Liaison Lycée-Enseignement supérieur : Compléments de cours sous forme de problèmes

Damien Achard
Aubry Collombet
Baptiste Cordeil
Jean-Etienne Rombaldi

2014-2015

Table des matières

Première partie
Rapport d'activités

1 Présentation

L'objectif principal est de montrer aux élèves qui se destinent à des études scientifiques dans le supérieur les exigences mathématiques que l'on attendra d'eux l'année qui suit leur bac. Nous présentons des problèmes qui utilisent des notions à la marge du programme de terminale S. Nous avons élaboré et expérimenté en classe deux problèmes. L'un tournant autour des coefficients du binôme et l'autre autour des suites numériques en direction des séries numériques. Nous avons voulu insister sur une idée qui peut sembler évidente qu'en mathématique on travaille à partir d'axiomes, définitions et théorème le tout avec le maximum de rigueur. Ces exigences de précision et de rigueur sont parfois difficiles à respecter aux vues des notions qui apparaissent dans les programmes : par exemple la notion d'intégrale est difficile à présenter en toute rigueur en partant d'une notion d'aire qui ne peut qu'être intuitive.

Ce groupe de travail a été lancé sur la proposition de Christine Kazantsev qui nous a demandé de « donner à manger » aux élèves de terminale S en leur présentant des exercices plus exigeants que ceux du baccalauréat.

2 Dénombrement, analyse combinatoire et arithmétique

Le point de départ de ce problème est la définition du coefficient binomial qui est introduit en première scientifique avec la notion d'arbre de probabilités : $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins possédant k succès dans un arbre de probabilités représentant un schéma de Bernoulli à n étapes. De notre point de vue, il semble que cette définition ne met pas en évidence l'idée de choisir une partie à k éléments dans un ensemble à n éléments. L'expérience que nous avons dans nos classe révèle qu'avec cette définition la plupart des élèves ne peuvent pas résoudre un problème élémentaire de type « loto ». Bien que limitée, l'expérience révèle également que ce qu'il reste du coefficient binomial est une quantité que l'on évalue en utilisant une calculatrice : $\binom{49}{6}$ ne représente pas le nombre de choix d'un ensemble à 6 éléments parmi 49. Pour preuve les élèves n'ont pas su répondre la question 3.b de l'exercice 1

Le but de l'exercice 1 est de mettre en évidence ce qu'est réellement le coefficient binomial : c'est-à-dire le nombre de parties à p éléments dans un ensemble de cardinal n.

L'objectif est double :
- comparer les deux définitions du coefficient binomial.
- donner un outil relativement performant pour faire du dénombrement.

2.1 Lycée Les 3 Sources

Le problème a été distribué à un groupe de dix élèves volontaires de terminale scientifique de Damien ACHARD du Lycée des 3 sources dans le cadre de l'accompagnement personnalisé. Ces élèves ont des connaissances solides en mathématiques et souhaitent poursuivre des études dans ce domaine.

En quatre séances d'une heure, nous avons traité les deux premières parties du problème. Ce travail s'est fait sous la forme d'une discussion entre les élèves et le professeur, le but étant de leur faire découvrir des notions nouvelles et qui complètent le programme de terminale scientifique.

2.2 Lycée Saint Victor

Le problème a été distribué à un groupe de 14 élèves de terminale scientifique essentiellement, qui suivent des cours de préparation à l'enseignement supérieur le mercredi après-midi, cours dispensé par Baptiste CORDEIL. Il s'agit essentiellement d'élèves qui visent des classes préparatoires aux grandes écoles et qui dès cette année, prennent de l'avance sur le programme de première année dans un cadre hors contrat qui autorise donc entre autres le hors-programme. Ils sont donc pour la plupart très avertis dans la matière et connaissent déjà des notions post-bac. En une séance de deux heures, nous avons traité presque toute la première partie. Les élèves ont été mis en recherche individuelle. Pour la séance, l'enseignant accueillait Aubry COLOMBET, professeur de mathématiques au lycée du Dauphiné. Les deux enseignants observent, et la plupart du temps, volontairement, n'interviennent pas, ceci afin de mesurer précisément ce que les élèves sont à même de produire par eux-mêmes. Les enseignants n'interviennent que très ponctuellement pour débloquer un élève précis à un moment donné. Quelques interventions, pour le groupe entier cette fois, sont faites de temps en temps au tableau.

2.3 Difficultés rencontrées

Pour l'exercice 1, les enseignants ont noté les difficultés suivantes.
Considérer l'ensemble vide comme un sous-ensemble de E n'est pas une évidence.
La question 3.b laisse perplexe bon nombre d'élèves : la plupart des élèves n'ont pas d'avis clair sur la question et quelques rares estiment cette définition cohérente avec celle du problème mais ne savent pas l'expliquer clairement. Sur une copie, un élève indique que, bien que cohérente, la définition de première S n'est pas adaptée à ce problème car nous ne sommes pas en présence d'un schéma de Bernoulli.
A l'issue de cet exercice, les enseignants ont pris soin de faire le lien entre ces définitions en privilégiant l'aspect dénombrement.

L'exercice 2 montre que les élèves ont du mal à utiliser efficacement la nouvelle définition dans un cadre non numérique. Un élève le fait de lui même, les autres ont besoin d'aide pour démarrer. Compléter le triangle de Pascal n'a pas posé de problème (notion déjà vue en première scientifique).

