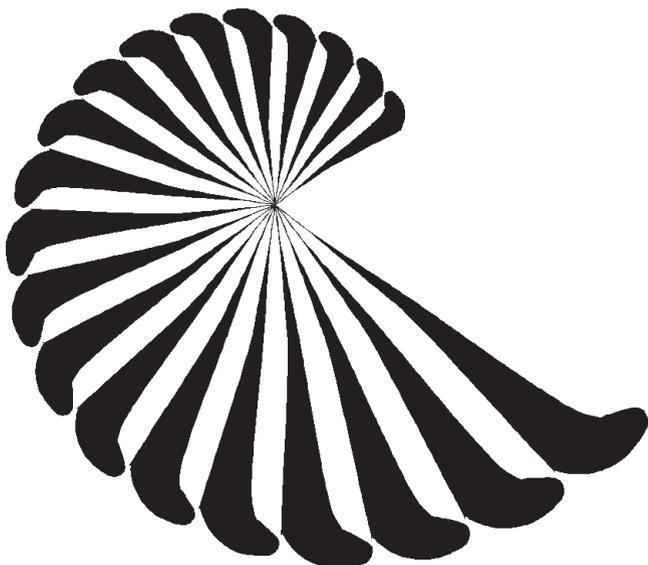


---

## LES SPIRALES

---

André STOLL  
Irem de Strasbourg



« Quelle spirale, que l'être de l'homme. Dans cette spirale, que de dynamismes qui s'inversent. On ne sait plus tout de suite si l'on court au centre ou si l'on s'en évade. »

BACHELARD, Poétique de l'espace.

### 1. Introduction

Les spirales ? Elles sont présentes partout. Dans le monde animal ou végétal, admirez la forme superbe d'un nautilus ou d'une coquille d'escargot. Admirez également la fleur de la marguerite. Celle-ci est composée d'une centaine de fleurons élémentaires jaunes, disposés en son cœur selon une double gerbe de spirales droites ou gauches. Vous en trouverez également dans les tableaux de Léonard de Vinci, de Dürer et autres artistes peintres, en architecture, en ferronnerie, en mécanique... Sur une pellicule photo, un banal escalier hélicoïdal devient une spirale. En astronomie, nul ne peut ignorer les galaxies en forme de spirale.

Cette figure est présente dans toutes les cultures. Elle est chargée de signification symbolique. C'est un motif ouvert et optimiste. Elle représente les rythmes répétés de la vie, le caractère cyclique de l'évolution.



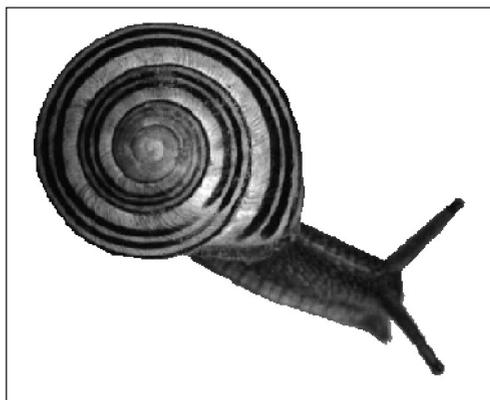
Léonard de Vinci : l'Annonciation

## LES SPIRALES

Paradoxalement pourtant, dans la langue française, on ne parle d'elles que pour évoquer un échec, une crise... la spirale du chômage, la spirale de la violence...

Paradoxalement encore, si ces courbes sont si présentes dans notre environnement, elles sont presque complètement oubliées dans l'enseignement des mathématiques. Pourquoi ? Difficile de répondre de manière précise à cette question. Certains disent qu'elles sont trop difficiles à tracer. C'est évidemment une fausse raison. D'ailleurs à l'ère des calculatrices graphiques et autres traceurs de courbes cette raison ne peut pas expliquer leur absence.

Dans l'histoire des mathématiques, ces figures sont intervenues comme solutions de problèmes fondamentaux et extrêmement variés. Et très souvent, elles apparaissent là où on ne les attendait pas !



Au cours de l'article ci-dessous, je souhaiterais d'une part présenter quelques spirales en les remettant dans leur contexte historique et d'autre part, montrer ce que l'étude de ces courbes peut apporter à un enseignant de mathématiques.

## 2. Die «Quadratwurzelschnecke»<sup>1</sup> ou spirale de Théodore de Cyrène.

### 2.1. De l'incommensurabilité de la diagonale du carré à la spirale de Théodore.

Dans l'ouvrage de *Platon* qui porte son nom, *Théétète* affirme que son maître, *Théodore*, a étudié l'irrationalité des nombres  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ , ... jusqu'à  $\sqrt{17}$ , et qu'il a construit ces nombres devant lui (voir encadré de la page suivante). Comment ?

Pourquoi Théodore s'est-il arrêté à  $\sqrt{17}$  ? Nous ignorons les réponses à ces questions. Depuis plus de 2 millénaires, les mathématiciens et les historiens se posent ces questions

et, encore de nos jours, les spéculations continuent.

Une réponse, pleine d'imagination, a été donnée, il y a environ 70 ans par un mathématicien allemand, J.H. Anderhub. Celui-ci ima-

gina que Théodore construisit  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$  à l'aide d'une suite de triangles rectangles dont l'un des côtés de l'angle droit mesure une unité et l'autre côté de l'angle droit est l'hypoténuse du triangle rectangle précédent, le premier triangle étant rectangle et isocèle (voir plus loin, *figure 1.*)

<sup>1</sup> Die "Quadratwurzelschnecke": l'escargot de la racine carrée

Il est aisé de démontrer à l'aide du théorème de Pythagore que les hypoténuses des triangles ainsi construits mesurent  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ , ... J.H. Anderhub observa que  $\sqrt{17}$  est l'hypoténuse du dernier triangle rectangle avant que la figure ne se superpose à elle-même. En poursuivant la construction, nous obtenons une spirale que J.H. Anderhub dénomma « die Quadratwurzelschnecke » c'est-à-dire « l'escargot de la racine-carrée » pour rappeler que l'hypoténuse du n-ième triangle est  $\sqrt{n+1}$ . En l'honneur de Théodore de Cyrène, elle est aussi appelée « la spirale de Théodore ». Il se pourrait ainsi que cette spirale, tout en étant une découverte récente, soit la plus ancienne des spirales.

### 2.2. Construction de la spirale de Théodore.

La spirale de Théodore est une spirale discrète. Pour la tracer, nous construisons un triangle rectangle et isocèle ( $OA_1A_2$ ) puis, par récurrence, les points  $A_3, A_4, A_5, \dots$  tels que :

— les angles  $\widehat{OA_nA_{n+1}}$  sont droits :

$$\widehat{OA_1A_2} = \widehat{OA_2A_3} = \widehat{OA_3A_4} = \dots = 1 \text{ droit},$$

— les côtés  $[A_nA_{n+1}]$  ont tous même longueur :

$$OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = \dots$$

En prenant comme unité de mesure la longueur commune des côtés  $[A_nA_{n+1}]$ , il est facile de montrer, à l'aide du théorème de Pythagore, que la longueur du segment  $[OA_n]$

est  $\sqrt{n}$  :

$$OA_1 = \sqrt{1}, OA_2 = \sqrt{2}, OA_3 = \sqrt{3}, \dots$$

### THÉODORE DE CYRÈNE

(fin Ve - déb. IVe siècle av J.C.)

Mathématicien grec, qui enseignait à Cyrène. D'après Diogène Laërce, Théodore de Cyrène aurait connu et même instruit Platon, lors de son passage à Cyrène. Platon fait d'ailleurs de lui un des personnages de la trilogie du Théétète, en le présentant à la fois comme ami de Socrate et comme ami de Protagoras (un disciple de Pythagore). Dans le catalogue d'Eudème conservé par Proclus, Théodore est cité après Hippocrate de Chios. Il figure également dans la liste de Jamblique comme pythagoricien. C'est, en tout cas, de la grande découverte pythagoricienne de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré (racine carrée de 2) qu'il est parti pour étudier ce que nous appelons actuellement l'irrationalité des racines carrées des nombres de 3 à 17, sans doute par des procédés géométriques comme nous pouvons le lire dans le "Théétète" de Platon :

THEETETE. - Théodore [...] avait fait, devant nous, les constructions relatives à quelques-unes des puissances, montré que celles de trois pieds et de cinq pieds ne sont point, considérées selon leur longueur, commensurables à celle d'un pied, et continué ainsi à les étudier, une par une, jusqu'à celle de dix-sept pieds : il s'était, je ne sais pourquoi, arrêté là.

