IREM de Grenoble,
groupe «Liaison lycée-université» (Valence)

Rapport d'activité 2016-2017

DAMIEN ACHARD, AUBRY COLOMBET, BAPTISTE CORDEIL,
ERIC DUMAS, JEAN-ÉTIENNE ROMBALDI

Table des matières

1 Introduction

Nous avons continué cette année l'activité initiée en 2014-2015, suivant la proposition de Christine Kazantsev de «solliciter davantage les élèves de terminale scientifique en leur présentant des exercices plus exigeants que ceux du baccalauréat». Cela s'adresse à des élèves de Terminale S motivé(e)s et plutôt à l'aise avec le programme.

Afin de donner à ces élèves une motivation supplémentaire, un peu de culture, et un avant-goût des maths du supérieur, en manipulant des notions à la limite du programme, nous avons tâché de leur présenter, sous forme de problèmes, des objets à leur portée et/ou de jolis résultats et des méthodes associées.

Dans ce qui suit, nous présentons le travail effectué, en décrivant comment les élèves ont appréhendé ces problèmes. En annexe, on fournit les sujets et des éléments de correction (à destination des enseignantes et enseignants) ; sur demande, nous pouvons fournir nos fichiers source (.tex).

2 L'équipe

Le groupe était composé de
- Damien Achard, enseignant au lycée les 3 sources (Bourg-Lès-Valence) : Damien.Achard@ac-grenoble.fr ;
- Aubry Colombet, enseignant au lycée du Dauphiné (Romans-sur-Isère) : Aubry.Colombet@ac-grenoble.fr ;
- Baptiste Cordeil, enseignant au lycée Saint-Victor (Valence) : Baptiste.Cordeil@ac-grenoble.fr ;
- Éric Dumas, enseignant-chercheur à l'Institut Fourier (Université Grenoble Alpes, Grenoble) : Eric.Dumas@univ-grenoble-alpes.fr ;
- Jean-Étienne Rombaldi, enseignant au Centre Drôme-Ardèche (Université Grenoble Alpes, Valence) : Jean-Etienne.Rombaldi@univ-grenoble-alpes.fr.

3 Les thèmes abordés

Nous avons élaboré trois sujets différents, pour (re)venir sur des questions variées.

1. «Les équations polynomiales de degré 3» ; notions abordées :
   - valeurs intermédiaires,
   - nombres complexes (sous forme algébrique),
   - racines des trinômes du second degré à coefficients réels,
   - factorisation de polynômes ($P(X) = (X - \alpha)Q(X)$ si $P(\alpha) = 0$),
   - résolution de systèmes, systèmes équivalents.
2. «Fonctions puissances» (non testé avec les élèves) ; notions abordées :
   - valeurs intermédiaires,
   - notion de fonction réciproque,
   - monotonie.
3. «Irrationalité de e» ; notions abordées :
   - intégration par parties,
   - suites adjacentes,
   - raisonnement par l'absurde,
   - approche des séries.

4 Le mode opératoire

Lycée les 3 sources : chaque problème a été abordé pendant 2 ou 3 heures (1 heure hebdomadaire) dans le cadre de l'accompagnement personnalisé avec un groupe d'élèves volontaires.

Lycée du Dauphiné : le sujet «Les équations polynomiales de degré 3»a été proposé, sous forme de devoir à la maison, à 6 élèves (le niveau de la classe était assez faible) ; il y a eu 3 retours, plutôt bons. Pour le sujet «Irrationalité de e», proposé à 3 élèves, les parties I et II ont été préparées à la maison, et la partie III traîtée en une heure ensemble (la correction étant effectuée au fur et à mesure au tableau par les élèves, à tour de rôle).

Lycée Saint-Victor : une dizaine d'élèves ont participé, pour un travail de 2 heures, individuel puis collectif, encadré par Stéphane Rossille (enseignant de la classe).

5 L'expérimentation avec les élèves

5.1 Sujet «Les équations polynomiales de degré 3»

Selon Damien Achard (lycée les 3 sources) : «Globalement, les élèves ont apprécié le travail sur les équations du troisième degrè (qui avait été très rapidement abordé lors de l'introduction du chapitre sur les nombres complexes en enseignement général)».