Pour l'exercice 3, il a fallu insister sur la différence entre une liste et un sous-ensemble ainsi que sur la différence entre tirages successifs et simultanés.
A ce stade du problème, les élèves commencent à appréhender le principe du raisonnement combinatoire qui était un des objectifs visés.

L'exercice 4, plus calculatoire, n'a pas posé de réel problème.

L'exercice 5, plus difficile, a nécessité l'intervention des enseignants.

Pour l'exercice 6, 2.b, la manipulation du symbole Σ et la partition en indice pairs et impairs a posé problème pour la plupart des élèves. Le principe a été compris après l'intervention de l'enseignant et il a fallu détailler l'aspect technique.

Pour la dernière séance, sur les exercices 7 et 8, nous avons rencontrés les mêmes problèmes de confusion entre parties ordonnées ou non. L'aide de l'enseignent pour l'aspect technique (symbole $\prod$,...) a été nécessaire et suffisante.

La partie 3 concernant le petit théorème de Fermat n'a pas été traitée.

3 Un calcul de $\zeta(2)$

En utilisant des outils relativement élémentaires, on montre que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Deux des objectifs principaux étaient de présenter deux notions qui ont disparues du programme : les suites adjacentes et l'intégration par parties. Un troisième objectif était de prouver un résultant particulièrement

étonnant qui fait apparaitre le nombre π comme limite d'une suite de nombre rationnels. En outre, ce problème fait intervenir la notion de somme infinie qui mal manipulée amène à des résultats aberrants. Ce problème a été expérimenté au lycée Les trois sources (groupe de 10 élèves de terminales scientifiques de Damien ACHARD).
En quatre séances d'une heure, nous avons traité presque l'intégralité du problème. Les deux premières parties ont été traitées sans difficulté majeure alors que les diverses formules de la partie 3 étaient difficiles à appréhender par les élèves.

La difficulté majeure était le nombre d'étapes nécessaire pour obtenir le résultat souhaité.
La formule d'intégration par parties leur a paru relativement naturelle connaissant la formule de Leibniz mis à part quelques petites difficultés techniques dans les applications.
Dans la partie 2, un élève a compris rapidement le principe des sommes télescopiques. Pour la majoration par une intégrale, l'utilisation de la méthode des rectangles a semblé naturelle pour certains.
Pour la démonstration du théorème sur les suites adjacentes, la principale erreur de raisonnement était l'utilisation des limites avant de prouver leur existence. L'application n'a pas posé de problème mis à part la majoration de l'erreur.
Dans la partie 4, on utilise les intégrales de Wallis pour démontrer que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Cette partie, qui est le coeur du problème, a semblé très difficile pour tous les élèves. Il faut avouer qu'écrire $\frac{1}{2n^2}$ comme la différence de deux termes qui sont quotients de deux intégrales n'est pas vraiment intuitifs. Cette conduite sans visibilité est source de difficultés. Les questions peuvent être considérer en elles-mêmes comme des exercices. Le fait de réaliser ce problème sur quatre périodes d'une heure n'a pas facilité le travail de compréhension des élèves.

4 Conclusions

L'expérience a semblé enrichissante pour les élèves. Ils ont pu se confronter à de réelles difficultés mais cela ne les a pas découragé sachant que ces élèves sont les plus à l'aise et les plus motivés pour faire des mathématiques. De notre point de vue, l'expérience est à renouveler.

Deuxième partie

Annexes

5 Problème 1

Dénombrement, analyse combinatoire et arithmétique

Définitions et notations :

- Si E est un ensemble fini, le cardinal de E est alors le nombre de ses éléments. En particulier, l'ensemble vide est de cardinal nul.
- Pour tout entier n strictement positif, la factorielle de n est le nombre $1 \times 2 \times ... \times n$ et on le note $n!$ Par convention, $0! = 1$.
- Pour tous entiers a et b avec $a \leqslant b$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble des entiers compris entre a et b.

– I – Coefficient binomial

Dans ce paragraphe, n désigne un entier naturel non nul et E un ensemble fini de cardinal n.

Pour tout entier p compris entre 0 et n, on note $\binom{n}{p}$ le nombre de parties de E à p éléments.

Cette notation sera justifiée au cours de l'exercice qui suit.

Exercice 1 :

1. Décrire toutes les parties de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$. Combien y a-t-il de parties de E à 0 élément ? à 1élément ? à 2 éléments ? à 3 éléments ?
2. On considère les quatre As d'un jeu de 52 cartes. On tire au hasard et simultanément deux As.
   (a) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   (b) Comment exprimer ce résultat à l'aide d'un coefficient $\binom{n}{p}$ (p et n étant à préciser).
3. (a) Rappeler la définition vue en classe de première S du coefficient binomial $\binom{n}{p}$.
   (b) Cette définition est-elle cohérente avec celle de ce problème ?
4. (a) Calculer $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{n}$.
   (b) Montrer que pour tout entier p compris entre 0 et n, on a :
$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$
5. Comment peut-on définir $\binom{n}{p}$ pour $p > n$?

Exercice 2 :

L'objectif de cet exercice est de démontrer la relation de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall p \in [\![1, n]\!],\ \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

On se fixe un élément a quelconque de E.