[Platon: Théétète 147d]

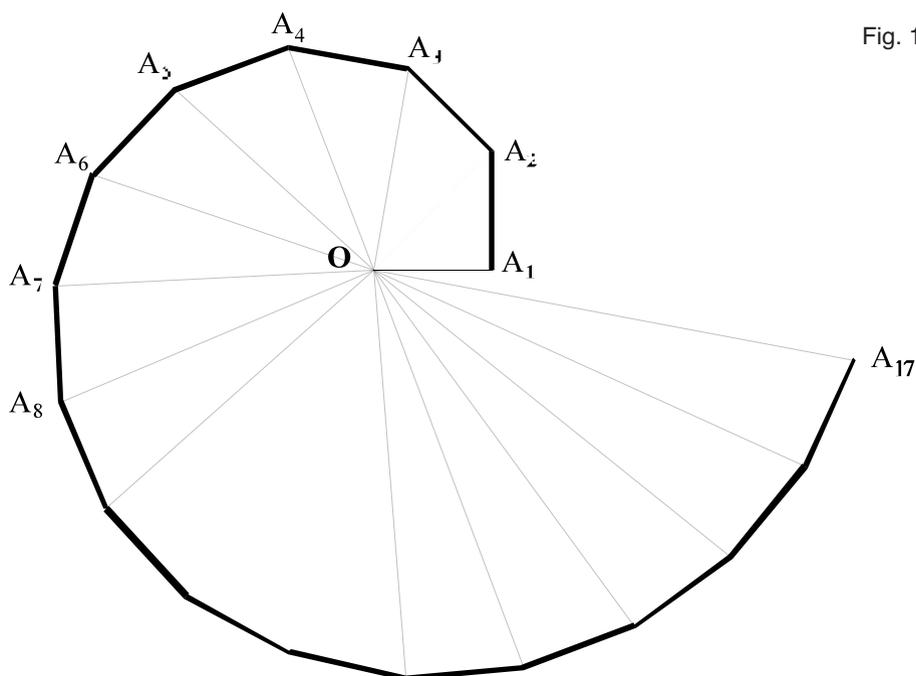


Fig. 1

**2.3. Pour les enseignants : quelques sujets de réflexion.**

La construction de la spirale de Théodore est, sans aucun doute possible, à la portée d'un élève de collège. Mais, en faisant preuve d'un peu d'imagination, elle peut susciter des questions dont le niveau peut dépasser le niveau d'une classe préparatoire. En voici quelques-unes dont les réponses ne sont pas toujours connues de l'auteur de ces lignes.

**Exercice 1.** Dans le repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  où  $\vec{i} = \vec{OA}_1$ , on appelle  $z_n$  l'affixe du point  $A_n$

Montrer que  $z_{n+1} = z_n + i \frac{z_n}{|z_n|}$ . Retrouver le résultat ci-dessus, c'est-à-dire :  $|z_n| = \sqrt{n}$ .

Montrer qu'un argument de  $z_n$  est, pour  $n \geq 2$  :

Montrer qu'un argument de  $z_n$  est, pour  $n \geq 2$  :

$$\arg(z_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \arctan(1/\sqrt{k}).$$

**Exercice 2 : Construction de n points de la spirale de Théodore à l'aide du logiciel «Maple».** Voici un programme de construction de la spirale de Théodore à l'aide du logiciel de calcul formel « Maple » (il faudra bien sûr donner une valeur à n)

```
> restart; Digits:=15; A[n]:= [x(n),y(n)];
> calculpoints:=proc(n)
> global A,S,z; local k;
> A[0]:= [0,0]; A[1]:= [1,0]; z:=1.0;
> for k from 2 to n
do z:=z+I*z/abs(z); A[k]:= [Re(z),Im(z)] od;
> S:= [seq(A[k] , k=0..n)]; end;
> n:= ;
> calculpoints(n);
> plot(S,scaling=constrained,color=black,axes=no
ne);
```

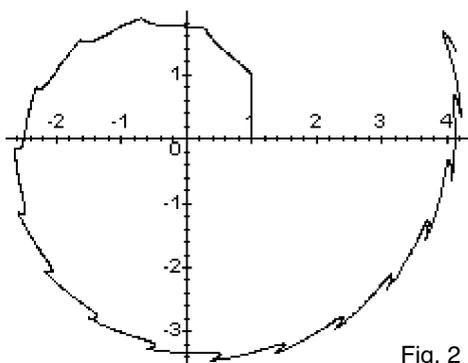


Fig. 2

**Exercice 3 : Prolongement « par continuité ».** La spirale de Théodore est une spirale discrète. Le but de cet exercice est de la transformer en une spirale continue en s'imposant bien évidemment certaines contraintes.

Une première idée, très simple, consiste à relier les points  $A_n$  par un segment de droite. Malheureusement, dans ce cas, nous ne pouvons pas généraliser la propriété qui a donné naissance à cette spirale. En effet, on voudrait que si le point  $M$  est sur la courbe, alors le point  $M'$  tel que  $MM' = 1$  et que le triangle  $OMM'$  soit rectangle soit également sur la courbe. En langage des nombres complexes, cette propriété se traduit par : la courbe est invariante par

la transformation  $\Gamma : z \rightarrow z \cdot (1 + \frac{i}{|z|})$ .

D'où l'idée suivante : on relie les points  $A_1$  et  $A_2$  par une courbe  $(C)$  quelconque et on applique la transformation  $\Gamma$  à chaque point de cette courbe  $(C)$ . La figure 2 et la figure 3 montrent le résultat lorsque  $(C)$  est un segment de droite ou un demi-cercle.

Fig. 3

Ecrire un programme permettant à des logiciels de calcul formel comme *maple*, *derive*... de tracer les courbes correspondantes et tracer la courbe obtenue lorsque  $(C)$  est un segment de parabole. (Une solution est proposée en Annexe 1). Les spirales ainsi obtenues ne sont pas assez « régulières » (comment définir correctement ce terme ?). D'où la deuxième question : trouver l'équation d'une courbe  $(S)$  « bien régulière » qui passe par tous les points  $A_n$  et telle que si le point  $M$  est sur  $(S)$  alors le point  $\Gamma(M)$  y est également. (Une réponse se trouve en Annexe 2)

**Exercice 4 : Nombre de tours...** Au dix-septième point, la spirale a presque fait un tour complet. Montrer que le nombre de spires réalisées lorsque  $n \geq 18$  est égal à la partie entière de :

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \arctan(1/\sqrt{k}) .$$

Calculer, par exemple, le nombre de tours lorsque  $n = 10^9$ .

**2.4. Pour le plaisir : généralisons !**

Pour construire la spirale de Théodore, nous avons pris une succession de triangles rectangles dont l'un des côtés mesure 1 unité (en langage des nombres complexes, ceci correspond à la

transformation  $z \rightarrow z + \frac{iz}{|z|}$ . Généralisons en

prenant, non plus un angle droit, mais un angle quelconque et le côté  $A_n A_{n+1}$  quelconque (Soit

une transformation de la forme  $z \rightarrow z + b \frac{z}{|z|}$

où  $b$  est un nombre complexe quelconque). Généralisons encore d'avantage par la transformation

$z \rightarrow az + b \frac{z}{|z|}$  où  $a$  et  $b$  sont deux nombres

complexes quelconques. Le lecteur inspiré pourra encore généraliser en prenant par exemple  $a$  et  $b$  dépendant de  $n$ . Les résultats sont parfois spectaculaires. La figure 4 et la figure 5 ci-contre ont été obtenues en prenant :  $a = \exp(i\pi/4)$ ,  $b = \exp(-i\pi/4)$  (nombre de points : 300 ) et  $a = 1$ ,  $b = 0,5 \cdot \exp(in/2)$  (nombre de points : 500).

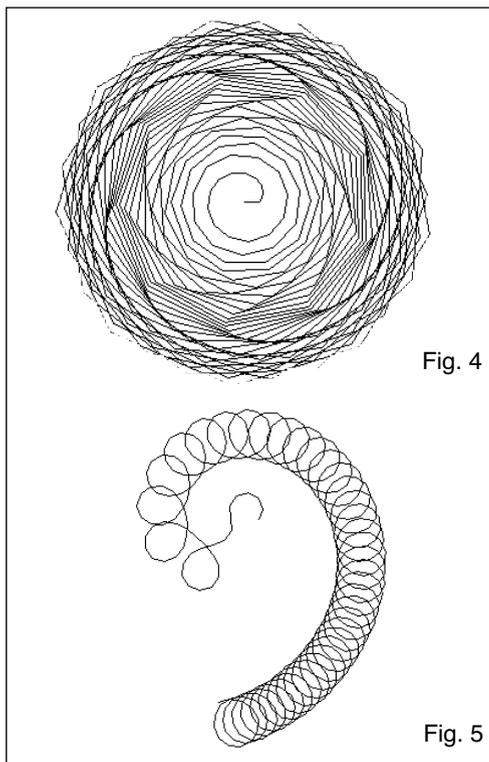


Fig. 4

Fig. 5

**3. La spirale d'Archimède.**

Il est fort probable que c'est en cherchant les solutions des problèmes de la trisection de l'angle et/ou de la quadrature du cercle qu'Archimède eut l'idée d'introduire la spirale qui porte désormais son nom.

Celle-ci mériterait à elle seule un long exposé. Aussi, me contenterai-je de ne donner que quelques résultats concernant la spirale d'Archimède <sup>2</sup>

**3.1. Définition.** Dans le « Traité des spirales », Archimède nous donne la définition suivante : « *Lorsqu'une [demi] droite tourne uniformément dans un plan pendant que l'une de ses extrémités reste fixe et qu'elle revient à sa position initiale, et si sur cette droite en rotation un point se déplace uniformément à partir du point fixe, le point décrira dans le plan une spirale.* »

<sup>2</sup> Le lecteur intéressé pourra consulter l'œuvre d'Archimède : Editions "Les Belles Lettres" - texte établi et traduit par Charles Mugler - Tome II. Les enseignants quant à eux pourront consulter la brochure de l'IREM de Strasbourg - "Activités géométriques pour le collège et le lycée présentées dans une perspective historique" - janvier 1996.

Il est tout à fait remarquable que si la définition que nous donne Archimède est purement mécanique, ses démonstrations quant à elles sont purement géométriques !

Archimède a-t-il utilisé la mécanique pour découvrir les résultats concernant la tangente et d'autres propriétés de la spirale ? La réponse nous est inconnue. Toutefois, replaçant le traité de la spirale dans l'ensemble de son œuvre, cela est fort possible.

**3.2. La spirale d'Archimède et le problème de la trisection de l'angle.** En fait, cette spirale permet de partager un angle en n angles égaux.

