IREM de Grenoble,
groupe «Liaison lycée-université» (Valence)

Rapport d'activité 2017-2018

Damien Achard, Aubry Colombet, Baptiste Cordeil,
Vincent Guisse, Eric Dumas, Jean-Étienne Rombaldi

Table des matières

1 Introduction

Nous avons continué cette année l'activité initiée en 2014-2015, suivant la proposition de Christine Kazantsev de «solliciter davantage les élèves de terminale scientifique en leur présentant des exercices plus exigeants que ceux du baccalauréat». Cela s'adresse à des élèves de terminale S motivé(e)s et plutôt à l'aise avec le programme.

Afin de donner à ces élèves une motivation supplémentaire, un peu de culture, et un avant-goût des maths du supérieur, en manipulant des notions à la limite du programme, nous avons tâché de leur présenter, sous forme de problèmes, des objets à leur portée et/ou de jolis résultats et des méthodes associées.

Dans ce qui suit, nous présentons le travail effectué, en décrivant comment les élèves ont appréhendé ces problèmes. En annexe, on fournit les sujets et des éléments de correction (à destination des enseignantes et enseignants) ; sur demande, nous pouvons fournir nos fichiers source (.tex).

2 L'équipe

Le groupe était composé de

- Damien Achard, enseignant au lycée les 3 sources (Bourg-Lès-Valence) : Damien.Achard@ac-grenoble.fr ;
- Aubry Colombet, enseignant au lycée du Dauphiné (Romans-sur-Isère) : Aubry.Colombet@ac-grenoble.fr ;
- Baptiste Cordeil, enseignant au lycée Saint-Victor (Valence) : Baptiste.Cordeil@ac-grenoble.fr ;
- Éric Dumas, enseignant-chercheur à l'Institut Fourier (Université Grenoble Alpes, Grenoble) : Eric.Dumas@univ-grenoble-alpes.fr ;
- Jean-Étienne Rombaldi, retraité, ancien enseignant au Centre Drôme-Ardèche (Université Grenoble Alpes, Valence) : Jean-Etienne.Rombaldi@univ-grenoble-alpes.fr ;
- Vincent Guisse, enseignant au lycée Émile Loubet (Valence) : Vincent.Guisse@ac-grenoble.fr.

3 Les thèmes abordés

Nous avons élaboré quatre sujets différents, pour (re)venir sur des questions variées.

1. «Autour des suites récurrentes» ; notions abordées :
   - inégalités,
   - preuve par récurrence,
   - monotonie de suites et fonctions à valeurs réelles,
   - convergence de suites de nombres réels,
   - théorème des valeurs intermédiaires,
   - algorithme et approximation numérique.
2. «Autour des coniques» ; notions abordées :
   - descriptions cartésienne et paramétrique,
   - raisonnement par équivalence, égalités d'ensembles,
   - manipulations algébriques, type «mise sous forme canonique»d'expresions quadratiques.
3. «Sur les séries» ; notions abordées :
   - identité remarquable «de Bernoulli»,
   - convergence de suites de nombres réels,
   - preuve par récurrence,
   - inégalités, utilisation de la monotonie,
   - intégration des fonctions polynomiales.
4. «Nombres complexes et géométrie» ; l'énoncé est en cours de finalisation ; notions abordées :
   - écritures algébrique et trigonométrique des nombres complexes,
   - description de lieux géométriques dans le plan,
   - raisonnement par équivalence, égalités d'ensembles.

4 L'expérimentation avec les élèves : «Sur les séries», au lycée les 3 sources

Le sujet a été testé avec un groupe de 8 élèves (tous des garçons) en accompagnement personnalisé au cours de quatre séances d'une heure sur quatre semaines consécutives. Ces élèves étaient tous volontaires, motivés et avaient pour objectif de poursuivre des études scientifiques en classes préparatoires aux grandes écoles. Les élèves étaient placés en position de recherche, guidés par le professeur lorsque cela était nécessaire.

4.1 Détail des réponses

Sommes géométriques

1. Certaines élèves utilisent une récurrence et parviennent au résultat. Le théorème de comparaison est correctement appliqué ensuite.
2. Réussie.
3. (a) Réussie.
   (b) Certains élèves différencient les cas N pair et N impair ce qui fait référence aux suites extraites. Le professeur explique rapidement le concept.