1. Soit p un entier compris entre 1 et n.
   (a) Combien y a-t-il de parties de E à p éléments contenant a ?
   (b) Combien y a-t-il de parties de E à p éléments ne contenant pas a ?

(c) En déduire la relation de Pascal.

2. **Triangle de Pascal.**

   En utilisant la relation de Pascal, remplir le tableau suivant avec les valeurs des $\binom{n}{p}$ correspondantes.

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3						
4						
5						

Exercice 3 :

L'objectif de cet exercice est de trouver une formule explicite permettant de calculer les coefficients $\binom{n}{p}$, pour p entier compris entre 0 et n.

Pour $p = 0$, on a déjà $\binom{n}{0} = 1$, on suppose donc que p est non nul pour la suite de cet exercice.

Pour tout entier naturel non nul p, on appelle p-liste d'éléments de E toute suite ordonnée de p éléments deux à deux distincts de E.

1. Soit L une p-liste d'éléments de E.
   (a) Combien y a-t-il de choix possibles pour le premier élément de L ? Puis pour le deuxième ?
   (b) En généralisant, combien y a-t-il de p-listes d'éléments E ? On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.
2. Soit A une partie à p éléments de E.
   (a) De combien de façons peut-on choisir une telle partie A ?
   (b) Combien de p-listes d'éléments de A peut-on former ?
   (c) En déduire le nombre de p-listes d'éléments de E.
3. En utilisant les résultats des questions 1 et 2, montrer que :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \quad (*)$$

   On constate que cette formule est valable pour $p = 0$.
4. **Application.**
   On considère un jeu de loto qui consiste à choisir 6 nombres entiers compris entre 1 et 49. Quelle est la probabilité de trouver les six bons numéros ?

Exercice 4 : Quelques applications

En utilisant la formule $(*)$, montrer que :

1.

$$\forall p \in [\![0, n]\!], \ \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

2.

$$\forall p \in [\![1, n-1]\!], \ \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

3. $$\forall p \in [\![1, n]\!], \ \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} \quad \textit{Formule de Pascal}$$

Exercice 5 : Formule du binôme de Newton
Soient a et b deux nombres complexes.

1. Montrer que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
   $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
2. Plus généralement, montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a :
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \ b^{n-k}$$
3. La formule précédente est-elle valable pour A et B deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?

Exercice 6 :
On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+x)^n$ (où n est toujours un entier naturel non nul).

1. (a) En utilisant la formule du binôme, écrire $f(x)$ autrement.
   (b) En évaluant la fonction f en 1, déduire de la question précédente que le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments est égal à 2^n.
2. (a) En évaluant la fonction f en -1, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$.
   (b) Déduire de la question précédente que dans un ensemble E à n éléments, il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.
3. En utilisant une dérivation, montrer que :
   (a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 2^{n-1}n$.
   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k} = 0$.

– II – Le problème des anniversaires

Exercice 7 :
Léonhard fait partie d'un groupe de $n+1$ personnes où n est un entier supérieur ou égal à 1. On étudie la probabilité de l'évènement « une personne du groupe au moins a la même date d'anniversaire (jour et mois) que Léonhard ». On considérera que l'année a toujours 365 jours, tous équiprobables.
On notera q_n cette probabilité.

1. Calculer q_n.
2. Déterminer algébriquement le rang à partir duquel $q_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Exercice 8 :
On considère un groupe de n personnes où n est un entier supérieur ou égal à 2.
On étudie la probabilité de l'évènement « deux personnes du groupe au moins ont la même date d'anniversaire (jour et mois) ». On considèrera que l'année a toujours 365 jours, tous équiprobables.
On notera p_n cette probabilité.

1. On suppose $n \geqslant 366$. Que vaut p_n ?
2. On suppose désormais que n est compris entre 2 et 365.
   (a) Combien y a-t-il de possibilités pour que les n personnes aient des dates d'anniversaires deux à deux différentes ?
   (b) En déduire la probabilité que les n personnes aient des dates d'anniversaires deux à deux différentes.
   (c) Montrer que $p_n = 1 - \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - \frac{k}{365}\right)$.
3. (a) Montrer que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.
   (b) Ecrire un algorithme permettant de déterminer le rang à partir duquel $p_n \geqslant \frac{1}{2}$.

– III – Le petit théorème de Fermat

On souhaite démontrer le résultat suivant connu sous le nom de petit théorème de Fermat :

Théorème

Soit p un nombre premier et a un entier relatif. Alors

$$a^p \equiv a \ (mod\ p)$$

Soit p un nombre premier et k un entier compris entre 1 et $p-1$.

1. (a) Montrer que p divise $k!\binom{p}{k}$.
   (b) En déduire que p divise $\binom{p}{k}$.
2. Soient $x,\ y \in \mathbb{N}$. En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $(x+y)^p \equiv x^p + y^p\ (mod\ p)$.
3. Montrer par récurrence que :

$$\forall a \in \mathbb{N},\ a^p \equiv a \ (mod\ p)$$

4. En déduire le théorème de Fermat.

Corollaire

Soit p un nombre premier et a un entier relatif non divisible par p.

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$$

5. Montrer que cet énoncé est équivalent à celui du théorème démontré précédemment.

6 Correction problème 1

– I – Coefficient binomial

Exercice 1 :

1. L'ensemble des parties de l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$ est :

$$\{\ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\ \}$$

Alors, il y a 1 partie à 0 élément, 3 parties à 2 éléments, 3 parties à 2 éléments et 1 partie à 3 éléments.