En effet, pour partager l'angle  $\widehat{xOy}$  en n angles égaux, il suffit de :

— faire coïncider le sommet de l'angle avec l'origine de la spirale. (Sur la figure 7, n'a été tracé

que l'arc de spirale  $\widehat{AB}$  où A (resp. B) est l'intersection de Ox (resp. Oy) avec la spirale).

— Le cercle de centre O et de rayon OA coupe la demi-droite [Oy) en C. On partage le segment [CB] en n segments de même longueur (sur la figure, n = 3) : CD = DE = EB .

— Les cercles de centre O et de rayons OD et OE coupent la spirale en F et G.

— On démontre que :

$$\widehat{xOF} = \widehat{FOG} = \widehat{GOy}$$

(La démonstration est laissée au lecteur)

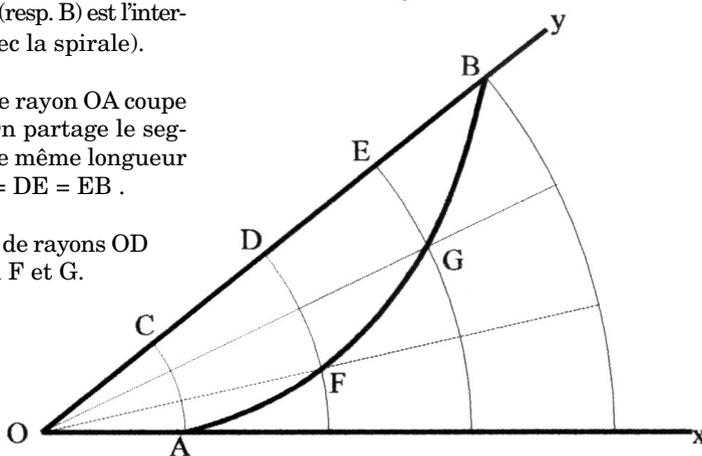


Fig. 6

### 3.3. Tangente à la spirale d'Archimède et quadrature du cercle.

Poursuivant la lecture du traité des spirales, nous trouvons la proposition suivante :

*« Et si une droite est tangente à la spirale en son extrémité atteinte en dernier lieu, et qu'on élève, sur la droite ayant tourné et repris sa position initiale, la perpendiculaire à l'extrémité restée fixe jusqu'à sa rencontre avec la tangente, je dis que le segment de droite ainsi mené est égal à la circonférence du cercle. »*

Sur la figure ci-contre, cette proposition se traduit par : soit T le point d'intersection de la tangente à la spirale en A et de la perpendiculaire à (OA) en O ; Alors la longueur OT est égale à la circonférence du cercle de centre O et de rayon OA

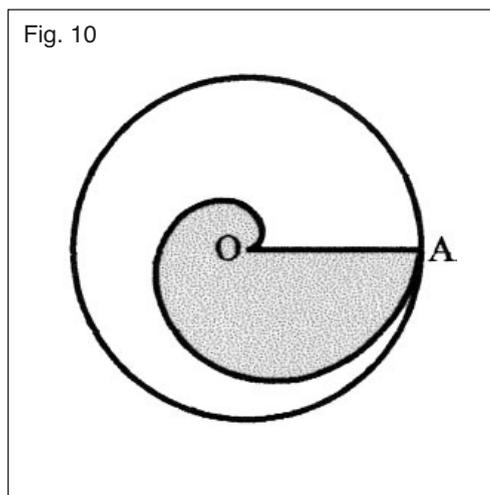
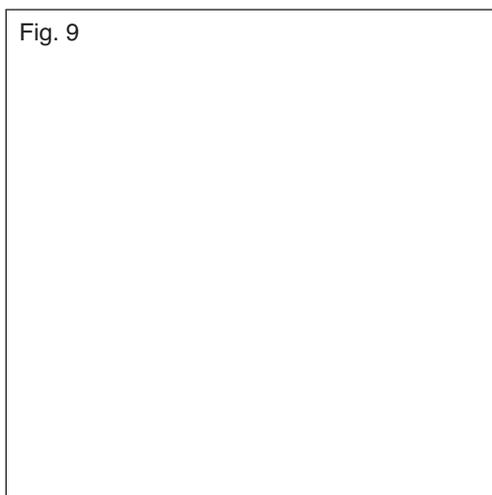
Ainsi la construction d'une tangente à la spirale est un problème équivalent au problème de la rectification (donc de la quadrature) du cercle. La démonstration que nous donne Archimède de ce théorème offre un bel exemple de la méthode géométrique des Anciens. Elle présente certes des longueurs, mais celles-ci sont nécessaires. Elle est remarquable par sa rigueur et se trouve *dégagée de tout usage de considération d'infini*.

Au début du XVII-ème siècle, G. P. de Roberval utilise la composition des vitesses pour aboutir au même résultat. Le calcul suivant illustre sa méthode avec des notations contemporaines et la notion de vecteur qui est plus récente.

Supposons, pour fixer les idées, que la demi-droite Ox tourne autour de O à la vitesse constante de 1 tour par seconde. Le mouve-



Fig. 8



ment du point A résulte d'un mouvement linéaire représenté par le vecteur  $\vec{AC}$  et de la rotation de Ox représentée par le vecteur  $\vec{AR}$  (voir la figure 8 et la figure 9). La direction du mouvement du point A, qui est la tangente à la spirale en ce point, est donnée par le vecteur  $\vec{AS} = \vec{AC} + \vec{AR}$ .

Les triangles rectangles (ACS) et (AOT) sont semblables, d'où :

$$OT = OA \cdot \frac{CS}{CA} = OA \cdot \frac{AR}{AC} = 2\pi \cdot OA.$$

Nous retrouvons ainsi le résultat démontré par Archimède il y a plus de deux mille ans.

### 3.4. Aire d'un segment de spirale.

Après avoir étudié la tangente à la spirale, Archimède s'intéresse à l'aire d'un segment

de spirale. Il énonce la proposition suivante :

*« Je dis, dès lors, que l'aire comprise entre la spirale et la droite revenue à sa position initiale est égale au tiers du cercle décrit autour du point fixe comme centre avec un rayon égal au segment de droite parcouru par le point pendant une révolution de la droite. »*

(Sur la figure 10, cette proposition se traduit par : l'aire de la surface hachurée est le tiers de l'aire du disque de centre O et rayon OA)

Pour démontrer ce théorème, Archimède partage le cercle en un certain nombre de secteurs angulaires. Il encadre alors l'aire A à calculer par deux aires  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  dont la différence est aussi petite que l'on voudra. Puis par un double raisonnement par l'absurde, il en déduit le résultat.

L'exercice ci-dessous traduit la méthode d'Archimède en utilisant les notations contemporaines et, contrairement à Archimède, le recours à la notion d'infini.

LES SPIRALES

**Exercice 5 : calcul de l'aire d'un segment de spirale.** Soit  $p$  un nombre entier quelconque, on partage le plan en  $p$  secteurs angulaires :

$w_0Ow_1, w_1Ow_2, \dots, w_{p-2}Ow_{p-1}, w_{p-1}Ow_p$   
(cf. figure 12, sur laquelle on a pris  $p=9$ ).

Si  $0 \leq n \leq p$  la demi-droite  $[Ow_n]$  coupe la spirale en  $M_n$ . (pour les notations, voir la figure 12). L'aire  $A$  à calculer est alors égale à la somme des aires des segments de spirale  $(OM_nM_{n+1}) = \mathcal{A}_n$  :

$$\mathcal{A} = \sum_{n=0}^{n=p-1} \mathcal{A}_n.$$

(voir figure 11).

Exprimer en fonction de l'angle  $\theta$  et du rayon  $r = OA = OB$  l'aire du secteur angulaire  $(OAB)$ .  
(réponse :  $(r^2 \cdot \theta) / 2$ )

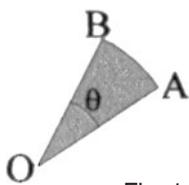


Fig. 11

Exprimer en fonction de  $p$  et de  $n$  les angles orientés  $([Ow_n], [Ow_{n+1}])$  et  $([Ox], [Ow_n])$ .

En déduire la longueur  $OM_n$  et l'aire des secteurs  $(OM_nR_{n+1})$  et  $(OP_nM_{n+1})$ .

Trouver un encadrement de  $\mathcal{A}_n$  et en déduire :

$$C \sum_{n=0}^{n=p-1} \frac{n^2}{p^3} \leq \mathcal{A} \leq C \sum_{n=0}^{n=p-1} \frac{(n+1)^2}{p^3}.$$

où  $C$  désigne l'aire du cercle de centre  $O$  et de rayon  $OA$ .

Démontrer que  $\sum_{n=0}^{n=p-1} n^2 = \frac{(p-1)p(2p-1)}{6}$ .

En déduire l'encadrement suivant de  $\mathcal{A}$  :

$$C \cdot \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2p} + \frac{1}{6p^2} \right) \leq \mathcal{A} \leq C \cdot \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{6p^2} \right).$$

Que se passe-t-il lorsque  $p$  tend vers "plus l'infini" ? En déduire le résultat annoncé par Archimède.