Pour les élèves qui ont davantage travaillé en autonomie, le sujet était assez dur.

Des écueils ; difficultés rencontrées :
• La prise de recul, l'assimilation et la réutilisation des notions nouvelles ne sont pas évidentes : au I 3 (b), oubli de $j^3 = 1$ ($j^3 - 1 = 0$ vu juste avant, c'est $j^3 = 1$!) ; les élèves ont plutôt développé le cube de $1/2 + i\sqrt{3}/2$.
• Les élèves ont parfois eu du mal à réinvestir leurs compétences dans un cadre qui n'est pas un exercice-type : au III 4, peu d'entre elles et eux parviennent à voir le lien entre le système et l'équation à résoudre.
• Il est aussi difficile de se détacher de «formules magiques» et de se plier à la règle du jeu : au I 3 (a), construire la racine cubique (et ne pas considérer que c'est seulement le résultat numérique donné par la calculatrice).
• On a mis en évidence le besoin d'affiner la compréhension de certaines notions/de certains énoncés : au II 1, valeurs intermédiaires (*versus* «théorème de la bijection»).

Des satisfactions :
• Au II 3, idée de la factorisation dans $P(x) - P(\alpha)$ plutôt que du développement de $(x-\alpha)(x^2 + bx + c)$ et de l'identification, quand on a une racine α de $P(x) = x^3 + px + q$.
• Au III 4, chercher une solution sous la forme d'une somme est une première pour tou(te)s.
• Aux III 5 et III 6, Des solutions correctes sont proposées, même si elles ne sont pas les plus efficaces.
• Au III 8, un élève trouve avec un peu d'aide à l'oral.

5.2 Sujet «Fonctions puissances»

Notre idée de départ était de montrer de nouvelles «fonctions usuelles». Mais après son élaboration, ce sujet nous a paru un peu trop difficile, voire aride, en particulier à cause des manipulation algébriques (telles que la vérification de $(x^{1/q})^p = (x^p)^{1/q}$), et de l'absence d'un résultat marquant. Peut-être que nous le modifierons, plus tard.

5.3 Sujet «Irrationalité de e»

Succintement :
Difficultés :
• La manipulation formelle des conditions sur les suites adjacentes.
• La négation de «pour tout entier naturel n, $u_n < v_n$».
• Les inégalités faisant intervenir la valeur absolue (comme tout le monde, les élèves se débrouillent mieux avec des doubles inégalités).

Satisfactions :
• L'intégration par parties n'a pas posé de problème.
• Étonnement de pouvoir écrire e comme une somme infinie de nombres rationnels.
• Enthousiasme devant l'argument final donnant une contradiction par l'encadrement strict d'un entier entre deux entiers consécutifs.

6 Annexe : les sujets

6.1 Équations polynomiales de degré 3

6.1.1 Énoncé

Les équations polynomiales de degré 3

Le but de ce problème est de résoudre une équation polynomiale de degré 3 de la forme

$$x^3 + px + q = 0, \tag{1}$$

avec p et q des nombres réels donnés (et x l'inconnue).

Nous allons justifier l'existence d'une solution réelle, puis de deux autres, éventuellement complexes, comme racines d'un trinôme du second degré. Nous montrerons que (1) a exactement trois solutions complexes. Ensuite, dans le cas particulier $p > 0$, pour lequel une seule des solutions est réelle, nous répondrons à une question historique, qui était de savoir donner une expression de cette solution ≪ par radicaux ≫ en fonction des coefficients (inutile pour l'instant de savoir ce que cela signifie ; cela sera clarifié par les remarques à la fin de ce texte, à lire plus tard).

Notez bien : Pour tout ce qui suit, on fixe deux réels p et q.

– I – Les équations $x^3 + q = 0$

Pour cette partie, on suppose que $p = 0$. L'équation (1) s'écrit donc

$$x^3 + q = 0. \tag{2}$$

1. Justifier que pour tout nombre complexe x,

$$x^3 - 1 = (x - 1)\left(x^2 + x + 1\right).$$

2. Donner les racines complexes de l'équation $x^3 - 1 = 0$.
   On peut constater qu'il y a une seule racine réelle et deux racines complexes conjuguées que l'on notera j et $\bar{\jmath}$, la solution j étant celle de partie imaginaire strictement positive.
3. (a) Justifier l'existence d'une unique solution réelle de l'équation (2).
   Cette solution est notée $\sqrt[3]{-q}$ et on dit que c'est la racine cubique réelle de $-q$.