Convergence

1. Très bien.

Fin de la première séance

2. (a) Très bien.
   (b) Très bien. Un élève pose la question : « est-il possible de rédiger la démonstration sans les points de suspension ? ». Un autre lui répond en écrivant une réponse avec changement de variable dans le symbole somme !
   (c) Très bien.

Séries alternées

1. Personne ne pense à étudier le signe de la différence... Le professeur donne l'idée. Les indices et les sommes posent des problèmes aux élèves, deux parviennent à rédiger une solution.
2. Réussie.

Fin de la deuxième séance

3. Question identique à la précédente, le professeur corrige. On pourrait admettre cette question : « en utilisant le même raisonnement, on admet que... ».
4. Personne ne trouve. Le professeur rappelle d'abord que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 puis suggère d'étudier la différence $S_{2k+1} - S_{2k}$. Un élève rédige une solution.
5. Le professeur prend le temps d'expliquer la définition de la convergence avec les ε. La question semble trop difficile pour un premier « epsilonnage ». Le professeur corrige au tableau. À noter qu'un élève pense à utiliser la notion de maximum au cours de la démonstration.
6. Utilisation correcte du théorème précédent.

Séries à termes positifs

1. (a) Réussie.
   (b) Aucun élève ne trouve (il ne reste que peu de temps dans la séance). Le professeur propose aux élèves de chercher cette question pour la prochaine séance.

Fin de la troisième séance

Aucun n'élève n'a cherché la question. Le professeur corrige au tableau.

2. (a) Les élèves proposent des solutions erronées : des erreurs de notations ($0 \leqslant \sum a_n \leqslant \sum b_n$), utilisation de limite de série dont la convergence n'est pas justifiée ($l' = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$). Certains élèves voient le lien avec la première question.
   (b) i. Aucun élève ne voit la suite géométrique : le professeur donne l'information. La question est alors correctement résolue.
      ii. Un élève répond immédiatement que la somme fait π mais ne justifie pas la convergence. Un autre voit l'encadrement $0 \leqslant a_n \leqslant 9$ mais peine à conclure.
3. (a) Très bien

Fin de la quatrième séance

4.2 Conclusions

Les élèves ont apprécié le travail sur les séries, le professeur a pris le temps d'expliquer qu'une somme infinie ne se manipule pas n'importe comment et que, si l'on n'y prend pas garde, on peut vite arriver à des aberrations (comme par exemple la somme des entiers naturels qui vaut $-\frac{1}{2}$).

Ce sujet permet d'approfondir le travail sur les suites réalisé au cours de l'année de terminale S. Certaines questions nous invitent même à découvrir la notion de suite extraite. Peu de questions ont réellement bloqué tous les élèves. On notera en particulier la définition de la convergence avec les ε et son utilisation. On pourrait envisager l'utilisation des intervalles ouverts comme dans le programme de terminale S.

L'objectif de départ était de passer quatre séances sur ce sujet. Ce dernier est trop long pour le temps dont nous disposions. Il faudrait envisager d'écrire le sujet avec une partie faite en classe et une autre laissée aux élèves en autonomie.

