Fiche professeur – Activité sur la composée de fonctions

1/ Historiquement

Dans les « Mémoires de l'Académie des Sciences » en 1 718, Bernoulli écrit :

« Définition : On appelle ici **fonction** d'une **grandeur variable**, une quantité **composée** de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes. »

Euler prend la suite et, dans une note de l'Académie de Saint Petersbourg en 1734 introduit la notation $f\left(\frac{x}{a}+c\right)$ qui désigne « **une fonction arbitraire de** $\frac{x}{a}+c$. »

Notre regard sur ces utilisations de Bernoulli et Euler.

Il nous semble que Bernoulli parle de changement de variable dans le cadre d'un problème physique, il mentionne une quantité composée à partir de la grandeur variable choisie et de constantes. Il définit la notion de fonction qui à une grandeur variable associe par un calcul une variable. Le sens donné à composition est opération.
Euler reprend cette idée de composer dans un cadre particulier « **une fonction arbitraire de** $\frac{x}{a}+c$ » mais ici c'est le sens composer que nous utilisons dans le cadre de la composée de fonctions avec changement de variable par $\frac{x}{a}+c$.
Cela nous amène au questionnement : pourquoi ne pas parler de changement de variable plutôt que de composée de fonctions ?
Le point de vue est différent si on regarde le concept de fonction du point de vue outil ou objet .
Un changement de variable est en lien avec des méthodes de calculs d'intégrale par exemple alors que la composée de fonctions est une étude d'un objet défini à partir d'autres objets les fonctions .
Cependant, un changement de variable reste plus particulier et dans des pratiques bien définies. La notion de bijection entre en jeu. Il semble pertinent de parler de changement de variable en classe de première puisque nous sommes dans le cadre d'une composition par une fonction affine et en lien avec la physique comme par exemple un changement d'unité de température de °C à °F.
En classe de terminale c'est bien l'objet qui nous intéresse avec l'étude de la dérivée de $f \circ g$.
Pour la limite d'une composée de fonctions, se pose la question du regard sous changement de variable ou composée de fonction. Les notations ayant une incidence en traduisant au mieux l'un des deux regards.

$x \mapsto f(x)$
$X \mapsto g(X)$

Dans cette notation X désigne davantage un changement de variable qu'une fonction de x.

2/ Représentations

Juste quelques mots pour expliquer comment nous avons conçu l'activité.
Les notations, les représentations et le vocabulaire utilisés pour décrire la composée de fonctions n'est pas sans importance et devrait poser problème puisque rarement les élèves sont confrontés à la non commutativité et à une vision ensembliste par association dans le cadre des fonctions.
La vision procédurale (par calcul) est la plus utilisée chez les élèves.

Nous avons fait le choix de proposer plusieurs représentations pour la composition de fonctions afin de permettre aux élèves de développer différents regards. Nous faisons l'hypothèse que cela les aidera à comprendre le concept de composition de fonctions.
Ces représentations étant plus ou moins opérationnelles dans les tâches prescrites aux élèves : calculer la dérivée d'une composée, la limite d'une composée …

Notre hypothèse étant basée sur les travaux de Duval.
« D’une part, l’appréhension des objets mathématiques ne peut être qu’une appréhension conceptuelle et, d’autre part, c’est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu’une activité sur des objets mathématiques est possible. » (Duval, 1993, p.38)

3/ Où utilise-t-on la composée de fonctions au lycée ?

La composée de fonctions est présente :

- en algorithmique :

```
def truc(X) :
    Y=g(X)
    return Y

def machin(X) :
    Z=f(truc(X))
    return Z
```

- pour les transformations géométriques, les vecteurs
Translation suivi d'une rotation par exemple … homothétie.

- formules algébriques, fonctions
x $\mapsto$ $f(2x)$ par exemple, taux de variation $f(x_0+h)$ en classe de première, …

- tableur
f(g(x)) → C1=f(B1) où B1 = g(A1).

Présentation de l'activité (Durée : 2h avec correction)

Notre activité se concentre sur les composées de fonctions dans le cadre de l'analyse ou de l'algèbre. A partir de deux fonctions, on compose une nouvelle fonction puis inversement on lit une fonction comme la composée de deux fonctions.

Nous voulons proposer plusieurs représentations pour la notion de composée ainsi que les opérations cognitives associées. Notre hypothèse est qu'en multipliant les représentations, les élèves s'approprient différents points de vue de la notion. Le professeur pourrait ensuite s'appuyer sur ces diverses représentations pour les chapitres sur les limites ou dérivées.