   (b) Montrer que $j\sqrt[3]{-q}$ et $\bar{\jmath}\sqrt[3]{-q}$ sont aussi solutions de l'équation (2).

Nous avons donc montré que, pour $q \neq 0$, l'équation (2) a une solution réelle et deux solutions complexes conjuguées non réelles. Dans ce qui suit, nous montrons que ce sont les seules solutions, et nous généralisons au cas $p \neq 0$.

– II – Les équations $x^3 + px + q = 0$, **pour** p, q **réels**

1. Montrer que l'équation (1) a au moins une solution réelle que l'on notera α.
2. Montrer que, pour tous nombres complexes a, b, on a :

$$a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right).$$

3. Montrer qu'il existe des nombres réels b et c tels que, pour tout nombre complexe x, on ait :

$$x^3 + px + q = (x - \alpha)\left(x^2 + bx + c\right),$$

   α étant défini en **II.1.**
4. En déduire que l'équation (1) a soit 3 racines réelles distinctes ou confondues, soit une seule racine réelle et deux racines complexes non réelles conjuguées.

– III – Les équations $x^3 + px + q = 0$ avec $p > 0$ et q réel

Pour cette partie, **on suppose** $p > 0$.

1. Montrer que l'équation (1) a une unique solution réelle que l'on notera α.
2. Développer $(u+v)^3$, pour u, v nombres réels.
3. Montrer que, pour tous nombres réels u, v, on a :

$$(u+v)^3 - 3uv\,(u+v) - \left(u^3 + v^3\right) = 0.$$

4. Cela nous conduit à chercher la solution réelle de (1) sous la forme $\alpha = u + v$, le couple de nombres réels (u, v) étant solution du système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ 3uv = -p. \end{cases} \tag{3}$$

Justifier qu'effectivement, si (u, v) vérifie (3), alors $u + v$ est solution de (1).

5. Montrer que si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ est solution de (3), alors le couple $\left(u^3, v^3\right)$ vérifie :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3 v^3 = -\dfrac{p^3}{27}. \end{cases} \tag{4}$$

6. Montrer que si le couple (u^3, v^3) vérifie (4), alors u^3 est solution de l'équation de degré 2 :

$$X^2 + qX - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{5}$$

Donner l'expression des deux solutions de cette équation, dont on notera $\delta = \dfrac{4p^3 + 27q^2}{27}$ le discriminant.

7. En désignant par w la racine cubique réelle de $\dfrac{-q + \sqrt{\delta}}{2}$, montrer que $\left(w, -\dfrac{p}{3w}\right)$ est une solution de (3), ce qui donne la solution réelle de (1), à savoir $\alpha = w - \dfrac{p}{3w}$ [1].
8. Comment trouver les deux racines complexes de (1) ?
9. Appliquer ce qui précède à l'équation polynomiale $x^3 + 3x + 1 = 0$.

Remarques :

1. L'idée de chercher x sous la forme d'une somme, $x = u + v$, est souvent attribuée à Tartaglia [2]. Elle permet de « se donner du jeu » en travaillant avec deux inconnues (u et v) au lieu d'une, et d'ajouter une relation entre ces deux inconnues pour obtenir un problème plus simple (du second degré !).
2. On peut reprendre cette étude dans le cas $p < 0$ (où on constate que le nombre de solutions réelles de (1) est fonction du signe du discriminant δ ci-dessus), et aussi dans le cas de p et q complexes.
3. On ramène facilement l'étude des solutions de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ à ce qui précède en éliminant le terme x^2, par le changement de variable $x' = x - \lambda$, avec λ choisi judicieusement.
4. En procédant de façon analogue, on peut également résoudre « par radicaux » les équations polynomiales de degré quatre. Par contre, il a été prouvé qu'à partir du degré cinq, une telle résolution par radicaux n'est pas possible : c'est une conséquence de la « théorie de Galois » [3].