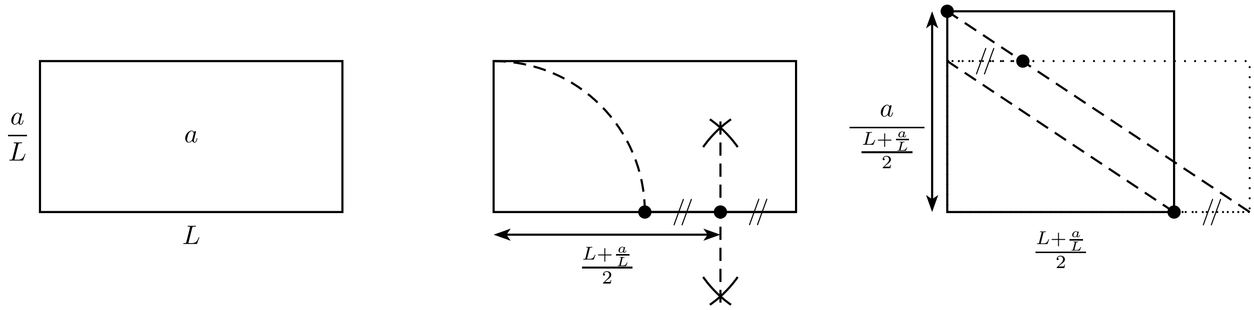
5 Annexe : les sujets

5.1 Suites récurrentes

Suites Récurrentes

Dans l'Antiquité, le procédé suivant, attribué à Héron d'Alexandrie [1], permettait géométriquement de donner une approximation de la racine carrée d'un nombre $a > 0$ quelconque, c'est-à-dire de la longueur du côté d'un carré d'aire a. Partant d'un rectangle d'aire a, de côtés de longueur $L > 0$ quelconque et $\frac{a}{L}$, on construit (avec une règle et un compas !) un nouveau rectangle d'aire a, qui ressemble davantage à un carré : un côté a pour longueur la moyenne arithmétique de L et $\frac{a}{L}$ (c'est-à-dire $\frac{L + \frac{a}{L}}{2}$, valeur comprise entre L et $\frac{a}{L}$), et l'autre côté a pour longueur a divisé par cette moyenne arithmétique. En répétant cette opération, on obtient des rectangles dont le rapport des longueurs des côtés tend vers 1 ; ces longueurs s'approchent donc de celle des côtés d'un carré d'aire a, soit $\sqrt{a}$.

1. Mathématicien et mécanicien actif au premier siècle ap J.-C à Alexandrie (Egypte). Il est notamment connu pour la formule de Héron : si a, b et c sont les longueurs des côtés d'un triangle et p le demi-périmètre alors l'aire du triangle est :
$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$



Ce procédé, aussi appelé « algorithme babylonien », consiste en termes modernes à considérer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$(1) \qquad \begin{cases} u_0 = L, \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

ici avec $f(x) = \dfrac{x + \frac{a}{x}}{2}$. Lorsque f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et L un nombre réel, on se convainc par un argument de récurrence que les relations (1) définissent de proche en proche tous les termes d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est ce type de suites (dites « récurrentes ») que nous allons étudier ici.

– I – Contre les idées reçues

On souhaite définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et l'étudier.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer par récurrence que tous les termes u_n sont bien définis, pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Étudier les variations de la fonction f_1, de $[-1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f_1(x) = \sqrt{1+x}$, et comparer avec les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. La fonction f_1 a-t-elle une limite en $+\infty$? La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a-t-elle une limite ? Le cas échéant, comparer ces limites.

– II – Généralités

1. (a) Rappeler la définition de la convergence d'une suite.
   (b) Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente de limite x et f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
      i. Montrer que la suite $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers x.
      ii. Montrer que la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.
   (c) On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si cette suite converge vers ℓ, alors on a $f(\ell) = \ell$.
   (d) Pouvez-vous donner un exemple de fonction f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers un certain réel ℓ, et $f(\ell) \neq \ell$?
2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si f est croissante, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

– III – Suites arithmético-géométriques

On se donne deux réels a, b, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = au_n + b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, sa limite ℓ est telle que $\ell = a\ell + b$.

2. On suppose que $a = 1$. Exprimer u_n en fonction de u_0, n et b, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On suppose que $a \neq 1$.
   (a) Déterminer ℓ tel que $\ell = a\ell + b$.
   (b) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique. On précisera sa raison.
   (c) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de u_0, n, a et b.
   (d) Pour quelles valeurs de a et b la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

– IV – Retour sur $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$

On se donne $a \geq -1$ et, comme dans la partie **I**, on souhaite définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f_1(u_n) = \sqrt{1+u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et l'étudier.

1. Montrer par récurrence que tous les termes u_n sont bien définis, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. On souhaite étudier la monotonie et la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (a) Dresser le tableau de signe de la fonction $g_1 : x \mapsto f_1(x) - x$.
   (b) Représenter dans un même repère le graphe de f_1 et celui de $x \mapsto x$. Construire sur ce dessin les termes u_0, u_1 et u_2 d'une part pour $a = 3$, d'autre part pour $a = 1$.
   (c) Déduire de (2a) que :
      i. lorsque $a \geq \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, on a $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$;
      ii. lorsque $a < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, on a $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \geq u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

– V – $u_{n+1} = (u_n - 1)^3$

Pour cette partie, on définit f_5 et g_5, les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ données par $f_5(x) = (x-1)^3$ et $g_5(x) = f_5(x) - x$.

