours de 1861, rédigé par H.A. Schwarz, cité par Pierre Dugac in Jean Dieudonné (ed.) Abrégé d'histoire des mathématiques (1700-1900) (2 volumes), Hermann, Paris 1978, volume 1, chapitre VI).

16 Il faut alors noter que cette réduction de l'aspect opératoire à la problématique de l'approximation via la définition de Weïerstrass relève moins d'une nécessité logique que d'un choix historique en réponse aux difficultés posées par la notion d'infiniment petit encore utilisée par Cauchy. On pourrait imaginer d'autres constructions et l'on peut renvoyer à l'analyse non standard mais ce n'est pas ici le lieu d'un tel développement.

17 Jean Cordier et Christiane Jeanjean, «Limites en 1ère et en Terminale», Bulletin de l'APMEP n°405, juin-juillet 1996

18 Rudolf Bkouche, «Des limites et de la continuité dans l'enseignement», Repères-IREM n°24, juillet 1996

19 Bernard Cazier, Françoise Chamontin, La perspective centrale au collège et … peut-être au lycée, IREM de Lille, 1999

20 ainsi, lors d'une exposition sur les mathématiques, des élèves protestaient contre une partie consacrée à la peinture en proclamant: «la peinture c'est beau , les mathématiques c'est pas beau».

21 Jean-Pierre Le Goff, «La perspective en première scientifique: une certaine suite dans les idées», Repères-IREM n°7, avril 1992 ; Didier Bessot et Jean-Pierre Le Goff, «Mais où est donc passée la troisième dimension?» in Histoires de Problèmes, Histoire des Mathématiques, Commission Inter-IREM Epistémologie, Ellipses, Paris 1993

22 Nous renvoyons par exemple au traité de Luigi Cremona, Eléments de Géométrie Projective, première partie, traduit, avec la collaboration de l'auteur, par Ed. Dewulf, Gauthier-Villars, Paris 1875 ou aux chapitres consacrés à des notions projectives dans des ouvrages classiques des classes de «Mathématiques Elémentaires».

23 sur le plan structural s'entend, si l'on sait que le discours «algèbre linéaire» n'épuise pas la géométrie.

24 Jacques Hadamard, Leçons de Géométrie élémentaire (2 volumes), Armand Colin, Paris 1947-1949

25 Marcel Berger, Géométrie (5 volumes), CEDIC-Nathan, Paris 1977, réédition en 2 volumes, Nathan, Paris 1991

26 Je distinguerai ici le calcul linéaire en tant que calcul algébrique sur les polynômes du premier degré (homogènes ou non homogènes) de l'algèbre linéaire (au sens moderne) que l'on peut considérer comme la théorie des espaces vectoriels et qui à ce titre se dégage du calcul linéaire proprement dit.

27 Arthur Cayley, «A memoir on abstract geometry» Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. CLX, 1870, p. 51-63 ; n° 413 in Collected Mathematical Papers, o.c. vol. VI p. 456- 469

28 Fano-Cartan, «La Théorie des Groupes Continus et la Géométrie», Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées, Tome III (premier volume), réédition Jacques Gabay, Paris 1991

29 On peut noter que dans cet article, le groupe linéaire (au sens de l'algèbre linéaire d'aujourd'hui) est défini comme le sous-groupe du groupe affine qui laisse fixe un point donné ; c'est seulement après cette définition que les auteurs montrent comment le groupe projectif peut être défini comme quotient du groupe linéaire.

30 Raoul Bricard, Le Calcul Vectoriel, Armand Colin, Paris 1929, préface. Bricard y explique que le calcul vectoriel offre une notation plus concise à la géométrie analytique, soulignant toutefois que le calcul vectoriel ne se réduit pas à une simple «tachygraphie».