2. (a) Il y a 6 tirages possibles : {Pique,Coeur},{Pique,Carreau}, {Pique,Trèfle}, {Coeur,Carreau}, {Coeur,Trèfle} et {Carreau,Trèfle}.

   (b) Ce nombre peut s'exprimer avec le coefficient binomial $\binom{4}{2}$.

3. (a) En première S, on définit le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ comme le nombre de chemins possédant p succès dans un arbre de probabilités représentant un schéma de Bernoulli à n étapes.

   (b) Cette définition est cohérente avec celle de ce problème car on peut représenter la création d'une partie d'éléments de E comme une répétition de n expériences à 2 issues : pour chaque élément de E, l'élément appartiendra à la partie ou il n'y appartiendra pas. Ainsi, chaque chemin de cet arbre représente une unique partie de E et l'ensemble des chemins à p succès est l'ensemble des parties de E à p éléments.

4. (a) $\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$

   (b) $\binom{n}{p}$ est le nombre de choix de p éléments parmi n. Or choisir p éléments qui constitueront une partie ou choisir les $n - p$ éléments qui n'appartiendront pas à cette même partie revient au même. C'est pourquoi $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

5. Il est cohérent, pour $p > n$, de poser $\binom{n}{p} = 0$ car on ne peut pas constituer une partie à p éléments à partir d'un ensemble à n éléments si $p > n$.

Exercice 2 :

1. (a) Il y a $\binom{n-1}{p-1}$ parties de E à p éléments contenant a.

   (b) Il y a $\binom{n-1}{p}$ parties de E à p éléments contenant a.

   (c) Il y a $\binom{n}{p}$ parties de E à n éléments. Cet ensemble peut être partitionner en deux : les parties qui contiennent a et celles qui ne le contiennent pas. D'où la relation :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

2.

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Exercice 3 :

1. (a) Il y a n choix possibles pour le premier élément de L, puis $n-1$ pour le deuxième.
   (b) En généralisant ce raisonnement, il y a $n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1)$ p-listes d'éléments de E. On a alors :

$$n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1) = \frac{n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1}{(n-p) \times (n-p-1) \times ... \times 2 \times 1} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

2. (a) Il y a $\binom{n}{p}$ façons de choisir une telle partie A.
   (b) On peut former $p!$ p-listes d'éléments de A.
   (c) Ainsi, il y a $p! \times \binom{n}{p}$ p-listes d'éléments de E.
3. On a calculé de deux façons différentes p-listes d'éléments de E. On a alors :

$$p! \times \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!} \Leftrightarrow p! = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

4. La probabilité de trouver les six bons numéros est $\frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13\,983\,816} \approx 0{,}000\,000\,07$

Exercice 4 :

1. Soit $p \in [\![0, n]\!]$,

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

2. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$,

$$\frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} = \frac{n}{p} \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} = \frac{n}{p} \times \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$$

3.

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} &= \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} \\
&= \frac{(n-p) \times (n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{p \times (n-1)!}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{(n-1)! \times (n-p+p)}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\
&= \binom{n}{p}
\end{aligned}$$

Exercice 5 :

1. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ab+ba+b^2 = a^2+2ab+b^2$
$$\begin{array}{rcl}(a+b)^3 & = & (a+b)^2(a+b)\\ & = & (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ & = & a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3\\ & = & a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ (a+b)^4 & = & (a+b)^3(a+b)\\ & = & (a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)\\ & = & a^4+a^3b+3a^3b+3a^2b^2+3a^2b^2+3a^3b+3ab^3+ab^3+b^4\\ & = & a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{array}$$
2. **Initialisation :** pour $n=1$
$$\left.\begin{array}{l}(a+b)^1 = a+b\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k} = \binom{1}{0}a^0b^1+\binom{1}{1}a^1b^0 = a+b\end{array}\right\} \Rightarrow (a+b)^1 = \textstyle\sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}a^kb^{n-k}$$
Hérédité : on suppose la propriété vraie au rang n. Montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.
$$\begin{array}{rcl}(a+b)^{n+1} & = & (a+b)(a+b)^n\\ & = & (a+b)\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}\\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k+1}\\ & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^kb^{n-k+1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k+1}\\ & = & \displaystyle\binom{n}{n}a^nb^0+\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)\right]a^kb^{n-k+1}+\binom{n}{0}a^0b^{n+1}\\ & = & \displaystyle\binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^kb^{n-k+1}+\binom{n+1}{0}a^0b^{n+1}\\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^kb^{n-k+1}\end{array}$$
Conclusion : Ainsi, pour tout entier n non nul, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$
De plus, on vérifie que la formule est vraie pour $n=0$.

– II – Le problème des anniversaires

Exercice 6 :

1. (a) $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = (1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$

   (b) $f(1) = 2^n = \displaystyle\sum_{k=0} n\binom{n}{k}$
   Or la somme dans le membre de droite compte le nombre de parties d'un ensemble à n éléments (plus précisément, elle compte le nombre de parties à 0 éléments, puis à 1 éléments, puis à 2 éléments etc...). Ainsi, le nombre de parties d'un ensemble n éléments est 2^n.