1. Étudier les variations de f_5. En déduire que pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donnée par ce premier terme et par la relation $u_{n+1} = f_5(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, est bien définie et monotone.
2. Montrer qu'il existe un unique $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $g_5(\ell) = 0$, et dresser un tableau de signe de g_5. Donner une valeur de ℓ au dixième.
3. Dans cette question, on suppose que $u_0 < \ell$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) Représenter dans un même repère le graphe de f_5 et celui de $x \mapsto x$. Construire sur ce dessin les quatre premiers termes de la suite dans le cas où $u_0 = 2$.
   (c) En raisonnant par l'absurde, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée.
   (d) Conclure quant au comportement de u_n quand n tend vers $+\infty$.
4. Etudier le comportement de u_n quand n tend vers $+\infty$ dans les cas $u_0 = \ell$ et $u_0 > \ell$

– VI – Pour finir : convergence de l'algorithme babylonien

On se donne un réel $a > 0$ et on considère les fonctions f_6 et g_6 définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_6(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$ et $g_6(x) = f_6(x) - x$. Étant donné un réel u_0 strictement positif, on souhaite étudier la suite définie par $u_{n+1} = f_6(u_n)$ pour tout entier naturel n.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Étudier le sens de variation de g_6 et en déduire le signe de g_6.

3. Étudier le sens de variation de f_6. En déduire que si $x > \sqrt{a}$, alors $f(x) > \sqrt{a}$.
4. Dans cette question, on suppose que $u_0 > \sqrt{a}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée.
5. Dans cette question, on suppose que $0 < u_0 < \sqrt{a}$. Étudier le comportement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Mettons en œuvre un algorithme de cette méthode de Babylone.
   (a) Montrer que si $|u_n^2 - 7| \leq 2 \times 10^{-6}$, alors $|u_n - \sqrt{7}| \leq 10^{-6}$.
   (b) Compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule une valeur approchée de $\sqrt{7}$ à 10^{-6} et le rang du terme de la suite correspondant.

```
U ← 1
N ← 0
Tant que ..................................................
        U ← ..................................................
        N ← ..................................................
Fin Tant que
```

Pour aller plus loin...

– **VII** – $u_{n+1} = u_n\,(1 - u_n)$

– **VIII** – $u_{n+1} = e^{-u_n}$

– **IX** – $u_{n+1} = e^{-\pi u_n}$

5.2 Coniques

Coniques

Le but de ce problème est d'étudier une famille de courbes : les *ellipses*. Elles interviennent dans la description du mouvement des planètes par les lois de Kepler. Ce sont, d'une certaine façon, des cercles «étirés dans une direction». Nous allons voir plusieurs manières de les définir. Elles font partie d'une famille de courbe plus vaste, les *coniques*, qui englobent aussi les *paraboles* et les *hyperboles* (et aussi quelques droites ou paires de droites, comme cas dégénérés), dont les Grecs de l'Antiquité avaient remarqué qu'on les obtenait par section d'un cône.

Dans tout le problème, on se donne $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, un repère orthonormé direct du plan.

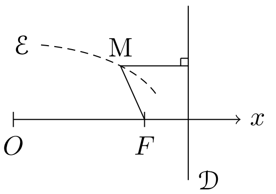
On rappelle que si D est une droite donnée, et M un point quelconque, la distance $d(M, D)$ de M à D est égale à la longueur du segment $[MH]$, où H est le projeté orthogonal de M sur D.