Transcrit en algorithme moderne, l'obtention de ce résultat ne pose aucun problème. En effet, dans un repère orthonormé convenablement choisi, une équation de la spirale d'Archimède en coordonnées polaires est :

$$\rho = k \cdot \theta \text{ où } k = \frac{OA}{2\pi}.$$

L'aire de la première spire est égale à l'intégrale définie :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2 d\theta = \frac{k^2}{2} \int_0^{2\pi} \theta^2 d\theta$$

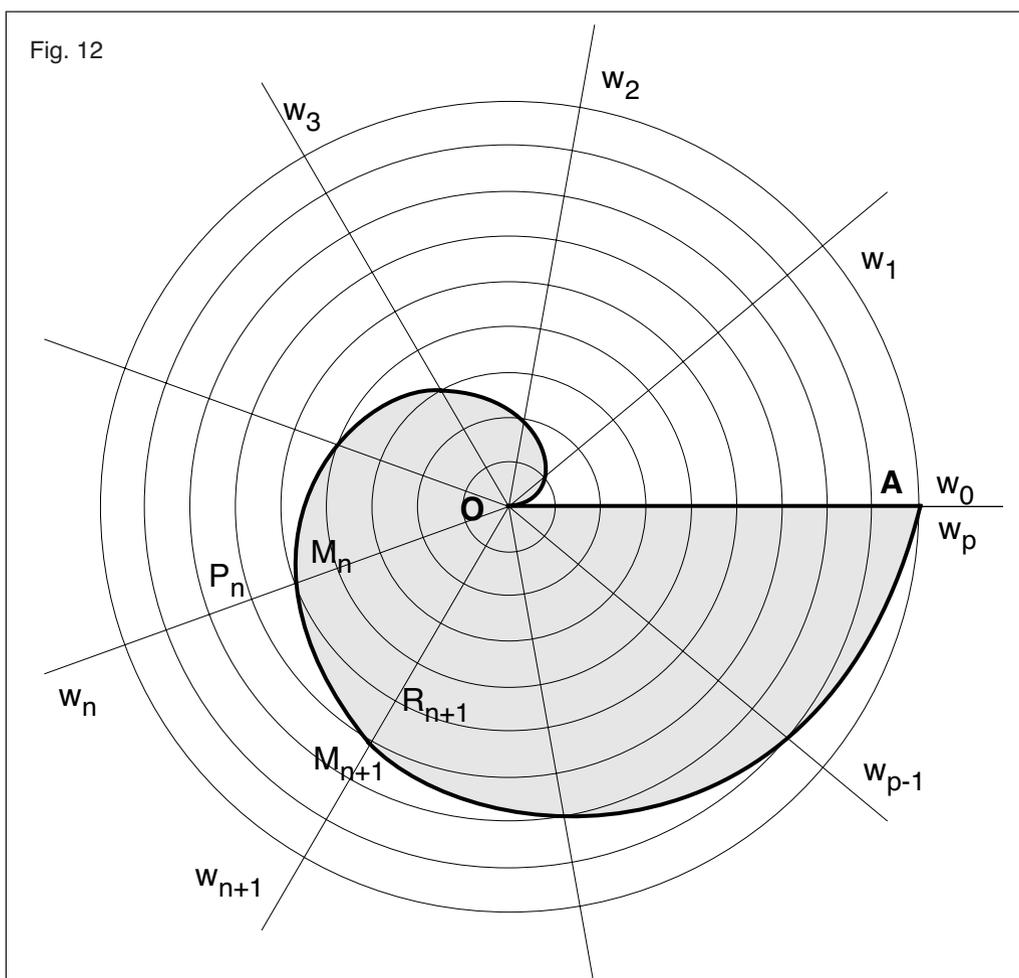
$$\mathcal{A} = \frac{k^2}{6} [\theta^3]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3 k^2}{6}$$

$$\mathcal{A} = \frac{\pi OA^2}{3}.$$

Malheureusement cet algorithme nous fait oublier les raisonnements géométriques qui sont les fondements du calcul intégral. Nous l'appliquons machinalement à un grand nombre de courbes dont nous connaissons une équation sans nous préoccuper de la décomposition de l'aire à calculer en tranches et de l'inscription et de la circonscription de celles-ci. Il n'en est pas de même pour les Anciens pour lesquels chaque problème de quadrature est un problème spécifique qui reçoit une solution particulière.

**3.5. Longueur d'un segment de spirale.**

Au XVII-ème siècle, à l'aide de la méthode des indivisibles, les mathématiciens démontrèrent que le problème de la rectification d'un



arc de la spirale d'Archimède est équivalent à la rectification d'un arc de parabole (voir figure 13 de la page suivante).

La méthode des indivisibles étant contestée, Blaise Pascal démontre ce résultat à l'aide de la méthode des Anciens : « [...] et sans m'arrêter, ni aux méthodes des mouvements,

*ni à celles des indivisibles, mais en suivant celles des anciens afin que la chose pût être désormais ferme et sans dispute. Je l'ai donc fait, et j'ai trouvé que M. de Roberval avait eu raison, et que la ligne parabolique et la spirale sont égales l'une à l'autre ; c'est ce que vous verrez. La démonstration est entière et exactement accomplie, et vous pourra plaire d'autant*

LES SPIRALES

qu'elle est la seule de cette espèce, aucune autre n'ayant encore paru à la manière des anciens de la comparaison de deux lignes de différente nature. Ainsi je puis dire avec certitude que la ligne parabolique est égale à la spirale et je m'assure que cette preuve arrêtera toutes les contradictions Voilà ce que vous avez demandé de moi : je souhaite que cela vous agrée, et que ce vous soit au moins une marque du désir que j'ai de vous satisfaire et de vous témoigner que je suis de tout mon cœur, etc. De Paris, ce 10 décembre 1658.»<sup>3</sup>

Méthode des Anciens (aussi appelée méthode d'exhaustion), méthode des indivisibles : la première est au XVII-ème siècle le modèle de la rigueur, la deuxième étant quant à elle une méthode de découverte.

La spirale (S) est donnée. M est un point quelconque de (S) et I est le point de l'axe des abscisses qui vérifie  $OM = OI$ . Soit (P) une parabole,  $\alpha$  l'angle formé par la demi-droite [OM) et la tangente à la spirale en M,  $\beta$  l'angle formé par l'axe des abscisses et la tangente à la parabole en P. Lorsque la parabole (P) est correctement choisie, les angles  $\alpha$  et  $\beta$  sont égaux et l'arc de spirale  $\widehat{OM}$  a la même longueur que l'arc de parabole  $\widehat{OP}$ . (Par exemple si la spirale (S) a pour équation polaire  $\rho = k\theta$ ,

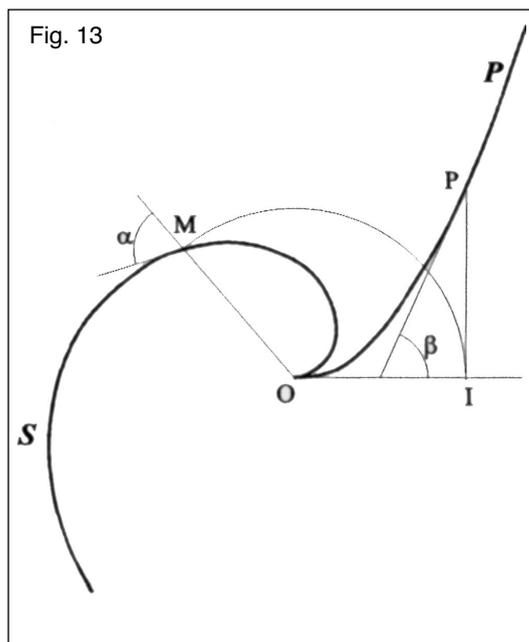


Fig. 13

il faut prendre la parabole (P) qui a pour équation cartésienne  $y = x^2/2k$ ).

**Exercice 6 : Théodore et Archimède : deux spirales si proches.** Montrer que lorsque n tend vers l'infini, la spirale de Théodore est asymptote à une spirale d'Archimède.

4. Les spirales de « Albrecht Dürer »

Dans son livre intitulé « Underweysung der messung / mit dem zirckel und richtscheyt / in Linien ebenen unnd gantzen corporen / durch Albrecht Dürer zu samen getzogen /

und zu nutz aller kuntstliebhabenden mit zu gehörigen figuren in truck gebracht / im jar M.D.XX.V.»<sup>4</sup>, Albrecht Dürer nous montre comment construire quelques spirales :

3 «Lettre de A. DETTONVILLE [c'est-à-dire de Blaise PASCAL] à Monsieur A.D.D.S.» in Blaise PASCAL, Œuvres Complètes, Bibliothèque de la Pléiade page 314. La démonstration de PASCAL est jointe à la lettre.

4 Instruction pour la mesure / à la règle et au compas / des lignes,

plans et corps solides / réunies par Albrecht Dürer / et imprimées avec les figures correspondantes / à l'usage de tous les amateurs d'art / en l'an M.D.XX.V. Une traduction de ce livre est parue en 1995 aux Editions du Seuil sous le titre "Albrecht Dürer: Géométrie" Traduction de Jeanne Peiffer.

- Une ligne en escargot utile dans la réalisation d'une corne de bélier pour les chapiteaux
- Construction d'une autre ligne en escargot où l'on ne peut s'empêcher de penser à Archimède
- Construction d'une spirale sans début ni fin.

Je renvoie le lecteur intéressé par les deux premières constructions à la traduction du livre de Dürer que vient de publier Jeanne PEIFFER aux Editions du Seuil.

La construction d'une spirale sans début ni fin est une source riche en exercices (notamment sur les suites adjacentes, les suites et les séries géométriques).