2. (a) $f(-1) = 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k$

(b) En décomposant la somme suivant la parité de l'indice on obtient donc :

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

Finalement, il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

3. (a) $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kx^{k-1}$

$\Rightarrow f'(1) = n2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

(b) $f'(-1) = 0 = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k\binom{n}{k}$

Exercice 7 :

1. On répète n fois, de manière indépendante, une même expérience aléatoire à deux issues. On considère comme succès l'évènement « la personne a la même date d'anniversaire que Léonhard », de probabilité $\frac{1}{365}$. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. Alors X suit la loi $\mathscr{B}(n, \frac{1}{365})$.
$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$

2. On résout

$$\begin{aligned}
& q_n &\geqslant \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n &\geqslant \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2} &\geqslant \left(\frac{364}{365}\right)^n \\
\Leftrightarrow \quad & \ln(\frac{1}{2}) &\geqslant \ln(\left(\frac{364}{365}\right)^n) \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(\frac{364}{365})} &\leqslant n
\end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(\frac{364}{365})} \approx 252,7$, donc $q_n \geqslant \frac{1}{2}$ à partir du rang 253.

Exercice 8 :

1. Si $n \geqslant 366$, comme il n'y a que 365 dates d'anniversaires possibles alors nécessaires deux personnes au moins ont la même date d'anniversaire et donc $p_n = 1$.

2. (a) Pour la première personne, il y a 365 dates possibles , pour la seconde 364, etc... Ainsi, il y a $365 \times 364 \times ... \times 365 - n + 1$ dates possibles deux à deux différentes pour les n personnes.

(b) On suppose que chaque date est équiprobable, alors la probabilité que les n personnes aient des dates d'anniversaires deux à deux différentes est

$$\begin{aligned}
\frac{365 \times 364 \times ... \times 365 - n + 1}{365^n} &= \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times ... \times \frac{365 - (n-1)}{365} \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{365 - k}{365} \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{k}{365}
\end{aligned}$$

(c) p_n est la probabilité de l'évènement contraire à celui étudié précédemment, on a donc : $p_n = 1 - \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{k}{365}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $$\begin{aligned}
p_{n+1} - p_n &= 1 - \prod_{k=0}^{n} (1 - \frac{k}{365} - (1 - \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{k}{365}) \\
&= \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{k}{365} - \prod_{k=0}^{n} (1 - \frac{k}{365} \\
&= (1 - (1 - \frac{n}{365})) \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{k}{365} \\
&= \frac{n}{365} \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{k}{365} \\
&> 0
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite (p_n) est croissante.

(b) $$\begin{aligned}
p_n \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \quad 1 - \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{k}{365}) &\geqslant \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} &\geqslant \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \frac{k}{365})
\end{aligned}$$

Initialisation :	Affecter 1 à n
	Affecter 1 à p
Traitement :	Tant que $p > \frac{1}{2}$
	Affecter $p \times (1 - \frac{k}{365})$ à p
	Affecter $n + 1$ à n
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

– III – Le petit théorème de Fermat

1. (a) $k!\binom{p}{k} = k!\frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p!}{(p-k)!} = p \times (p-1) \times ... \times (p-k+1)$

Ainsi p divise $k!\binom{p}{k}$.

(b) Puisque p est un nombre premier et k est un entier compris entre 1 et $p-1$ alors p est premier avec k. Par application du théorème de Gauss, on a :

$$\left.\begin{array}{l} p | k!\binom{p}{k} \\ p \wedge k = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow p | (k-1)!\binom{p}{k}$$

En appliquant ce raisonnement de manière itérative, on montre que p divise $\binom{p}{k}$.

2. $(x+y)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} x^k y^{p-k}$

   Or, pour k compris entre 1 et $p-1$, $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$, donc

$$(x+y)^p \equiv \binom{p}{0} x^0 y^{p-0} + \binom{p}{p} x^p y^{p-p} \equiv x^p + y^p \pmod{p}$$

3. **Initialisation :** pour $a = 0$,

   $\left.\begin{array}{l} a^p = 0^p = 0 \\ a = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a^p \equiv a \pmod{p}$

   Hérédité : on suppose la propriété vraie au rang a et on montre qu'elle est vraie au rang $a+1$.

$$\begin{array}{rcll} (a+1)^p & \equiv & a^p + 1^p \pmod{p} & \text{propriété précédente} \\ & \equiv & a + 1 \pmod{p} & \text{hypothèse de récurrence} \end{array}$$

   Conclusion : ainsi, pour tout entier a, $a^p \equiv a \pmod{p}$.

4. Soit a un entier négatif. p est un nombre premier donc $p = 2$ ou p est impair.
   Si $p = 2$, $a^2 = (-a)^2 \equiv -a \pmod{2} \equiv a \pmod{2}$
   Si p est impair, $a^p = -(-a)^p \equiv -(-a) \pmod{p} \equiv a \pmod{p}$
   Ainsi, le petit théorème de Fermat est démontré.

5. On suppose le corollaire vrai. Soit p un nombre premier et a un entier relatif.
   Si a est divisible par p alors $a \equiv 0 \pmod{p}$ et donc $a^p \equiv a \pmod{p}$.
   Si a n'est pas divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ puis par multiplication par a : $a^p \equiv a \pmod{p}$.
   Ainsi le petit théorème de Fermat est vérifié.