1. Soient x, y deux réels tels que $x^2 + y^2 = 1$. Montrer qu'il existe un unique réel θ dans $[0, 2\pi[$ tel que $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$ (on pourra se souvenir de la définition géométrique de sinus et cosinus).
2. Soit $\mathcal{C} = \{M(x;y) \mid (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4\}$. Donner une représentation graphique de l'ensemble $\mathcal{C}$. Montrer qu'un point $M(x;y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si, et seulement si, il existe un unique réel θ dans $[0, 2\pi[$ tel que $x = 1 + 2\cos(\theta)$ et $y = 2 + 2\sin(\theta)$.
3. Soit $\mathcal{E} = \left\{M(x;y) \mid \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1\right\}$.
   (a) Montrer qu'un point $M(x;y)$ appartient à $\mathcal{E}$ si, et seulement si, il existe un unique réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $x = 2\cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$.
   (b) Montrer que pour tout point $M(x;y)$ dans $\mathcal{E}$, on a $-2 \leq x \leq 2$ et $-1 \leq y \leq 1$, et que, de plus, les points de coordonnées $(-x, y)$, $(x, -y)$ et $(-x, -y)$ appartiennent à $\mathcal{E}$. En déduire que $\mathcal{E}$ admet deux axes de symétrie (orthogonale) et un centre de symétrie.
   (c) Donner une représentation graphique de l'ensemble $\mathcal{E}$.

(d) On va montrer qu'il existe un point F, une droite $\mathcal{D}$ et un nombre $e \in]0,1[$ tels que $\mathcal{E}$ soit l'ensemble des points M vérifiant l'équation (donnée par "foyer et directrice")

$$\text{(F \& D)} \qquad MF = e\ d(M, \mathcal{D}).$$

Alors, F est appelé un *foyer* de $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$ la *directrice* associée, et e est l'*excentricité* de $\mathcal{E}$. On cherchera F et $\mathcal{D}$ sous la forme $F(x_F; 0)$ et $\mathcal{D} = \{M(x; y) \mid x = \delta\}$, pour des valeurs x_F, $\delta > 0$ à déterminer.



Anim. GeoGebra possible...

i. On rappelle que, pour $M(x; y)$, on a $d(M, \mathcal{D}) = |x - \delta|$. Montrer qu'un point $M(x; y)$ vérifie (F & D) si et seulement si il vérifie l'équation polynomiale

$$\text{(P)} \qquad (1 - e^2)x^2 + 2(\delta e^2 - x_F)x + y^2 = e^2\delta^2 - x_F^2.$$

ii. Déterminer des valeurs e, x_F et δ telles que $\mathcal{E}$ soit l'ensemble des points M vérifiant (F & D).

Remarque : on constate que $\mathcal{E}$ est aussi représentée par l'équation

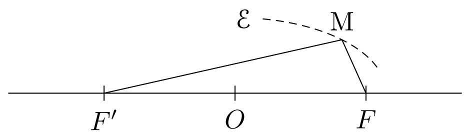
$$\text{(F' \& D')} \qquad MF' = e\ d(M, \mathcal{D}'),$$

pour $F'(-x_F; 0)$ et $\mathcal{D}' = \{M(x; y) \mid x = -\delta\}$.

(e) On va montrer ici que $\mathcal{E}$ est aussi la solution du "problème du jardinier", c'est-à-dire que

$$\mathcal{E} = \{M \mid MF + MF' = 4\},$$

avec F et F' les foyers déterminés ci-dessus. La longueur de la "corde du jardinier" est ici 4.



i. En remarquant l'inégalité $\delta > 2$, montrer que, si M vérifie (F & D) et (F' & D'), alors $MF + MF' = 2e\delta$. Noter que $2e\delta = 4$.

ii. Pour tout $M(x; y)$, calculer $MF^2 - MF'^2$ (en fonction de x seul, la valeur de x_F étant connue). Lorsque M vérifie $MF + MF' = 4$, en déduire une expression de $MF - MF'$, puis de MF, et en conclure que M vérifie (F & D).

4. Intermède : changement de repère. On considère deux vecteurs unitaires $\vec{I}$ et $\vec{J}$ faisant avec $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ un angle donné $(\vec{\imath}, \vec{I}) = (\vec{\jmath}, \vec{J}) = \theta$, où θ est un réel donné.

(a) Justifier le fait que $(O, \vec{I}, \vec{J})$ est un repère orthonormé. Une figure sera utile.

(b) Exprimer les vecteurs $\vec{I}, \vec{J}$ en fonction des vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et du réel θ.

(c) Soit M un point du plan. En désignant par (x, y) les coordonnées de ce point dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et par (X, Y) celles dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$, montrer que l'on a $x = X\cos(\theta) - Y\sin(\theta)$ et $y = X\sin(\theta) + Y\cos(\theta)$.