1. C'est cette écriture qu'on appelle « par radicaux », car α est écrit au moyen de sommes, produits, quotients et racines (carrées et cubiques, ici ; plus généralement, « racines n-ièmes », avec n entier) des coefficients du polynôme.
2. La paternité de la méthode n'est pas facile à établir ; on a un aperçu de la controverse historique qui lui est liée sur la page Wikipedia https ://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_de_Cardan.
3. On pourra consulter http ://www.galois.ihp.fr/ressources/vie-et-oeuvre-de-galois/les-mathematiques-de-galois/resolution-des-equations-algebriques-de-degre-3-et-4/.

6.1.2 Éléments de correction

Partie I.

1. En développant $(x-1)(x^2+x+1)$, on note le télescopage des termes.
2. Grâce à la factorisation précédente (le produit étant nul si et seulement si l'un des termes l'est), on obtient les racines de $x^3-1=0$: 1, et les deux zéros du polynôme x^2+x+1, $j=(-1+i\sqrt{3})/2$ et $\bar{j}=(-1-i\sqrt{3})/2$.
3. (a) On justifie que la fonction $f : x \mapsto x^3+q$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, car de dérivée positive, s'annulant au plus en un point. Cela assure l'unicité de l'éventuel zéro de f. Son existence est assurée par le théorème des valeurs intermédiaires, les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$ étant $+\infty$ et $-\infty$.

   (b) Par définition, on a $(\sqrt[3]{-q})^3=-q$, et (d'après la question 2) $j^3=1$. On en déduit que $(j\sqrt[3]{-q})^3=j^3(\sqrt[3]{-q})^3=-q$. De même pour $(\bar{j}\sqrt[3]{-q})^3$.

Partie II.

1. On obtient que l'équation (1) a au moins une solution réelle α à nouveau par le théorème des valeurs intermédiaires.
2. Comme à la question I 1, on peut simplement développer $(a-b)(a^2+ab+b^2)$ pour trouver a^3-b^3.
3. Pour tout nombre complexe x, on a $(x-\alpha)(x^2+bx+c)=x^3+(b-\alpha)x^2+(c-b\alpha)x-c\alpha$. On choisit alors $b=\alpha$ et $c=\alpha^2+p$, si bien que $c\alpha=\alpha^3+p\alpha$, et donc $c\alpha=-q$, par définition de α. On peut aussi factoriser «directement» (grâce au résultat de I 1) : $x^3+px+q=(x^3+px+q)-(\alpha^3+p\alpha+q)=(x^3-\alpha^3)+p(x-\alpha)=(x-\alpha)(x^2+\alpha x+\alpha^2+p)$.
4. On identifie les racines de $x^3+px+q=0$ comme à la question I 2.

Partie III.

1. Avec $p>0$, la dérivée de la fonction $x\mapsto x^3+px+q$ est partout strictement positive, d'où l'unicité du zéro α de cette fonction (l'existence ayant été prouvée dans la partie II).
2. On a bien sûr $(u+v)^3=u^3+3u^2v+3uv^2+v^3$.
3. On obtient $(u+v)^3-3uv(u+v)-(u^3+v^3)=0$ en factorisant $3uv$ dans le terme $3u^2v+3uv^2$ ci-dessus.
4. Il suffit de substituer les valeurs choisies de uv et de u^3+v^3 dans la relation qu'on vient d'obtenir pour qu'elle s'écrive $(u+v)^3+p(u+v)+q=0$.
5. L'implication est immédiate.
6. Supposons que le couple (u^3,v^3) vérifie (4). Comme p n'est pas nul, par la deuxième équation du système, ni u ni v ne le sont, et on a $v^3=-p^3/(27u^3)$. La première équation se lit alors $u^3-p^3/(27u^3)-q=0$, ou $(u^3)^2-qu^3-p^3/27=0$.