31 Jean Dieudonné, Algèbre linéaire et Géométrie élémentaire, Hermann, Paris 1964

32 Pour une présentation des idées qui ont conduit à la réforme des mathématiques modernes nous renvoyons à l'ouvrage collectif L'Enseignement des mathématiques, publié par la CIEAEM (Commission International pour l'étude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques), Delachaux & Niestlé, Neuchâtel Paris 1955 ; pour une critique de la réforme, nous renvoyons à notre article «La place de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques en France, de la réforme de 1902 à la réforme des mathématiques modernes», in Les Sciences au Lycée, sous la direction de Bruno Belhoste, Hélène Gispert et Nicole Hulin, Vuibert, Paris 1996.

33 Adrien-Marie Legendre, Eléments de Géométrie, douzième édition, Paris 1823, p. 3

34 Rudolf Bkouche, «Variations autour de la réforme de 1902/1905» in Hélène Gispert et al : La France Mathématique, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences et Société Mathématique de France, Paris 1991

35 Nous renvoyons à l'article déjà cité de Fano-Cartan. On peut noter encore une fois l'importance du point de vue projectif dans le développement du calcul linéaire, mais nous n'aborderons pas ici la question déjà signalée de la place du projectif dans l'enseignement de la géométrie élémentaire.

36 Ainsi en est-il du théorème de Thalès, lequel, après avoir été enseigné au collège dans le cadre de la géométrie élémentaire, devient, au début du lycée, un énoncé vectoriel (parce que, en grandissant, il faut bien changer de langage!) sans que les raisons de l'introduction des vecteurs apparaissent autrement que parce que c'est le langage des grands. Il est clair que

dans ces conditions les élèves ne peuvent qu'apprendre le règlement, voire réussir les exercices de mathématiques, mais qu'ont-ils appris? question impertinente à ne pas poser.

37 Michael J. Crowe, A History of Vector Analysis (1967), Dover Publ. New York 1985

38 C'est la recherche d'un tel calcul pour l'espace, une fois le calcul sur les nombres complexes considéré comme un calcul géométrique dans le plan, qui a conduit Hamilton à inventer les quaternions, le calcul des quaternions jouant pour l'espace un rôle analogue au calcul complexe pour le plan.

39 Raoul Bricard, Le Calcul Vectoriel, o.c. préface

40 Paul Appell, Traité de Mécanique Rationnelle (1893), Réédition Jacques Gabay, Paris 1995. Il peut être intéressant de voir l'évolution de ce chapitre préliminaire depuis la première édition de 1893 jusqu'à la dernière édition de 1942 éditée par Valiron.

41 Georges Bruhat, Cours de Physique Générale (4 volumes), Masson, Paris

42 c'est en cela qu'on peut relier le calcul vectoriel au calcul géométrique à la Leibniz (cf. Leibniz, La caractéristique géométrique (1677-1685), Texte établi, introduit et annoté par Javier Echeverria, traduit, annoté et post-facé par Marc Parmentier, Collection «Mathesis», Vrin Paris 1995)

43 La signification des signes est définie par les relations primitives explicites (axiomes).

44 Il nous faut rappeler ici le rôle qu'a joué l'analyse dans la genèse de l'algèbre linéaire ; cf. Jean Dieudonné, History of functionnal analysis, North-Holland Publications, Amsterdam 1981 et Jean-Luc Dorier, «Une lecture épistémologique de la genèse de la théorie des espaces vectoriels» in Jean-Luc Dorier et al., L'enseignement de l'algèbre linéaire en question, La pensée sauvage, Grenoble 1996.

45 Giuseppe Peano, Calcolo Geometrico (secondo l'Ausdehnunglehrer di H. Grassmann), Fratelli Bocca Editori, Torino 1888

46 Hermann Weyl, Space, Time, Matter (1918), translated from the German by Henry L. Brose, Dover 1952

47 Jean-Luc Dorier et al., L'enseignement de l'algèbre linéaire en question, o.c., p. 191

48 comme si l'on disait que l'optique est devenue obsolète depuis que l'on sait que les rayons lumineux sont des ondes électromagnétiques et que l'enseignement de l'optique géométrique a pour seul objectif d'amener les élèves aux équations de Maxwell.