5. Soit $\mathcal{F} = \{M(x; y) \mid 3x^2 - 4xy + 3y^2 + 6x - 4y - 2 = 0\}$.

(a) Si un point un point M a pour coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, et (X, Y) dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ de la question précédente, calculer $x^2 + y^2$ et xy en fonction de X, Y et θ. En déduire une équation satisfaite par les coordonnées (X, Y) d'un point M de $\mathcal{F}$ dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$.

(b) Montrer qu'il est possible de trouver un réel θ de sorte que $\mathcal{F}$ admette dans le repère $(O, \vec{I}, \vec{J})$ une équation de la forme

$$X^2 + 5Y^2 + c_1 X + c_2 Y + c_3 = 0,$$

où c_1, c_2, c_3 sont des réels à déterminer.

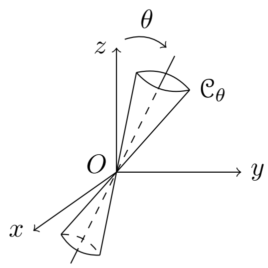
(c) Déterminer a, b, α, β tels que $\mathcal{F}$ soit décrit par l'équation $\dfrac{(X-\alpha)^2}{a^2} + \dfrac{(Y-\beta)^2}{b^2} = 1$.

(d) Donner une représentation graphique de l'ensemble $\mathcal{F}$ en faisant apparaître son centre de symétrie.

6. Dans l'espace à trois dimensions, muni d'un repère ortonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, l'équation $z^2 = x^2 + y^2$ définit un cône de sommet O : si $M(x;y;z)$ appartient à cet ensemble, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $M_\lambda(\lambda x; \lambda y; \lambda z)$ aussi.

Ce cône admet l'axe (Oz) comme axe "de révolution", c'est-à-dire que le cône est inchangé si on le fait "tourner" autour de cet axe. Si on "penche" l'axe de révolution dans le plan (Oyz) d'un angle θ, le cône penché obtenu $\mathcal{C}_\theta$ a pour équation :

$$\cos(2\theta) z^2 + 2\sin(2\theta) yz = x^2 + \cos(2\theta) y^2.$$



Dans chacun des cas suivants, donner une équation décrivant l'intersection du cône $\mathcal{C}_\theta$ avec le plan horizontal d'équation $z = 1$, et donner une représentation graphique de cette intersection :

(a) $\theta = 0$; On voit ainsi qu'on a un cône à base circulaire.

(b) $\theta = \pi/8$;

(c) $\theta = \pi/4$;

(d) $\theta = \pi/2$. Visualiser $y^2 - x^2 = 1$ avec un logiciel ?

Remarque : Avec GeoGebra, on peut visualiser l'intersection du cône $\{z^2 = x^2 + y^2\}$ avec les plans $z = cx + 1$, c curseur variant de 0.1 en 0.1 entre -2 et 2 : on passe par les types ellipse (dont cercle), parabole ($y = x^2$) et hyperbole ($xy = 1$)...

5.3 Séries

Sur les séries.

Dans ce problème, on va sommer des nombres en grande quantité. On sait bien que, si on ajoute n fois le nombre 1 à lui-même, on obtient un résultat de plus en plus grand, qui tend vers l'infini lorsque n tend vers l'infini. Mais, si l'on est face à un mur, et que l'on avance de la moitié de la distance nous séparant du mur, on va pouvoir recommencer autant de fois que l'on voudra, sans jamais avoir avancé au total de la distance qui nous séparait du mur au départ ; cette expérience est proche du « paradoxe d'Achille et la tortue ».

On rappelle que, si on se donne N nombres réels $a_1, a_2, \ldots a_N$, on note $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + \cdots + a_N$.

1 Sommes géométriques

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que pour tout entier naturel N,

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N} x^n = 1 - x^{N+1}.$$

2. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $S_N = \sum_{n=0}^{N} x^n$. Montrer, lorsque $|x| < 1$, la convergence de la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ (et calculer sa limite). Quel est le comportement (quand n tend vers l'infini) de $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ lorsque $x > 1$? et lorsque $x < -1$? Étudier également la convergence de $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ lorsque $x = 1$ et lorsque $x = -1$.