Exercice 1 (Tableau de valeurs)

Question flash

Objectif : comprendre une écriture, intermédiaire de calculs par la fonction qui à x associe son double, ainsi montrer l'ordre et discuter de l'erreur supposée $f(2x)=2f(x)$.
Le choix d'un tableau de valeurs n'est pas anodin car il nous semble plus familier des élèves.

Exercice 2 (Diagramme de Venn)

Objectif : Une représentation peu présente dans les manuels.
> Le choix de données qualitatifs au lieu de quantitatifs évite de mélanger l'ensemble de départ et d'arrivée. Et aussi de s'éloigner du calculer trop prégnant dans l'activité des élèves.
> Ici on travaille sur une règle d'association.
> La représentation avec étape intermédiaire symbolisée par une bulle permet une vision d'affectation d'éléments à éléments. Cette vision des fonctions n'est pas habituelle mais correspond à un élément d'un ensemble de départ, j'associe un élément dans un ensemble arrivée.
Notre présentation n'est pas toujours très explicite pour les élèves nous en convenons.
> Il n'y a pas toujours chaque élément a un représentant dans l'ensemble d'arrivée lorsque l'on regarde la composée. Ce qui distingue fonction et application.
> Autre constat, la fonction qui à x associe son double est définie sur $\mathbb{R}$, mais notre composée ne peut être définie que pour certains nombres de départ à cause de l'ensemble de définition de la fonction f.
> Enfin, on peut demander s'il est possible de définir dans l'ordre inverse la composée.
La non commutativité étant un possible obstacle.

Cette représentation est riche et permet déjà de parler de plusieurs éléments.

x → … → … est complété par le professeur pour les différentes étapes à symboliser.

Exercice 3 / Exercice 4 (Graphique)

Objectif : On change de registre avec le registre graphique et on insiste sur la distinction opposé et inverse.
On poursuit avec la notation x → … → … .
La notation sous la forme : x → g(x) → f(g(x)) poserait des difficultés aux élèves. (Ce que nous avons constaté en particulier sur une classe de terminale)

Le registre graphique sera un point d'appui pour les chapitres sur les limites et dérivées mais aussi permet de travailler sur ce registre (pour lui-même) souvent oublié des manuels. On utilise les symétries, homothéties, translation et effets de chacune de ces transformations sur la courbe. On mélange des visions ponctuelles et globales. C'est un travail qui nous semble riche.

Dans le cadre de l'activité en terminale, la fonction exponentielle force à utiliser le passage du ponctuel au global par transformation (impossibilité de calculs d'images). Alors que pour le niveau première, les élèves peuvent passer par un tableau de valeurs. Dans les deux cas, le ponctuel et le global cohabitent. <u>On rappelle que la calculatrice n'est pas autorisée</u>.
Enfin, il nous semble important pour le niveau terminale d'insister sur la différence entre les fonctions $x \mapsto \exp(-x)$ et $x \to -\exp(x)$, $x \mapsto -\exp(-x)$ car nous avons pu repérer une erreur systématique que la dérivée de $x \mapsto \exp(-x)$ est $x \mapsto \exp(-x)$.

Exercice 5 Travail individuel.
Cet exercice permet de faire le point sur les acquis des élèves.
Ne pas hésiter à réutiliser la représentation Diagramme de Venn si besoin.
A cette occasion la notation f(g(x)) est proposée mais elle peut attendre le moment de l'institutionnalisation. Les élèves ne pouvant l'inventer.

Quelques points supplémentaires

a) Remarque importante : Le registre de la langue française à l'oral.
Dans tous les exercices, il est important et nécessaire d'oraliser.

Plusieurs phrases peuvent être choisies :
- « f suivi de g appliqué à *x*» donne g(f(x)) alors que « g suivi de f » donne f(g(x))
Le mot *suivi* n'est pas choisi au hasard, car l'ordre a une importance.

- « f(-x) est la fonction composée de $x \mapsto -x$ suivi de f »

- « $x \mapsto -f(x)$ est l'opposée de la fonction $x \mapsto f(x)$ » qui peut être vu comme « la composée de la fonction f suivi de $x \mapsto -x$ »

- « Graphiquement, la courbe de $x \mapsto -f(x)$ est la courbe symétrique de $x \mapsto f(x)$ par rapport à l'axe des ordonnées »

- « $x \mapsto f(2x)$ est la composée de la fonction double suivi de f, on peut introduire comme intermédiaire les images 2x. «

- Ensemble de départ, ensemble d'arrivée, *ensemble intermédiaire* peut permettre de bien visualiser quel ensemble et quel fonction est regardée.