   Réciproquement, on suppose que le théorème de Fermat est vérifié. Soit p un nombre premier et a un entier relatif non divisible par p. Alors a et p sont premiers entre eux.
   D'après le théorème de Fermat p divise $a^p - a = a(a^{p-1} - 1)$. Comme p est premier avec a alors, d'après le théorème de Gauss, p divise $a^{p-1} - 1$, c'est-à-dire $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Ainsi le corollaire est démontré.

7 Problème 2

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$

Le but de ce problème est de montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

ce qui peut se traduire par :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

– I – L'intégration par parties

Afin de calculer les intégrales de certaines fonctions dont on ne peut pas trouver « mentalement » une primitive, on aura recours à l'intégration par parties, que nous allons étudier dans ce paragraphe.

1. Soit $\varphi : [a\ ;\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée φ' continue sur $[a\ ;\ b]$. Justifier que :

$$\int_a^b \varphi'(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a)$$

2. En utilisant la formule de dérivation d'un produit [1], et en apportant toutes les justifications nécessaires, démontrer le théorème suivant (formule d'intégration par parties) :

   Théorème : Si u et v sont deux fonctions réelles définies, dérivables et à dérivée continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

   ce que l'on peut noter plus brièvement (sans la variable) :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

3. **Applications :**
   Calculer :

$$a) \int_0^1 te^t dt \quad ; \quad b) \int_1^x \ln(t)dt \quad ; \quad c) \int_1^x t^n \ln(t)dt \quad ; \quad d) \int_1^x t^2e^{3t}dt$$

   Pour b) et c), on suppose $x > 0$, pour c) on suppose $n \in \mathbb{N}^*$, enfin, pour d), deux intégrations par parties seront nécessaires pour baisser le degré de la partie polynômiale à 0.

Dans toute la suite du problème, on notera $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \geq 1,\ S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

1. Formule de Leibnitz

– II – Convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$

On se propose, dans cette partie, de prouver de deux manières différentes, la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

1.

   (a) Démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a la majoration :

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \tag{1}$$

   (b) Étudier les variations de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

   (c) En utilisant (3), montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée et justifier sa convergence vers une limite $S \in]0, 2]$.

2.

   (a) Démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a la majoration :

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$$

   (b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée et retrouver la convergence de cette suite.

– III – Suites adjacentes

On dit que les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et si la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes.

   (a) Étudier les variations de la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) En raisonnant par l'absurde, montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a $u_n \leq v_n$.

   (c) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell \leq v_n$$

2. On considère la suite $(T_n)_{n\geq 1}$, définie par :

$$\forall n \geq 1,\ T_n = S_n + \frac{1}{n}$$

   (a) Démontrer que les suites $(S_n)_{n\geq 1}$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes et retrouver le résultat de **II.1c**.

   (b) Déterminer un entier $n \geq 1$ à partir duquel, on a l'encadrement :

$$0 \leq S - S_n \leq 10^{-6}$$

   où $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

– IV – Les intégrales de Wallis

On note $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\, dt,\ J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n}(t)\, dt$$

1. Montrer que :

$$I_0 = \frac{\pi}{2},\ J_0 = \frac{\pi^3}{24}$$

2.

   (a) En utilisant une intégration par parties démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$I_n = \frac{2n-1}{2n}\, I_{n-1}$$

   Indication : on pourra remarquer que pour tout entier $n \geq 1$, et tout réel t, on a :

$$\cos^{2n}(t) = \cos^{2n-1}(t)\cos(t)$$

   (b) En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$I_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\frac{\pi}{2}$$

3. Soit $n \geq 1$.

   (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^{2n-1}(t)\sin(t)\,dt = \frac{1}{2n} I_n$$

   (b) Montrer que :

$$J_{n-1} - J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(t^2\sin(t)\right)\left(\cos^{2n-2}(t)\sin(t)\right)dt$$

   (c) En utilisant une intégration par parties, en déduire que :

$$J_{n-1} - J_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n} I_n + J_n\right) \tag{2}$$

   (d) On désigne par $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ K_n = \frac{J_n}{I_n}$$

   En utilisant (2), montrer que :

$$\frac{J_{n-1}}{I_n} - K_n = \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n} + K_n\right)$$

   puis en déduire que :

$$K_{n-1} - K_n = \frac{1}{2n^2}$$

4. Nous allons montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = 0$.

   (a) Démontrer que, pour tout réel $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a :

$$t \leq \frac{\pi}{2}\sin t$$

(b) En déduire que, pour tout entier n, on a :

$$0 \leq J_n \leq \frac{\pi^2 I_n}{8\,(n+1)}$$

puis que :

$$0 \leq K_n \leq \frac{\pi^2}{8\,(n+1)}$$

(c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \dfrac{\pi^2}{6}$.

(d) Conclure.

8 Correction Problème 2

– I – L'intégration par parties

1. Soit $\varphi : [a\ ;\ b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée φ' continue sur $[a\ ;\ b]$. Justifier que :

$$\int_a^b \varphi'(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Solution : φ est une primitive de φ' et φ' est continue sur $[a\ ;\ b]$, donc $\int_a^b \varphi'(t)dt = \varphi(b) - \varphi(a)$.