2 Convergence

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels.

Définition. *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, la somme $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ est appelée* somme partielle d'ordre N *(des termes u_n). Étudier la* série de terme général u_n*, qu'on note de façon abrégée $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, c'est étudier la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$. Si cette suite converge, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sa limite ; on dit alors que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$* converge*, et a pour* somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$*. Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$* diverge.

1. Montrer que, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, alors u_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini (on pourra noter que $u_n = S_n - S_{n-1}$).
   Remarque : on montrera plus loin que la réciproque fausse.
2. Un exemple : la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{N+1}$. Remarque : à cause des compensations apparaissant dans ce calcul, on dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$, est une « série télescopique ».
   (c) En déduire la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n(n+1)}$, et calculer sa somme.
3. On considère dans cette question une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ dont le terme général u_n a un signe « alterné » : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n a_n$ (avec $(-1)^0 = 1$), pour une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs. On supposera de plus que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et tend vers zéro.
   (a) Montrer que la suite $(S_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante, et que la suite $(S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S_{2k+1} \leq S_{2k}$. Déduire de cette inégalité (et de (a)) que la suite $(S_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée (par S_0). En déduire que la suite $(S_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ converge ; on note ℓ sa limite.
   (c) Montrer de même que la suite $(S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel ℓ'.
   (d) Montrer que $\ell' = \ell$.
   (e) Montrer que la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, c'est-à-dire : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_0 \in\in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $N \geq N_0$ implique $S_N \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.
   (f) Un exemple : montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.

3 Séries à termes positifs

1. Montrer qu'une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est bornée.
2. (a) On montre ici un « critère de comparaison ». On considère deux séries à termes positifs, $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$. Montrer que si $0 \leq a_n \leq b_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ converge aussi.

   (b) Deux exemples :

      i. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n}$ converge (on pourra se référer à la partie « Sommes géométriques »). En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} e^{-n^2}$ converge (on notera qu'il y a une inégalité entre n et n^2, pour tout $n \in \mathbb{N}$).

      ii. On désigne par a_n la n-ième décimale de π. Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{10^n}$ converge. Que vaut sa somme ?
3. *Comparaison série-intégrale.* Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, continue et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$. On va montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ converge si et seulement si la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que pour tout $t \in [n, n+1]$, on a $f(n+1) \leq f(t) \leq f(n)$. En déduire qu'on a : $f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n)$. Interpréter ces inégalités géométriquement, en termes d'aires (on pourra faire un dessin).

   (b) Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^{N} f(n) \leq f(0) + I_N$. En déduire que si la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ converge.

   (c) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $I_N \leq \sum_{n=0}^{N-1} f(n)$. En déduire que si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n)$ converge, alors la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
4. On applique ici la méthode de comparaison série-intégrale pour étudier les *séries de Riemann*, c'est-à-dire les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$, lorsque $\alpha > 0$. On se contentera ici de valeurs entières de α (ou de $\alpha = 1/2$, qui correspond à la racine carrée), même si on pourrait généraliser aux valeurs réelles quelconques.

   (a) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ (appelée *série harmonique*) diverge.

   (b) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

   (c) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2}$ converge.

   (d) Montrer que pour $\alpha \geq 3$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

   Remarque : on a ainsi des exemples de séries divergentes dont le terme général tend vers zéro. On pourra aussi noter que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge (par le « critère des séries alternées » de la question 3), même si son terme général tend vers zéro moins vite que celui de la série harmonique (divergente).

4 Un résultat amusant

On se propose de montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}=\ln(2)$. Pour tout entier $n\geq 1$ et tout réel x, on note :

$$f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k.$$

1. Montrer que pour tout entier $n\geq 1$ et pour tout $x\in[0,1]$, $\quad f_n(x)=\dfrac{1+(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$.
2. En déduire que, pour tout entier $n\geq 1$, on a :
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x+(-1)^n\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x.$$
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. On pourra commencer par justifier que pour tout $x\geq 0$, on a : $\dfrac{x^{n+1}}{1+x}\leq x^{n+1}$.
4. En déduire le résultat annoncé.

5.4 Nombres complexes et géométrie

Cet énoncé doit encore être travaillé...