   Notant que le discriminant $\delta=(4p^3+27q^2)/27$ du polynôme $X^2+qX-p^3/27$ est strictement positif, on a deux racines réelles pour ce polynôme, $(-q+\sqrt{\delta})/2$ et $(-q-\sqrt{\delta})/2$.
7. On choisit pour u la racine cubique réelle de $(-q+\sqrt{\delta})/2$, notée w, et on choisit $v=-p/(3w)$. La deuxième équation de 3 est ainsi satisfaite. La première également, car alors, $u^3+v^3=w^3-p^3/(27w^3)$ est égal à q par la question précédente (et la définition de w).
8. On obtient les autres racines de $x^3+px+q=0$, d'après la partie II, comme racines du polynôme $X^2+\alpha X+\alpha^2+p$.
9. Lorsque $p=3$ et $q=1$, on trouve $\delta=5$, donc $w=\sqrt[3]{(-1+\sqrt{5})/2}$, et $\alpha=\sqrt[3]{(-1+\sqrt{5})/2}-\sqrt[3]{2/(-1+\sqrt{5})}$.

6.2 Fonctions puissances

6.2.1 Énoncé

Fonctions puissances

Pour tous $x > 0$ et $n \in \mathbb{Z}^*$, on sait définir la puissance n-ième de x, notée x^n. On va étendre cette définition au cas de puissances réelles quelconques (et définir par exemple $3^{\sqrt{2}}$), puis étudier les fonctions ainsi obtenues.

On rappelle que pour tous $x, y > 0$ et $m, n \in \mathbb{Z}^*$, on a :

$$(x^m)^n = x^{mn}, \quad x^{m+n} = x^m x^n, \quad (xy)^n = x^n y^n.$$

Un peu de vocabulaire : si f est une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B, et si g est une fonction de B vers A, on dit que g est la *fonction réciproque* de f si :
- pour tout a dans A, $g(f(a)) = a$, et
- pour tout b dans B, $f(g(b)) = b$.

On notera que dans ce cas, f est également la fonction réciproque de g.

Partie I

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et P_n la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\forall x \geq 0, \quad P_n(x) = x^n.$$

   (a) Montrer que P_n est strictement croissante.
   (b) Calculer les limites de P_n aux bornes de son domaine de définition.
   (c) En déduire, pour tout réel $y \geq 0$, il existe un unique réel $x \geq 0$ tel que $y = x^n$. On note $x = y^{1/n}$.
   (d) Montrer que la fonction $P_{1/n} : y \mapsto y^{1/n}$, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, est la fonction réciproque de P_n (pour tout $y \geq 0$, la relation $P_n(P_{1/n}(y)) = y$ découle de la définition de $y^{1/n}\ldots$).

2. Pour p, q dans $\mathbb{N}^*$ et $x \geq 0$, on pose $x^{p/q} = \left(x^{1/q}\right)^p$. On aurait aussi pu le définir comme $(x^p)^{1/q}$.
   Vérifier que cela revient au même (on pourra calculer $((x^{1/q})^p)^q$).

Remarque : Dans le cas où n est impair, la fonction P_n et sa réciproque $P_{1/n}$ peuvent être définies sur $\mathbb{R}$ entier. Expliquer pourquoi. Peut-on faire de même lorsque $n = 2$?

Partie II

Pour tout réel α, on définit la fonction P_α de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\forall x > 0, \quad P_\alpha(x) = e^{\alpha \ln(x)}.$$

1. Montrer que pour $\alpha = p/q$ avec p, q dans $\mathbb{N}^*$, et pour tout $x > 0$, on a $P_\alpha(x) = x^\alpha$.
   Pour α réel quelconque, et $x > 0$, on notera x^α pour $P_\alpha(x)$.
2. Montrer que pour tous réels α, β et tout $x > 0$, on a $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ et $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.
3. En déduire que pour tous α réel non nul et $x > 0$, on a

$$x^{-\alpha} = 1/x^\alpha \quad \text{et} \quad (x^{1/\alpha})^\alpha = (x^\alpha)^{1/\alpha} = x.$$

   La fonction $P_{1/\alpha}$ est donc la fonction réciproque de P_α.
4. Calculer les deux premières dérivées de la fonction P_α pour tout réel α. On vérifiera que
   - pour $\alpha \in]0, 1[$, on a $P''_\alpha(x) < 0$ pour tout $x > 0$;
   - pour $\alpha > 1$ ou $\alpha < 0$, on a $P''_\alpha(x) > 0$ pour tout $x > 0$.
5. Dans chacun des cas $\alpha < 0$, $\alpha \in]0, 1[$ et $\alpha \geq 1$, étudier les variations de la fonction P_α, en précisant les limites aux bornes de l'intervalle de définition. Noter que $P_\alpha(1) = 1$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Sur un même graphique, tracer la courbe représentative de P_α pour les valeurs suivantes de α : $-1/2, 0, 1/2, 1$ et $3/2$. Faire figurer sur le dessin les tangentes ou asymptotes en $x = 0$.