Par exemple appelant  $A_n$  la suite des centres pour  $n$  entier naturel,  $a_n$  l'abscisse de  $A_n$ , dans un repère d'origine  $A_0$ , montrer que les suites  $a_{2n}$  et  $a_{2n+1}$  sont adjacentes lorsque

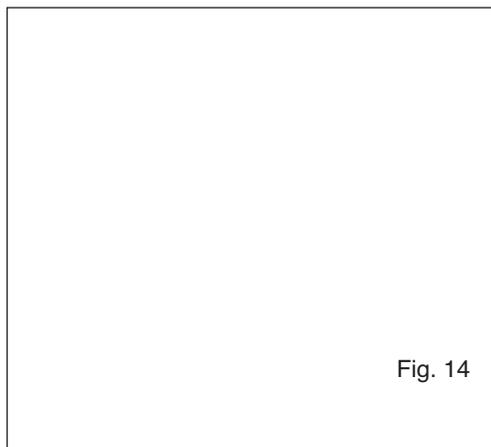


Fig. 14

$n$  tend vers moins l'infini. On peut alors chercher le point  $\Omega$  limite de la suite des points  $A_n$  et calculer la longueur de la courbe de  $\Omega$  jusqu'à un point  $A_n$  quelconque.

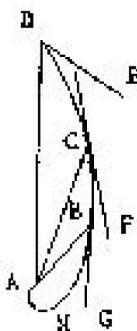
**Construction de la spirale  
sans début ni fin  
(voir Figure 14)**

"On peut concevoir une ligne éternelle qui s'enroule continûment autour d'un centre et qui décrit aussi à l'autre extrémité des révolutions de plus en plus amples, sans jamais s'arrêter. On ne peut réaliser cette ligne à la main, à cause de ses infinies grandeurs et petitesse. Car comme son début et sa fin n'existent pas, ils sont introuvables et concevables mentalement seulement. Mais je veux la représenter ci-dessous, tant qu'il est possible, avec un début et une fin. Je commence avec un point  $a$  et je décris la ligne à l'aide d'arcs de cercle comme si elle s'enroulait autour d'un centre, et à chaque révolution j'ôte une moitié de l'ampleur de la ligne. Je procède de même avec la ligne partant de  $a$  et allant vers l'extérieur. À chaque révolution, j'ajoute une moitié de l'ampleur. Ainsi cette ligne, plus elle s'enroule, plus elle se resserre, et plus elle se déroule, plus elle se desserre, sans jamais s'arrêter, ni en son centre, ni en son contour, comme j'en ai donné, afin de me faire comprendre, une représentation ..." (Dürer, opus cité)

**5. La spirale admirable aussi appelée la spirale de Descartes, la spirale de Bernoulli, la spirale de Gregory, la spirale équiangle, la spirale proportionnelle, la spirale logarithmique, la spirale exponentielle..<sup>5</sup>**

**5.1. La spirale de René DESCARTES.**

Dans une lettre datant du 12 septembre 1638 et adressée au père Mersenne en réponse à une question de celui-ci, Descartes écrit :



«...pour cete spirale, elle a plusieurs proprietz qui la rendent assez reconnoissable. Car si A est le centre de la terre & que ANBCD soit la spirale, ayant tiré les lignes droites AB, AC, AD, & semblables, il y a mesme proportion entre la courbe ANB & la droite AB, qu'entre la courbe ANBC & la droite AC ou ANBCD & AD, & ainsi des autres. Et si on tire les tangentes DE, CF, BG etc., les angles ADE, ACF, ABG etc. seront egaux»

Il est très remarquable que Descartes connaisse la proportionnalité de l'arc de la spirale à son rayon. C'est d'autant plus remarquable que celui-ci était convaincu qu'il n'était pas possible de rectifier une courbe quelconque.

En langage actuel, la propriété caractéristique que donne Descartes de cette spirale est :

$$\frac{s}{\rho} = a (*) \text{ où } s \text{ désigne l'abscisse curviligne du point générique } M \text{ (s est la longueur de l'arc ANBM), } \rho \text{ le rayon vecteur (} \rho = \text{AM) et } a \text{ une constante. Avec les outils mathématiques dont nous disposons, l'équation (*) s'intègre facilement en :}$$

5 C'est le mathématicien Pierre VARIGNON (1654-1722) qui dénomma cette spirale «spirale logarithmique», nom sous lequel elle est connue à l'heure actuelle. J. BERNOULLI l'appela «la spirale admirable» pour ses nombreuses propriétés (voir la conclusion)

Fig. 15

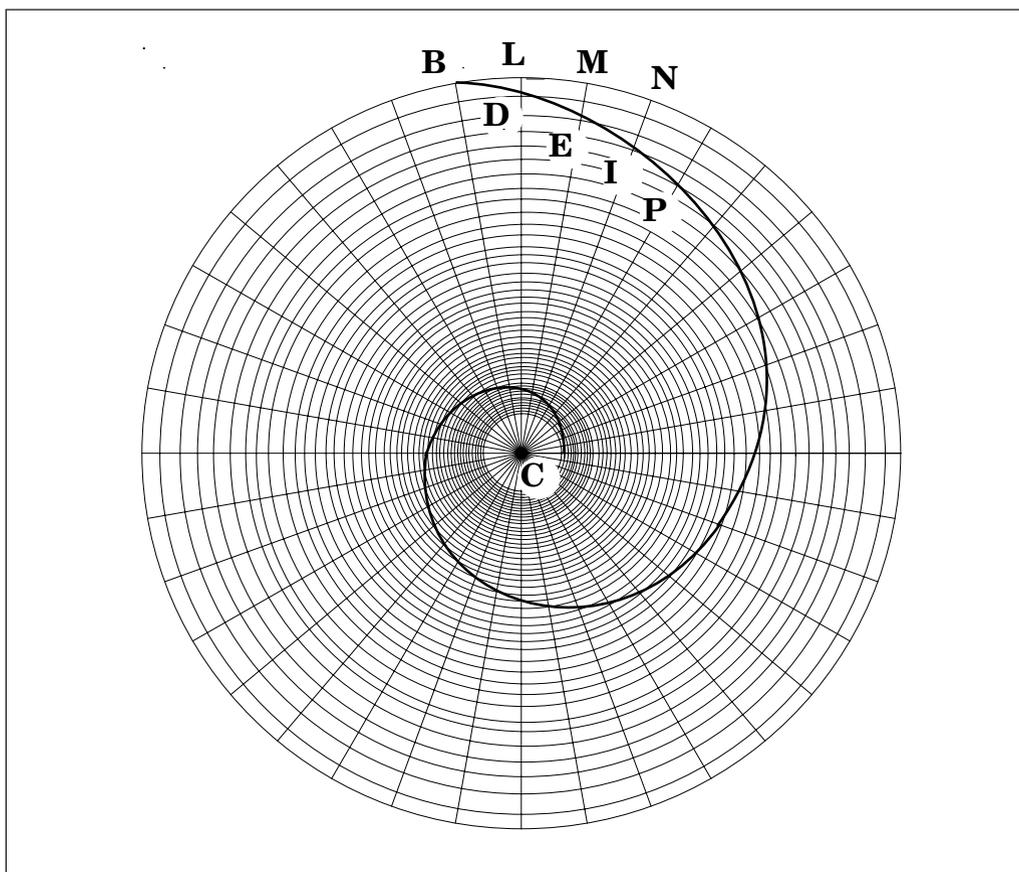
Spirale logarithmique d'équation  
 $\rho(\theta) = e^{\alpha\theta}$   
 avec  $\alpha = 0,088$ , soit l'angle  $\varphi \approx 85^\circ$ .

$\rho = ke^{\alpha\theta}$  où  $\theta$  est l'angle polaire, k une constante et  $\alpha = 1/\sqrt{a^2 - 1}$ .

On en déduit facilement que l'angle  $\varphi$  formé par le vecteur  $\vec{AM}$  et la tangente vérifie :  $\tan\varphi = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{a^2 - 1}$  soit  $\varphi = \text{Arccos}(1/a)$  et par suite, cet angle ne dépend pas de M.

**5.2. Une propriété de la spirale logarithmique énoncée par J. BERNOULLI.**

« Si sur le plan du cercle BCH se trouve une courbe BDEIPC que coupent, sous un même angle



*oblique, les rayons CB, CL, etc. menés à partir du centre C du cercle, cette courbe est dite spirale logarithmique puisque si on choisit des arcs LM, MN etc. infiniment petits et égaux c'est à dire arithmétiquement proportionnels aux arcs BL, BM, BN, les rayons DC, EC, IC sont géométriquement proportionnels par les triangles semblables DCE, ECI etc. »*

Cette propriété de la spirale logarith-

mique nous permet de la construire géométriquement. (voir la figure ci-dessus). Les angles sont égaux :

$$\widehat{BCL} = \widehat{LCM} = \widehat{MCN} = \dots$$

Les côtés sont en progression géométrique :

$$\frac{CB}{CD} = \frac{CD}{CE} = \frac{CE}{CI} = \frac{CI}{CP} = \dots$$

**5.3. La rectification de la spirale logarithmique par Torricelli.**

Soit à rectifier l'arc de spirale logarithmique  $\widehat{AI}$  de centre O et tel que  $OA > OI$ .  
(voir la figure 16 pour les notations)

Sur cet arc, reportons les points, en nombre pair, B, C, D, E... de telle sorte que :

$\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOE} = \dots = \widehat{HOI}$   
et sur les segments [OA] et [OB] les points I', J' et J tels que :  $OI' = OJ = OI$ .