2. En utilisant la formule de dérivation d'un produit [2], et en apportant toutes les justifications nécessaires, démontrer le théorème suivant (formule d'intégration par parties) :

Théorème : Si u et v sont deux fonctions réelles définies, dérivables et à dérivée continue sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors :
$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$
ce que l'on peut noter plus brièvement (sans la variable) :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Solution : De $(uv)' = u'v + uv'$ et de la question précédente, on déduit que :

$$[uv]_a^b = \int_a^b (uv)'(t)dt = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

3. **Applications :**
Calculer :
$$a) \int_0^1 te^t dt \quad ; \quad b) \int_1^x \ln(t)dt \quad ; \quad c) \int_1^x t^n \ln(t)dt \quad ; \quad d) \int_1^x t^2e^{3t}dt$$
Pour b) et c), on suppose $x > 0$, pour c) on suppose $n \in \mathbb{N}^*$, enfin, pour d), deux intégrations par parties seront nécessaires pour baisser le degré de la partie polynômiale à 0.

Dans toute la suite du problème, on notera $(S_n)_{n\geq 1}$ la suite réelle définie par :

$$\forall n \geq 1,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

– II – Convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$

On se propose, dans cette partie, de prouver de deux manières différentes, la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.

1.

2. Formule de Leibnitz

(a) Démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a la majoration :

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \tag{3}$$

Solution :
Pour $k \geq 2$, on a :

$$\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

(b) Étudier les variations de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$.
Solution :
Avec $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$, on déduit que $(S_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.

(c) En utilisant (3), montrer que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée et justifier sa convergence vers une limite $S \in \left]0, 2\right]$.
Solution :
Pour $n \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &\leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2 \end{aligned}$$

La suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est donc croissante majorée par 2 et en conséquence convergente de limite $S \in \left]0, 2\right]$.

2.

(a) Démontrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a la majoration :

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2}$$

Solution :
La fonction $t \to \dfrac{1}{t^2}$ étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$\forall k \geq 2, \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{k^2} = \frac{1}{k^2}$$

(b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est majorée et retrouver la convergence de cette suite.
Solution :
On en déduit que pour tout entier $n \geq 2$, on a :

$$S_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2} = 1 + \int_{1}^{n} \frac{dt}{t^2} = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante majorée et en conséquence convergente.

– III – Suites adjacentes

On dit que les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et si la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers 0.

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes.

   (a) Étudier les variations de la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Solution : Décroissante comme somme de deux décroissante.

   (b) En raisonnant par l'absurde, montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a $u_n \leq v_n$.
   Solution : Supposons qu'il existe un indice n_0 tels que $u_{n_0} > v_{n_0}$.
   Comme $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a alors pour tout $n \geq n_0$, $v_n - u_n \leq v_{n_0} - u_{n_0} < 0$ et $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) \leq v_{n_0} - u_{n_0} < 0$, ce qui est impossible.

   (c) En déduire que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, avec :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell \leq v_n$$

   Solution : En utilisant la question précédente et la monotonie des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq v_0$$

   c'est-à-dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante majorée par v_0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée par u_0, ces deux suites sont donc convergentes et avec :

   $$\lim_{n\to+\infty} v_n - \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$$

   Elles convergent donc vers la même limite :

   $$\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} (u_n) = \inf_{n\in\mathbb{N}} (v_n)$$

2. On considère la suite $(T_n)_{n\geq 1}$, définie par :

   $$\forall n \geq 1,\ T_n = S_n + \frac{1}{n}$$

   (a) Démontrer que les suites $(S_n)_{n\geq 1}$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes et retrouver le résultat de **II.1c**.
   Solution :
   On sait déjà que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est croissante.
   Pour tout $n \geq 1$, on a :

   $$T_{n+1} - T_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{1}{n(n+1)^2} < 0$$

   ce qui signifie que la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.
   Puis avec :

   $$\lim_{n\to+\infty} (T_n - S_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

   on conclut que ces deux suites sont adjacentes et en conséquence convergentes vers une même limite S.

(b) Déterminer un entier $n \geq 1$ à partir duquel, on a l'encadrement :

$$0 \leq S - S_n \leq 10^{-6}$$

où $S = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Solution :

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$S_n \leq S \leq T_n$$

donc :

$$0 \leq S - S_n \leq T_n - S_n = \frac{1}{n}$$

et $n = 10^6$ convient.

– IV – Les intégrales de Wallis

1. $I_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0(t)\ dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$ $\qquad J_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\ dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}$

2. (a) Les fonctions définies sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $u(t) = \cos^{2n-1}(t)$ et $v(t) = \sin(t)$ sont dérivables, de dérivées continues. On a donc, d'après le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{array}{rrcl} & I_n & = & \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\ dt \\ \Leftrightarrow & I_n & = & \left[\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n-1)\sin^2(t)\cos^{2n-2}(t)\ dt \\ \Leftrightarrow & I_n & = & (2n-1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2(t)\right)\cos^{2n-2}(t)\ dt \\ \Leftrightarrow & I_n & = & (2n-1)I_{n-1} - (2n-1)I_n \\ \Leftrightarrow & 2nI_n & = & (2n-1)I_{n-1} \\ \Leftrightarrow & I_n & = & \dfrac{2n-1}{2n} I_{n-1} \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcl} I_n & = & \dfrac{2n-1}{2n}\ I_{n-1} \\ & = & \dfrac{2n-1}{2n} \times \dfrac{2n-3}{2n-2}\ I_{n-2} \\ & \vdots & \\ & = & \dfrac{2n-1}{2n} \times \dfrac{2n-3}{2n-2} \times \ldots \times \dfrac{1}{2}\ I_0 \\ & = & \dfrac{(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)\times(2n-3)\times\ldots\times 2\times 1}{(2n)^2\times(2n-2)^2\times\cdots\times 2^2}\ \dfrac{\pi}{2} \\ & = & \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\ \dfrac{\pi}{2} \end{array}$$