49 Emil Artin, Algèbre géométrique, traduit par Michel Lazard, avant-propos de Gaston Julia, «Cahiers scientifiques», Gauthier-Villars, Paris 1962

50 Jean Dieudonné, «The universal domination of the geometry», International Congress of Mathematical Education, Berkeley 1980

51 On comprend dans ces conditions le rôle assigné aux théories de l'apprentissage, celui de permettre la construction d'une ingénierie didactique «efficace», quitte à fabriquer cet ersatz de connaissance que constitue le fameux «savoir enseigné» de la transposition didactique.

52 Rudolf Bkouche, «Quelques remarques sur l'enseignement de la géométrie», Repères-IREM n°26, janvier 1997

53 Ces points serons précisés dans notre article «De la géométrie élémentaire au calcul linéaire et au calcul vectoriel», à paraître in Actes de la Troisième Université d'Eté Européenne «Histoire et Epistémologie dans l'Education Mathématique», Louvain-la-Neuve/Leuven, juillet 1999. Nous renvoyons aussi à l'article de Frédéric Pham, «Vivent les déterminants», Repères-IREM, n°26, janvier 1997.

54 Il faut ici distinguer, dans la langue française, les deux significations du mot maître, le «magister» et le «dominus» ; il est clair qu'il s'agit ici du «magister». Nous devons cette remarque à Catherine Kintzler. Cette distinction est développée dans l'ouvrage de Henri Pensa-Ruiz, L'Ecole, «Dominos», Flammarion, Paris 1999, p. 28

55 Rudolf Bkouche, «L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique», o.c.

56 Emile Fourrey, Curiosités Géométriques (1907), réédition 1994 augmentée d'une préface d'Evelyne Barbin, Vuibert, Paris 1994

57 Euclide, Les Eléments, volume 1, introduction générale par Maurice Caveing, Livre I à IV, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, PUF, Paris 1990, p. 282-284

58 Jacques Hadamard, Leçons de Géométrie élé-

mentaire, volume I, Géométrie plane, Armand Colin, Paris 1947, p.p. 120

59 Euclide, Les Eléments, volume 2, Livres V à IX, traduction et commentaires par Bernard Vitrac, Paris 1994

60 Legendre, Eléments de Géométrie, o.c.

61 ibid, p. 61-62

62 contradictoire au sens que la pratique de la mesure s'appuie sur la division des grandeurs en parties égales (ce qui conduit à la notion de fraction) alors que la théorie des proportions d'Euclide s'appuie sur les multiples des grandeurs considérées.

63 La notion de nombre reste empirique, les divers types de nombres, les rompus et les sourds, n'ayant en commun que leur capacité à exprimer des mesures de grandeurs, capacité que l'on peut considérer comme leur raison d'être ; c'est cette capacité qui a conduit Stevin à unifier la notion de nombre (Simon Stevin, Théorie des incommensurables grandeurs (1585), cité dans Mathématiques au Fil des Ages, édité par la Commission Inter-IREM Epistémologie, Gauthier-Villars. Paris 1987, p. 134-135) et qui permet d'énoncer les propriétés générales des opérations sur ces nombres.

64 Jean Le Rond D'Alembert, Essai sur les Eléments de Philosophie (1759), Fayard, Paris 1986, p. 318

65 Evelyne Barbin, «Trois démonstrations pour un théorème de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie», La Démonstration Mathématique dans l'Histoire, Actes du 7ème Colloque Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques (Besançon, mai 1989), IREM de Besançon & IREM de Lyon, 1990

66 Nous renvoyons à notre préface de l'ouvrage de Michel Carral, Géométrie élémentaire, Ellipses, Paris 1995.

67 Rudolf Bkouche, «Quelques remarques sur l'enseignement de la géométrie», o. c.

68 Commission Inter-IREM Epistémologie, Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques, Bulletin Inter-IREM, 1988