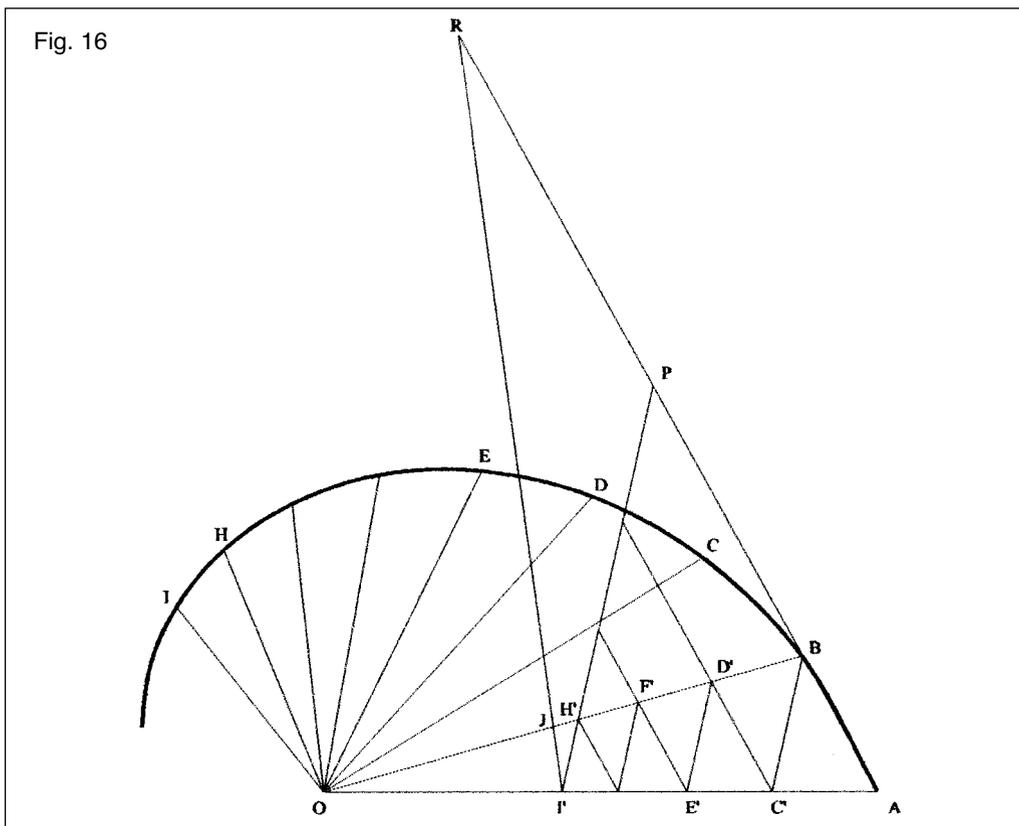
Appelant R le point d'intersection des droites (I'J) et (AB), la longueur du segment [AR] est la somme des longueurs des segments [AB], [BC], [CD], ... , [HI] :

$$AR = AB + BC + CD + DE + \dots + HI$$

En effet : reportons alternativement sur les segments [OB] et [OA] les points C', D', E',... tels que :

$$OC' = OC, OD' = OD, OE' = OE, \dots, OH' = OH$$

Par définition de la spirale logarithmique, les triangles (AOB), (BOC), (COD), (DOE), ... , (HOI) sont semblables. En particulier, en écrivant les rapports de similitude



de (AOB) et (COD), on a :

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{OC'}{OD'}$$

Et, par suite, les droites (AB) et (D'C') sont parallèles. De la même manière, on démontre que les droites (BC'), (D'E'), ... , (H'I') sont parallèles ainsi que les droites (AB), (D'C'), (F'E'), ...

Appelant P le point d'intersection des droites (I'H') et (AB), on en déduit que :

$$I'P = I'H' + \dots + E'D' + C'B$$

et  $AP = AB + D'C' + E'F' + \dots$

Or, les triangles (C'OB) et (COB) sont égaux. D'où  $BC = BC'$ .

De même, on a :  $C'D' = CD$ ,  $D'E' = DE$ , ... et :

$$I'P = IH + \dots + ED + CB$$

et  $AP = AB + DC + EF + \dots$

Enfin, le triangle (RPI') est isocèle car :

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBC} = \widehat{OBC'} = \widehat{OH'I'} \quad (*)$$

le triangle (OJI') est isocèle (\*\*)

donc  $\widehat{OI'J} = \widehat{OJI'}$  et aussi :  $\widehat{H'JI'} = \widehat{JI'A}$

(\*) et (\*\*) impliquent que les deux triangles (H'JI') et (AI'R) sont semblables et, par suite

l'égalité des angles :  $\widehat{RI'P} = \widehat{PRI'}$  et des longueurs  $I'P = PR$ .

Finalement :

$$AR = AP + AR = AB + BC + CD + \dots + HI$$

Si à présent on augmente indéfiniment le nombre de points sur l'arc  $\widehat{AI}$ , la droite (AB) devient la tangente à la spirale en A et la droite (I'J) la perpendiculaire à (OA) en I'.

**Théorème :** la longueur de l'arc de spirale

logarithmique  $\widehat{AI}$  est égale à la longueur du segment [AR] de la tangente à la spirale en A où R est le point d'intersection de la tangente avec la perpendiculaire à (OA) en I' tel que  $OI' = OI$ .

**5.4. Une spirale logarithmique dans la nature : le nautilus.**

Petit nautilus deviendra grand : Quand la chambre qu'il occupe est trop petite, le nautilus en secrète une nouvelle qu'il sépare de la précédente par une cloison. Sa coquille qui est symétrique par rapport à son plan médian, dessine une spirale logarithmique parfaite.

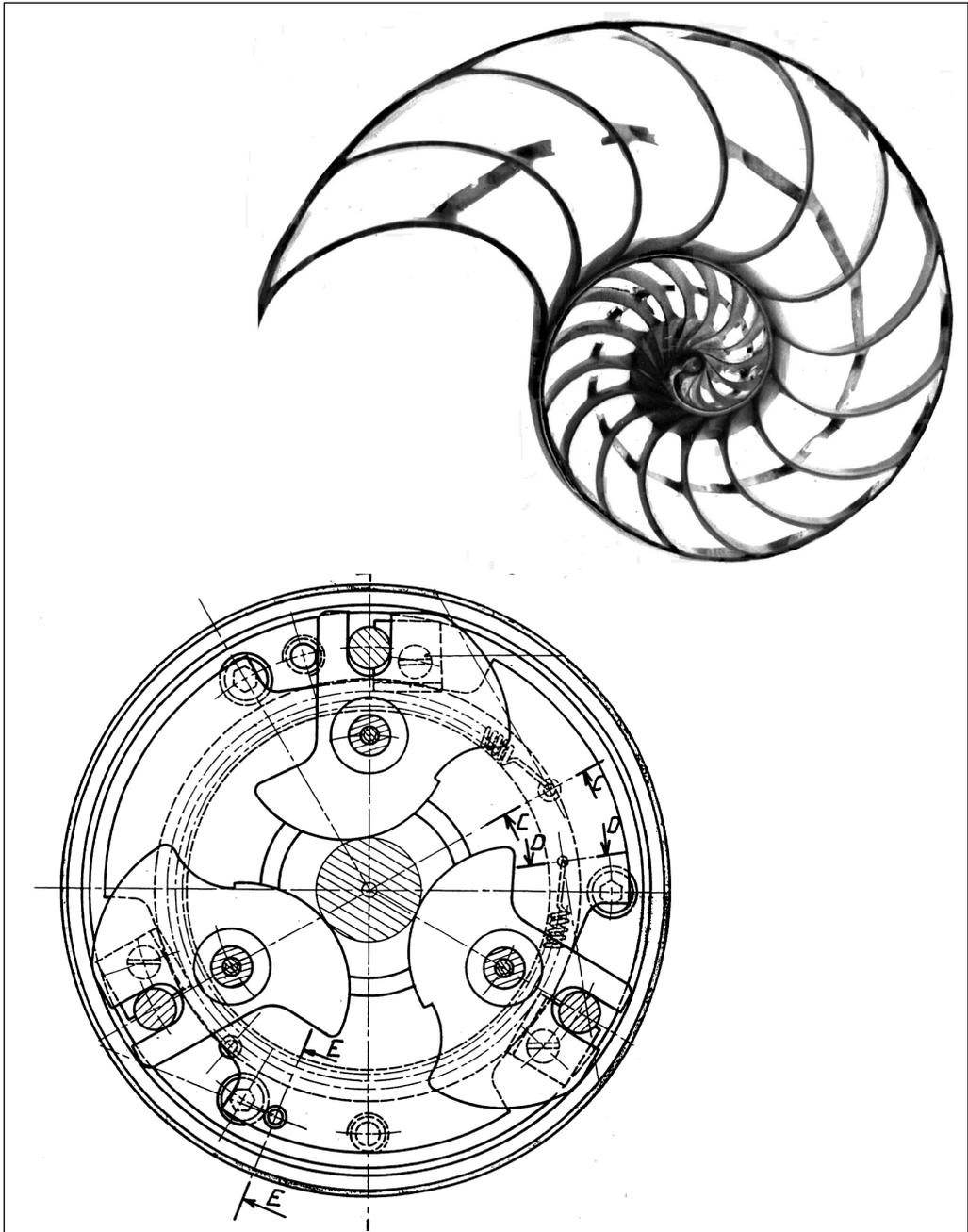
**Exercice 7 :** Reproduisez la coquille de la page suivante en l'agrandissant ou en la réduisant (dans le rapport k) ; Moyennant une rotation (d'angle  $\psi$ ), cette reproduction se superposera avec l'original. Trouvez une relation entre k et  $\psi$ .

**5.5. Une spirale logarithmique en mécanique: une roue libre.**

Une roue libre est un accouplement directionnel qui peut transmettre un moment par friction dans une direction en autorisant une marche à vide dans l'autre direction.

Le principe de la roue libre de la page suivante est le suivant : lorsque l'axe central (hachuré sur la figure) tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, il entraîne les trois galets qui basculent. La courbure de ces galets est en forme de spirale logarithmique : le rayon augmente, l'angle de contact avec l'axe reste identique.