3. (a) Les fonctions définies sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $u(t) = t$ et $v(t) = -\dfrac{\cos^{2n}(t)}{2n}$ sont dérivables, de dérivées continues. On a donc, d'après le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos^{2n-1}(t)\sin(t)\ dt & = & \left[-\dfrac{t\cos^{2n}(t)}{2n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos^{2n}(t)}{2n}\ dt \\ & = & \dfrac{I_n}{2n} \end{array}$$

(b)
$$\begin{aligned} J_{n-1}-J_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n-2}(t)\ dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n}(t)\ dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n-2}(t)(1-\cos^2(t))\ dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n-2}(t)\sin^2(t)\ dt \end{aligned}$$

(c) Les fonctions définies sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $u(t)=t^2\sin(t)$ et $v(t)=-\dfrac{\cos^{2n-1}(t)}{2n-1}$ sont dérivables, de dérivées continues. On a donc, d'après le théorème d'intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(t^2\sin(t)\big)\big(\cos^{2n-2}(t)\sin(t)\big)\ dt &= \left[-t^2\sin(t)\frac{\cos^{2n-1}(t)}{2n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(2t\sin(t)+t^2\cos(t)\big)\big(\frac{\cos^{2n-1}(t)}{2n-1}\big)\ dt \\ &= \frac{2}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\sin(t)\cos^{2n-1}(t)\ dt + \frac{1}{2n-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n}(t)\ dt \\ &= \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n}I_n + J_n\right) \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} & & J_{n-1}-J_n &= \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n}I_n+J_n\right) \\ &\Rightarrow & \frac{J_{n-1}}{I_n}-K_n &= \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n}+K_n\right) \\ &\Rightarrow & \frac{J_{n-1}}{\frac{2n-1}{2n}I_{n-1}}-K_n &= \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n}+K_n\right) \\ &\Rightarrow & \frac{2n}{2n-1}K_{n-1}-K_n &= \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{n}+K_n\right) \\ &\Rightarrow & \frac{2n}{2n-1}K_{n-1}-K_n &= \frac{1}{n(2n-1)}+\frac{1}{2n-1}K_n \\ &\Rightarrow & \frac{2n}{2n-1}K_{n-1}-\frac{2n}{2n-1}K_n &= \frac{1}{n(2n-1)} \\ &\Rightarrow & 2nK_{n-1}-2nK_n &= \frac{1}{n} \\ &\Rightarrow & K_{n-1}-K_n &= \frac{1}{2n^2} \end{aligned}$$

4. (a) On note f la fonction définie sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(t)=\frac{\pi}{2}\sin(t)-t$. f est deux fois dérivables sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$f'(t)=\frac{\pi}{2}\cos(t)-1$$
$$f''(t)=-\frac{\pi}{2}\sin(t)$$

t	0		α		$\frac{\pi}{2}$
f''		$-$		$-$	
f'	$\frac{\pi}{2}-1$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

Ainsi, f est positive sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on a donc $t \leqslant \frac{\pi}{2}\sin(t)$.

(b) Pour tout $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$,

$$\begin{array}{rcccl}
 & & t & \leqslant & \frac{\pi}{2}\sin(t) \\
\Rightarrow 0 & \leqslant & t^2 & \leqslant & \frac{\pi^2}{4}\sin^2(t) \\
\Rightarrow 0 & \leqslant & t^2\cos^{2n}(t) & \leqslant & \frac{\pi^2}{4}\sin^2(t)\cos^{2n}(t) \\
\Rightarrow 0 & \leqslant & \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\cos^{2n}(t)\ dt & \leqslant & \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\cos^{2n}(t)\ dt \\
\Rightarrow 0 & \leqslant & J_n & \leqslant & \frac{\pi^2}{4}(I_n - I_{n+1}) \\
\Rightarrow 0 & \leqslant & J_n & \leqslant & \frac{\pi^2}{4}\frac{1}{2n+2}I_n \\
\Rightarrow 0 & \leqslant & J_n & \leqslant & \frac{\pi^2}{8}\frac{I_n}{n+1} \\
\Rightarrow 0 & \leqslant & K_n & \leqslant & \frac{\pi^2}{8}\frac{1}{n+1}
\end{array}$$

Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, la suite (K_n) converge vers 0.

(c) $$\begin{array}{rcl}
S_n & = & \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} \\
 & = & \sum_{k=1}^{n} 2(K_{k-1} - K_k) \\
 & = & 2(K_0 - K_n)
\end{array}$$

Puisque (K_n) converge vers 0 alors la suite (S_n) converge vers $2K_0 = 2 \times \frac{\frac{\pi^3}{24}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{6}$.

Finalement $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$