Partie III

Dans cette partie, on fixe $x > 0$ et on fait varier l'exposant $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la fonction $\alpha \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée.

2. Dans les deux cas $x \in]0,1[$ et $x > 1$, étudier les variations de la fonction $\alpha \mapsto x^\alpha$ et préciser ses limites lorsque α tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.
   Remarque : Pour l'étude des variations, on n'avait pas besoin de dériver la fonction…
3. Ajouter au graphique précédent la courbe représentative de P_α pour $\alpha = \sqrt{2}$.

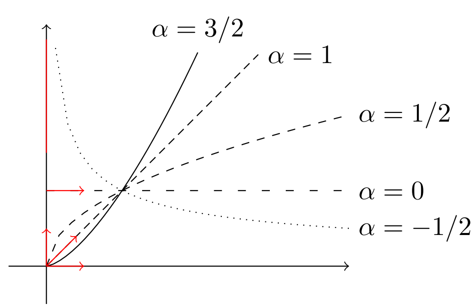
6.2.2 Éléments de correction

Partie I

1. (a) La dérivée de P_n est positive, et ne s'annule qu'en zéro.
   (b) On a $P_n(0) = 0$, et $P_n(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) On obtient l'existence de x par théorème des valeurs intermédiaires, et l'unicité est due à la stricte monotonie de P_n.
   (d) On a ainsi défini une fonction $(y \mapsto x)$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, qu'on note $P_{1/n}$ la construction fait que pour tout $y \geq 0$, $P_n(P_{1/n}(y)) = y$. Mais par ailleurs, pour tout $x \geq 0$, x est un réel positif dont la puissance n-ième vaut $x^n = P_n(x)$, donc on a : $x = P_{1/n}(P_n(x))$.
2. Pour tout $x \geq 0$, on a $((x^{1/q})^p)^q = (x^{1/q})^{pq} = (x^{1/q})^{qp} = ((x^{1/q})^q)^p = x^p$, donc $(x^{1/q})^p = P_{1/q}(x^p)$, c'est-à-dire $(x^{1/q})^p = (x^p)^{1/q}$.

Partie II

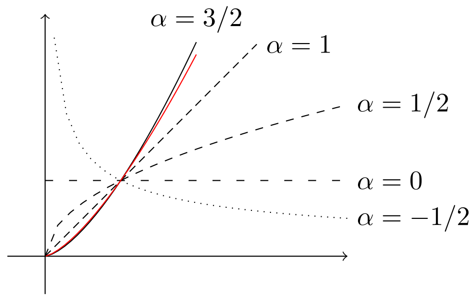
1. D'après la question I 2, $x^{p/q} = (x^p)^{1/q}$ est l'unique réel positif qui, élevé à la puissance q, donne x^p. Or, $P_{p/q}(x)^p = (e^{p\ln(x)/q})^q = e^{p\ln(x)} = x^p$. Donc pour $\alpha = p/q$, $P_\alpha(x) = x^\alpha$.
2. La formule $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ provient du fait que ≪l'exponentielle d'une somme est le produit des exponentielles≫. Pour la deuxième formule, on calcule : $(x^\alpha)^\beta = e^{\beta\ln(x^\alpha)} = e^{\beta\ln(e^{\alpha\ln(x)})} = e^{\alpha\beta\ln(x)} = x^{\alpha\beta}$.
3. On applique la première formule avec $\beta = -\alpha$, ce qui donne : $x^\alpha x^{-\alpha} = x^0 = 1$, donc $x^{-\alpha} = 1/x^\alpha$. Appliquant la deuxième formule avec $\beta = 1/\alpha$, on obtient $P_{1/\alpha}(P_\alpha(x)) = x$, et on conclut en remplaçant α par $1/\alpha$.
4. On vérifie que $P'_\alpha(x) = \alpha P_{\alpha-1}(x)$, et donc $P''_\alpha(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$. D'où les signes.
5. Cas $\alpha < 0$: La fonction P_α est strictement décroissante, convexe (dérivée croissante), et a pour limites $+\infty$ en 0 et 0 en $+\infty$.
   Cas $\alpha \in]0,1[$: La fonction P_α est strictement croissante, concave, et a pour limites 0 en 0 et $+\infty$ en $+\infty$.
   Cas $\alpha > 1$: La fonction P_α est strictement croissante, convexe, et a pour limites 0 en 0 et $+\infty$ en $+\infty$.