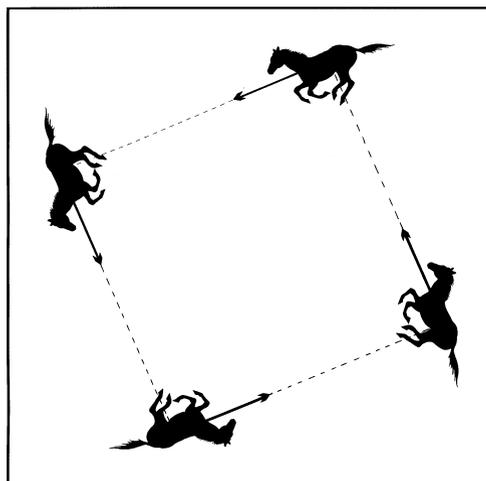
LES SPIRALES



### 5.6. Un problème :

Galopin, Trotine, Marco et Plubelle sont quatre chevaux disposés, dans cet ordre, aux quatre sommets d'un carré de 1 kilomètre de côté. Les chevaux courent tous les quatre à la même vitesse constante  $v = 54 \text{ km/h}$ .

Galopin est attiré par Trotine, Trotine par Marco, Marco par Plubelle et Plubelle par Galopin. A chaque instant, chacun se dirige vers son (ou sa) préféré(e). Le but du problème est de trouver les trajectoires des quatre chevaux et de calculer la distance parcourue par un des chevaux à la fin de la course. Celle-ci s'arrêtant lorsque la distance séparant deux chevaux est inférieure à deux mètres.



*Remarque préliminaire :* Pour des raisons de symétries, il suffit de trouver l'une des quatre trajectoires. Les autres s'en déduisent par des rotations de centre O, le centre du carré initial, et d'angle  $\pi/4$ .

*Choix d'un repère :* le point O s'impose naturellement comme origine. Comme axe des abscisses, nous pouvons, par exemple, prendre un axe perpendiculaire à un des côtés du carré. Désignons, pour simplifier les notations, par G, T, M et P les quatre chevaux et posons  $\rho(t)$  la distance OG et  $\theta(t)$  l'angle orienté

(  $\vec{x}$  ,  $\vec{OG}$  ) à l'instant t.

Quelle est en fonction de t et sous forme trigonométrique, l'affixe z du point G ? Montrer que l'affixe  $z_T$  de T est iz.

Calculer la dérivée  $\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt}$ .

Par définition,  $\dot{z}(t)$  est l'affixe du vecteur vitesse de G dans le repère  $R = (O, \vec{x}, \vec{y})$ .

Expliquer pourquoi la phrase : « A chaque instant t, G se dirige vers T » peut se traduire par : « il existe une fonction  $k(t)$ , à valeurs réelles, telle que :  $\dot{z}(t) = k(t) \cdot [z_T(t) - z(t)]$  (\*1) .

LES SPIRALES

En identifiant les parties réelles et imaginaires dans (\*1), montrer que :

$$\dot{\rho}(t) = -k(t).\rho(t) \text{ (*2) et } \rho\dot{\theta} = k(t).\rho(t) \text{ (*3).}$$

En déduire :  $\dot{\rho}(t) = -\rho(t).\dot{\theta}(t) \text{ (*4)}$

ou encore  $\dot{\rho} / \rho = -\dot{\theta} \text{ (*4a)}$ .

Intégrer l'équation différentielle (\*4a). Calculer  $\rho(0)$  et  $\theta(0)$ . En déduire que l'équation de la trajectoire du cheval Galopin est :

$$\rho = \frac{\sqrt{2}}{2} \exp\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \text{ (*5)}$$

Représenter graphiquement cette trajectoire pour  $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, 2\pi\right]$ .

L'expression (\*5) exprime le module  $\rho$  en fonction de l'argument  $\theta$ . Dans cette question, nous cherchons à exprimer  $\rho$  et  $\theta$  en fonction du temps  $t$ .

Calculer le module de  $\dot{z}(t)$  et en déduire :

$$(\dot{\rho}(t))^2 + (\rho(t)\dot{\theta}(t))^2 = v^2.$$

A l'aide de (\*4) et (\*5), montrer que la fonction  $\rho$  est solution de l'équation différentielle :  $e^{-\theta}\dot{\theta} = e^{-\pi/4}.v \text{ (*6)}$ . Intégrer cette équation différentielle et en déduire :

$$\theta(t) = \frac{\pi}{4} - \ln(1 - vt) \text{ et } \rho(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - vt) \text{ (*7)}$$

Exprimer en fonction de  $t$ , le module de :

$$z_T(t) - z(t).$$

Que représente ce nombre ? En déduire à quel instant cesse la course et la distance parcourue par chaque cheval.

**5.7. Bref retour à la spirale sans début ni fin de Albrecht Dürer.**

Fig. 17

Sur la figure 17, nous avons représenté simultanément la spirale de Dürer et une certaine spirale logarithmique : le lecteur se fera un plaisir de trouver l'équation polaire de cette spirale.

**6. Autres spirales que l'on pourrait développer**

Pour en savoir davantage sur les spirales présentées dans ce paragraphe, le lecteur se reportera à la bibliographie. Il pourra aussi écrire à l'auteur pour obtenir le texte complet de la conférence APMEP du 28 mars 1998.

**6.1. La spirale hyperbolique.**

La spirale hyperbolique est étudiée au début du XVIIIème siècle par Pierre VARIGNON et Jean BERNOULLI. Celui-ci donne cette cour-

Fig. 18

be comme solution du problème des forces centrales lorsque cette dernière est inversement proportionnelle au cube de la distance.

On la rencontre également dans les situations suivantes :

- 6.1.1. La projection stéréographique d'une hélice sur un plan perpendiculaire à son axe est une spirale hyperbolique. En particulier la photo d'un escalier hélicoïdal est bonne approximation d'une spirale hyperbolique.
- 6.1.2. L'image d'une spirale d'Archimède par inversion est une spirale hyperbolique.
- 6.1.3. Sur un stade d'athlétisme, au départ d'une course de 200 m ou de 400 m, les coureurs sont disposés suivant une spirale hyperbolique.

## 6.2. La développante du cercle et la spirale de Norwich

### 6.2.1. La développante du cercle.

Cette courbe s'obtient très simplement de la manière suivante : prendre une bobine de

fil, attacher un crayon au bout du fil, fixer solidement la bobine sur le plan de travail, dérouler le fil en prenant soin de laisser tendu. Le crayon marquera une superbe spirale que l'on appelle habituellement « développante du cercle ».

Léonard de VINCI préconisa de donner cette forme aux dents des engrenages.

### 6.2.2. La développante de la développante du cercle : la spirale de Norwich.

Enroulons à présent notre fil sur la développante du cercle. En le déroulant (prendre soin de laisser tendu), nous obtenons une nouvelle spirale appelée «**spirale de Norwich**». Celle-ci doit son nom au mathématicien anglais J.J. SYLVESTER qui l'a dénommée ainsi suite à un meeting qui eu lieu en 1868 dans la ville de Norwich.

*Une propriété remarquable de cette spirale :* En tout point de cette spirale, le rayon vecteur est égal au rayon de courbure. Sur le dessin ci-dessous, cette propriété se traduit par :  
NO = NM.

Fig. 19

### 6.3. La spirale de CORNU ou clothoïde.

En étudiant les problèmes de la diffraction de la lumière, Alfred CORNU (1841-1902), un physicien français, fut amené à introduire une courbe dont le rayon de courbure en un point quelconque M est inversement proportionnel à l'abscisse curviligne

$\widehat{OM}$  de ce point. Cette courbe qui est une spirale et qui porte désormais son nom a pour équations, en coordonnées paramétriques :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = \int_0^t \cos(u^2) du \\ y(t) = \int_0^t \sin(u^2) du \end{array} \right.$$

Elle est utilisée actuellement dans les travaux publics — dessin des bretelles de raccordement d'auto-

routes par exemple — Elle permet de négocier les virages à vitesse constante en tournant le volant à vitesse constante.

Fig. 20

## Conclusion

Pour finir, je ne peux résister au plaisir de donner la conclusion du chapitre XLIX que Jacques Bernoulli consacre à la spirale logarithmique dans son ouvrage « Acta eruditorum ».



Après avoir montré de nombreuses propriétés de cette courbe — qu'il appelle « la spirale admirable » —, J. Bernoulli conclut de la manière suivante :

*Puisqu'en effet cette spirale engendre une spirale toujours semblable à elle-même, quelle que soit la façon dont elle s'enroule, se déroule, rayonne ; elle pourrait aussi bien être pour tous un emblème semblable aux descendants des parents ; La Fille Très Semblable à la Mère. Ou bien (s'il est permis d'appliquer cette chose aux mystères de l'éternelle Vérité de la Foi) elle est comme une esquisse quelconque de l'éternelle Génération du Fils, semblable à l'image du Père, et de ce fait comme la Lumière issue de la Lumière et identique à elle. Ou bien si vous préférez, parce que notre courbe admirable dans sa révolution demeure toujours semblable à elle-même, de façon très constante et en rapport, elle pourrait être le symbole du courage et de la constance dans l'adversité ; et même le symbole de la résurrection de notre chair après de multiples altérations, la même pourtant après la mort. D'ailleurs si l'usage s'était maintenu de nos jours d'imiter ARCHIMEDE, j'ordonnerai volontiers que fût gravée sur ma tombe cette spirale avec l'épigraphe : « Eadem numero mutata sesurgo » c'est-à-dire : « Elle ressuscitera identique à elle-même ».*

**Annexes**

**Annexe 1 : corrigé de l'Exercice 3**

```
> Transformation: z->z(1+i/abs(z));
> restart:with(plots):
> Theo:=proc(x,y)
> evalhf(x-y/sqrt(x^2+y^2)),
    evalhf(y+x/sqrt(x^2+y^2));
> end:
> x:=t->evalhf(1+2*t*(1-t)):
> y:=t->evalhf(t):
> n:=17:
> c[0]:=[seq([x(i/100),y(i/100)],i=0..100)]:
> for k from 1 to n do c[k]:=
    [seq([Theo(op(c[k-1][i])),i=1..101)]: od:
> display({plot(c[0],color=red),
    seq(plot(c[i],color=blue),i=1..n)},
> scaling=constrained);
```

**Annexe 2 : Recherche d'une courbe « régulière » passant par tous les points de la spirale de Théodore<sup>6</sup>**

Les notations sont les mêmes que dans l'Exercice 1. Pour n, nombre entier naturel, on a :

$$\rho(n) = OA_n = \sqrt{n}$$

$$\text{et } \begin{cases} \theta(n) = \sum_{p=1}^{p=n-1} \arctan(1/\sqrt{p}) & \text{si } n \geq 2 \\ \theta(1) = 0 \end{cases}$$

Le problème consiste donc à prolonger à l'intervalle  $[1, +\infty[$  les fonctions  $\rho$  et  $\theta$ .