b) Exercice 4 en classe de Terminale
Difficulté en terminale dans la notation f(g(x)).
> Proposition de faire : $x \to g(x) \to g(f(x))$

> Proposition tableur (vidéo projecteur) est un intermédiaire pour comprendre cette notation davantage que dans l'activité. Ce sera utilisé au moment de l'institutionnalisation.

c) Dans les programmes
>Dans les anciens programmes en filière S, on étudiait en 1ère les variations dans le cadre de composées de fonctions.
- si f et g ont même sens de variation, leur composée est strictement croissante;
- si f et g ont des sens de variation différents, leur composée est strictement décroissante.
Pour ostensible, on utilisait des tableaux de variations traduisant assez fidèlement les étapes de raisonnement.

> Les récents programmes ne mentionnent pas le terme de composée de fonctions en 1ère.
MAIS on retrouve Opérations sur les fonctions dérivables : fonction dérivée de $x \mapsto g(ax + b)$.
Ce qui constitue un cas particulier proche de celle évoquée par Euler.

> Terminale : on aborde la dérivée d'une fonction composée et les limites de fonctions composées

Nous avons pu repérer les erreurs :
- la dérivée de $x \mapsto e^{-x}$ est $x \mapsto e^{-x}$
- la dérivée de $x \mapsto f(2x)$ est $x \mapsto 2f'(x)$ en utilisant la règle d'action $2f(x) = f(2x)$.
- la dérivée de $x \mapsto \sqrt{(x^2+1)}$ est … sans réponse, des élèves écrivent $\sqrt{(x^2+1)} = x+1$
- inversion de l'ordre des fonctions

Dans les programmes encore plus anciens, il y avait un travail particulier dans l'espace graphique sur les effets des transformations géométriques sur les courbes de fonctions. Ce n'est plus le cas.

Exercice supplémentaire possible (registre tableau de valeurs)

Soit *f* une fonction définie par le tableau de valeurs suivant :

x	-1	0	1	2	3	11
$f(x)$	3	-1	8	$\sqrt{2}$	7	0

Soit g une fonction définie par le tableau de valeurs suivant :

x	-1	$\sqrt{2}$	3	5	8	11
$g(x)$	4	-1	2	8	$\sqrt{3}$	0,1

a. Déterminer grâce au tableau de valeurs $g(f(2))$, $g(f(0))$, $g(f(-1))$.

b. Déterminer grâce au tableau de valeurs $f(g(3))$, $f(g(5))$.

c. Peut-on connaître $g(f(11))$?

Commentaires supplémentaires sur l'activité en Terminale

- Mise en œuvre :

❖ Exercice 1 : en question « flash » de début de séance.
Beaucoup d'élèves vont utiliser la proportionnalité pour calculer $f(2x)$ …

❖ Exercice 2 : introduction d'un nouveau type de schéma (diagrammes de Venn)
En groupes avec mise en commun (environ 15 minutes)
Des élèves ressentent le besoin de « revenir » au tableau type exercice 1.

❖ Exercice 3 : en groupe avec mise en commun (environ 30 minutes)
Deux types de procédures : par symétries ou par calculs successifs des images.
Erreurs : des confusions entre inverse et opposé, la fonction opposée mal utilisée dans la composition.
La construction de l'allure de la courbe est plus complexe.
Un travail individuel (sans calculatrice graphique) peut être donné après la mise en commun avec la fonction exponentielle : tracés de $x \longmapsto e^{-x}$ et $x \longmapsto -e^{x}$

❖ Exercice 4 : individuel (sans calculatrice) avec mise en commun (environ 30 minutes)
C'est l'occasion de remarquer à partir des courbes obtenues que $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)' \neq e^{\frac{x}{2}}$: (étude des tangentes)

- Remarques :

- ✓ Dans la progression de l'année terminale, il est souhaitable que cette activité soit faite après le chapitre sur les limites et avant l'introduction des dérivées de fonctions composées ($e^u, \sqrt{u}$, u^n) afin qu'elle ait un réel intérêt.
  L'idéal étant de faire un chapitre « composée de fonctions » avec les limites et les dérivées.
- ✓ La notation introduite dans l'exercice 4 est compliquée à comprendre pour les élèves, une activité avec le tableur est à faire avant le cours.
- ✓ Il est intéressant dans les exercices d'utiliser les deux types de schémas (diagrammes de Venn et « flèches »)
- ✓ Faire des exercices régulièrement (question flash) : trouver la fonction composée à partir de deux fonctions et surtout retrouver les deux fonctions de la composée.