Le graphe de $x \mapsto x^\alpha$ pour différentes valeurs de α,
avec (demi-)tangente ou asymptote en $x = 0$ (rouge).

Partie II

1. Comme $x > 0$ est fixé, la fonction $\alpha \mapsto e^{\alpha \ln(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $\ln(x)e^{\alpha \ln(x)}$.
2. Au choix : on détermine le signe de la dérivée, ou on compose la fonction exp, croissante, avec $\alpha \mapsto \alpha \ln(x)$...
   Pour $x \in]0, 1[$: $\alpha \mapsto e^{\alpha \ln(x)}$ est (strictement) décroissante, de limites $+\infty$ en $-\infty$, et 0 en $+\infty$.
   Pour $x > 1$: $\alpha \mapsto e^{\alpha \ln(x)}$ est (strictement) croissante, de limites 0 en $-\infty$, et $+\infty$ en $+\infty$.
3. Le graphe de $x \mapsto x^{\sqrt{2}}$ est donc «entre» ceux de $x \mapsto x$ et de $x \mapsto x^{3/2}$.



En rouge : le graphe de $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha = \sqrt{2}$.

6.3 Irrationnalité de e

6.3.1 Énoncé

Irrationalité de e

Vous connaissez beaucoup de nombres rationnels : un réel x est dit *rationnel* s'il est de la forme

$$x = \frac{p}{q} \quad \text{pour un certain } p \in \mathbb{Z} \text{ et un certain } q \in \mathbb{N}^*.$$

Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit *irrationnel*. Vous avez peut-être déjà démontré que si un entier naturel n n'est pas le carré d'un entier, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel [4].

Le but de ce problème est, entre autres, de montrer l'irrationalité du nombre $e = \exp(1)$.

– I – Intégration par parties

Afin de calculer les intégrales de certaines fonctions dont on ne peut pas trouver « mentalement » une primitive, on aura recours à l'intégration par parties, que nous allons étudier dans ce paragraphe.

1. Soit $\varphi : [a\ ;\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée φ' continue sur $[a\ ;\ b]$. Justifier que :
$$\int_a^b \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(b) - \varphi(a).$$
2. En utilisant la formule de dérivation d'un produit [5], et en apportant toutes les justifications nécessaires, démontrer le théorème suivant (formule d'intégration par parties) :

   Théorème. *Si u et v sont deux fonctions réelles définies, dérivables et à dérivée continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors :*
$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)'v(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. Ce type de résultat est sans doute au moins aussi ancien que Pythagore : voir https ://fr.wikipedia.org/wiki/Hippase_de_Métaponte.
5. Formule de Leibniz.

On peut noter la formule ci-dessus plus brièvement (sans la variable) :

$$\int_a^b uv' = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b u'v.$$

– II – Suites adjacentes

On dit que les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si l'une est croissante, l'autre décroissante, et si la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes. On supposera que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

1. Étudier les variations de la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer qu'on a : pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$.
3. En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq \ell \leq v_n.$$

– III – Irrationalité de e

Le nombre e est par définition $e = \exp(1)$. Nous allons montrer que e est irrationnel grâce à une méthode due à Nicolas Dominique Marie Janot de Stainville [6].

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \,\mathrm{d}x$.

1. Calculer la valeur de r_0.
2. En effectuant une intégration par parties, calculer la valeur de r_1.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + r_{n+1}.$$

4. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + r_n.$$

5. (a) Montrer que pour tout $\in \mathbb{N}$, $0 \leq r_n \leq \dfrac{e}{n!}$. En déduire que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   (b) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

   Montrer que u_n tend vers e lorsque n tend vers l'infini.