La fonction  $\rho$  se prolonge naturellement en :  $x \in [1, +\infty[$ ,  $\rho(x) = \sqrt{x}$ . Quant à  $\theta$ , remarquons que :  $\theta(n+1) - \theta(n) = \arctan(1/\sqrt{n})$ .

Si on veut généraliser cette relation, il nous faut résoudre l'équation fonctionnelle suivante :

<sup>6</sup> Je remercie mon collègue Philippe AUSCHER qui m'a aidé à élaborer cette solution.

(E) :  $\theta(x+1) - \theta(x) = \arctan(1/\sqrt{x})$  si  $x \in [1, +\infty[$ , et  $\theta(1) = 0$ .

Soit f une solution quelconque de :

$$\theta(x+1) - \theta(x) = 0$$

vérifiant  $f(1) = 0$  (f est une fonction 1-périodique) et g une solution particulière de (E), il est aisé de vérifier que  $\theta = f + g$  est solution de (E). (Remarquons d'ailleurs que toute solution de (E) est de cette forme)

Il suffit donc de trouver UNE solution de l'équation (E).

Posons  $h(x) = \arctan(1/\sqrt{x})$ , et dérivons :

$$g'(x+1) - g'(x) = h'(x)$$

En remplaçant x par x+p, nous obtenons :

$$g'(x+p+1) - g'(x+p) = h'(x+p)$$

En sommant de p=0 à p=n,

$$g'(x+n+1) - g'(x) = \sum_{p=0}^{p=n} h'(x+p) \quad (*)$$

Or  $h'(x) = -1/[2\sqrt{x}(x+1)]$  et par conséquent la série de terme général  $h'(x+p)$  est convergente (en effet, x fixé et p au voisinage de  $+\infty$ ,

$$h'(x+p) \text{ est équivalent à } \frac{-1}{2p^{3/2}})$$

Faisons tendre n vers  $+\infty$  dans (\*) et prenons la solution g de (E) qui vérifie  $\lim_{x \rightarrow \infty} g'(x) = 0$ , pour en déduire que :

$$g'(x) = - \sum_{p=0}^{+\infty} h'(x+p)$$

Il suffit à présent de remarquer que :

$$g(x) = g(x) - g(1) = \int_1^x g'(t)dt$$

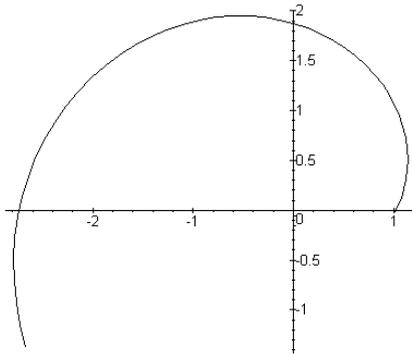
$$g(x) = - \int_1^x \sum_{p=0}^{\infty} h'(t+p)dt = - \sum_{p=0}^{\infty} \int_1^x h'(t+p)dt$$

(Le lecteur aura bien sûr pris soin de justifier l'inversion des signes  $\sum$  et  $\int$  )

pour conclure que la fonction

$$g : x \rightarrow g(x) = - h(x) + \sum_{p=1}^{\infty} [h(p) - h(p+x)]$$

est une solution de l'équation (E).



*Conclusion :* En coordonnées polaires une équation de la courbe cherchée est :

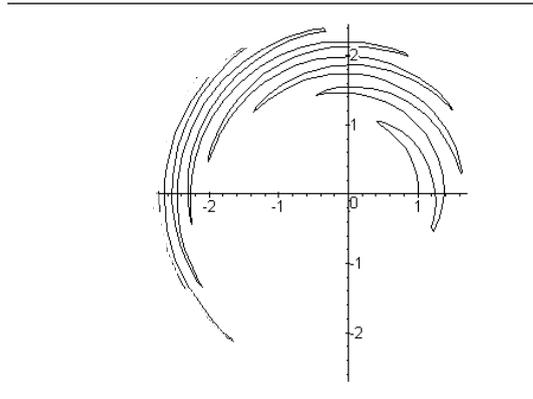
$$\theta : \rho \rightarrow f(\rho^2) + g(\rho^2)$$

où  $f$  est une fonction 1-périodique vérifiant  $f(1) = 0$  et

$$g(x) = - h(x) + \sum_{p=1}^{\infty} [h(p) - h(p+x)]$$

*Remarque :* La solution  $\rho \rightarrow \theta(\rho) = g(\rho^2)$  est croissante et dérivable. Est-ce la seule ?

Les figures suivantes sont obtenues en prenant  $f(t) = 0$  puis  $f(t) = \sin(2\pi t)$ .



**Annexe 3 : corrigé de l'Exercice 4**

Posons  $f(x) = \arctan(1/\sqrt{x})$  ; Il s'agit de calculer  $\sum_{k=1}^{k=n-1} f(k)$  avec une erreur inférieure à  $2\pi$ .

En remarquant que la fonction  $f$  est décroissante sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  on a :

$$\int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{k=n-1} f(k) \leq \int_0^{n-1} f(x)dx \quad (1)$$

Appelons  $F$  une primitive de  $f$ , l'inégalité (1)

$$\text{s'écrit : } F(n) - F(1) \leq \sum_{k=1}^{k=n-1} f(k) \leq F(n-1) - F(0) \quad (2)$$

Le calcul de  $F$  ne pose pas de problème :

$$\begin{aligned} F(x) &= (x+1) \arctan(1/\sqrt{x}) + \sqrt{x} \\ &= (x+1) \cdot [\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{x})] + \sqrt{x} . \end{aligned}$$

En particulier  $F(0) = \pi/2$  et  $F(1) = 1+\pi/2$ .

Par conséquent :

$$\frac{F(n)}{2\pi} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2\pi} \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{k=n-1} f(k) \leq \frac{F(n-1)}{2\pi} - \frac{1}{4} \quad \text{de} \quad \frac{F(n-1)}{2\pi} - \frac{1}{4}.$$

Finalement, lorsque  $n > 17$ , le nombre de tours complets est égal à la partie entière

*Exemple* : si  $n = 10^9$ , le nombre de tours complets est 10 065.

### Bibliographie

- Fragments d'histoire des mathématiques II -Brochure APMEP n°65 -1987 – Les deux articles suivants : François DE GANDT : Naissance et métamorphose d'une théorie mathématique : la géométrie des indivisibles en Italie et Evelyne BARBIN : Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des indivisibles au XVII<sup>e</sup> siècle.
- ARCHIMEDE - Traduction Charles MUGLER - Edition «Les Belles Lettres» Tome II 1971.
- ARCHIMEDE -Œuvres complètes - traduction P. Ver Eecke - 2 vol., Paris, 1961.
- ALBRECHT DURER - Géométrie - Traduction Jeanne PEIFFER - Editions du Seuil 1995.
- Blaise PASCAL - Oeuvres Complètes - Bibliothèque de la Pléade - Editions Gallimard 1954.
- P. J. DAVIS - Spirals from Theodorus to chaos - Editions A K PETERS Wellesley, Massachusetts 1993.
- Brochure IREM de Strasbourg - Activités géométriques pour le collège et le lycée présentées dans une perspective historique - 1996 -
- Dr Gino LORIA - Spezielle algebraische und transscendente Ebene Kurven. LEIPZIG 1902.
- René DESCARTES - Œuvres de René DESCARTES - Editions Vrin - Tome 2 - 1996.
- Jacob BERNOULLI - Opera - Acta eruditorum, 1692 - vol XLII et vol XLIX - Traduit du latin par Marga BUFFARD/André STOLL

- Bernard BETTINELLI (IREM de Besançon) : Intuition et démonstration chez Archimède in «Repères-IREM» N°2 janvier 1991.
- PLATON - Théétète - Edition «Les Belles Lettres» Tome VIII 1963.
- Revue du Palais de la découverte - numéro spécial 45 - Courbes mathématiques - 1995.
- André STOLL -Les Spirales – Conférence APMEP – Texte complet disponible à l'IREM de Strasbourg.
- Dictionnaire des symboles.- Jean CHEVALIER et Alain GHEERBRANT- Editions Robert Laffont/Jupiter- Collection Bouquins- 1993.



Détail de la pierre tombale de J. Bernoulli à Bâle. Remarquez que, contrairement au souhait de J. Bernoulli, le sculpteur a gravé une spirale d'Archimède et non une spirale admirable. (photo André Stoll)