   (c) On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

   Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

6. En raisonnant par l'absurde, on se propose de montrer que le nombre e est irrationnel. Pour ce faire, on suppose qu'il existe deux entiers naturels non nuls p, q premiers entre eux tels que $e = \dfrac{p}{q}$.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n < e < v_n.$$

   (b) En déduire que :

$$q!\, u_q < q!\, e < q!\, u_q + \frac{1}{q}.$$

   (c) Mettre en évidence une contradiction et conclure.

6. Au XIXème siècle ; voir http ://bibnum.revues.org/670.

6.3.2 Éléments de correction

Partie I

1. La fonction φ' étant continue sur $[a;b]$, elle admet une primitive, c'est-à-dire une fonction dérivable dont la dérivée est φ'. La fonction φ le vérifie. De plus, pour toute primitive F de φ', on a $\int_a^b \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$. On obtient la formule annoncée en prenant $F = \varphi$.
2. Avec les notations et hypothèses du théorème, on calcule $(uv)' = u'v + uv'$, et on applique la formule précédente avec $\varphi = uv$.

Partie II

1. On calcule simplement $(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = (v_{n+1} - v_n) - (u_{n+1} - u_n)$, négatif car les deux termes le sont. Donc $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Supposons que pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$, on ait $u_{n_0} > v_{n_0}$. Alors, compte tenu de la monotonie, on aura, pour tout $n \geq n_0$: $v_n - u_n \leq v_{n_0} - u_{n_0}$. En passant à la limite (n tendant vers l'infini), on obtient $0 \leq v_{n_0} - u_{n_0}$, qui contredit l'hypothèse. Donc, en fait, $u_n \leq v_n$ pour tout n.
3. Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a, pour tout entier $n \geq 0$, $v_n \leq v_0$. Par l'inégalité de la question précédente, on en déduit : $u_n \leq v_0$ pour tout n. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée. Ainsi, elle converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$. De même, on montre que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, décroissante et minorée, converge vers un certain $\ell' \in \mathbb{R}$. Du fait que $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, on déduit que $\ell' = \ell$.

Partie III

1. Bien sûr, $r_0 = \displaystyle\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = e - 1$.
2. Par intégration par parties, $r_0 = \displaystyle\int_0^1 (1-x)e^x \mathrm{d}x = \big[(1-x)e^x\big]_0^1 + \int_0^1 e^x \mathrm{d}x = 1 + (e-1) = e$.
3. On intègre par parties l'expression définissant r_n pour obtenir la relation $r_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + r_{n+1}$.
4. Partant de $r_0 = \dfrac{1}{1!} + r_1$, grâce à la formule précédente, on a facilement par récurrence : $r_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} + r_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $r_0 = e - 1$, on a la formule annoncée.
5. (a) Pour tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leq 1 - x \leq 1$, et donc $0 \leq (1-x)^n \leq 1$, et $0 \leq (1-x)^n e^x \leq e^x \leq e$ (la fonction exp étant croissante). Utilisant ces inégalités (et la «positivité de l'intégrale») dans la définition de r_n, on a : $0 \leq r_n \leq \displaystyle\int_0^1 e/(n!)\mathrm{d}x = e/(n!)$. Par le «théorème des gendarmes», on en déduit que r_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
   (b) D'après le résultat de la question 4, $u_n = e - r_n$, donc u_n tend vers e lorsque n tend vers l'infini.
   (c) On a facilement : - $v_n - u_n = 1/(n!n)$, qui tend vers 0 ;
   - $u_{n+1} - u_n = 1/(n!) \geq 0$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ;
   - $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{n!n(n+1)}$, donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
6. (a) Par les calculs de la questions précédente, on voit qu'en fait, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ srictement décroissante. Comme elles tendent toutes deux vers e, on en déduit : $u_n < e < v_n$ pour tout n.
   (b) Appliquant cela avec $n = q$ (lorsque $e = p/q$) et multipliant par $q!$, on obtient : $q!u_q < q!e < q!v_q = q!u_q + 1/q$.
   (c) Ayant supposé que $e = p/q$, on obtient que $q!e = (q-1)!p$ est un entier strictement compris entre $q!u_q = \displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{q-1} (k+1)(k+2)\dots q\right) + 1$, entier, et $q!u_q + 1/q \leq q!u_q + 1$: cela est impossible.