Revue de didactique des mathématiques
Recherche sur l'enseignement et la formation

Petit x

2022 - n° Spécial activités

Comité de rédaction

Composition et édition
Jean-Christophe SALMON
Valérie CHORIER, IREM de Grenoble

ISSN 0759-9188. Directrice de publication : la Directrice de l'IREM, Michèle GANDIT

SOMMAIRE

LA COURBE DES TEMPÉRATURES

ANNÉE 2011 - N° 85

Pierre-François BURGERMEISTER
Université de Genève

On trouve les données ci-dessous sur le site de l'OCSTAT (http://www.ge.ch/statistique/) :

Office cantonal de la statistique - OCSTAT												
Valeurs météorologiques mensuelles à Genève, depuis 2000												
	Janvier	Février	Mars	Avril	Mai	Juin	Juillet	Août	Sept.	Oct.	Nov.	Déc.
Température moyenne (Degré Celsius)												
Normales 1961-1990	0.8	2.3	5.1	8.8	13.0	16.5	19.1	18.2	14.9	10.1	5.0	1.8
2000	1.3	4.9	7.1	10.8	16.5	19.9	18.5	20.7	16.8	12.2	7.3	5.3
2001	3.4	4.8	9.0	8.5	16.3	17.2	20.1	20.4	13.1	14.1	4.3	1.6
2002	1.4	6.3	7.8	10.5	13.4	20.5	19.9	18.6	15.1	11.6	7.8	5.6
2003	1.6	0.3	8.2	10.9	15.9	24.1	22.5	24.0	15.9	8.8	6.0	3.0
2004	2.7	3.4	5.5	10.6	13.8	18.8	20.0	20.1	16.8	13.6	5.9	2.9
2005	1.3	0.6	6.8	10.5	15.3	20.5	20.9	18.6	16.9	11.7	4.8	0.4
2006	0.3	1.4	5.1	10.2	14.5	19.5	23.7	16.8	18.0	13.6	7.7	3.4
2007	4.3	5.6	6.7	14.3	15.3	18.6	18.9	18.7	14.7	10.8	4.2	2.3
2008	3.8	3.9	6.0	9.2	15.8	18.5	20.0	19.3	14.1	11.2	6.3	1.6
2009	- 0.2	1.8	6.3	12.4	17.0	18.3	20.5	21.2	16.6	10.6	7.8	2.3

Les données de la ligne colorée (Normales 1961-1990) correspondent aux moyennes des températures mensuelles relevées à Genève sur une période de 30 ans.

1. *Reporter ces données sur un graphique en mentionnant le temps (en jours, de 1 à 365) en abscisses et la température en ordonnées et établir ainsi la courbe annuelle des températures à Genève.*
2. *Trouver une fonction sinusoïdale $T : t \longmapsto T(t)$ exprimant la température T en fonction du jour t de l'année, dont le graphe suive cette courbe d'aussi près que possible. Représenter le graphe de cette fonction sur le repère déjà utilisé en 1.*
3. *Utiliser la fonction trouvée en 2. pour déterminer :*
   - *la température moyenne à Genève un 1^er^ mars ;*
   - *la température moyenne à Genève un 1^er^ juin ;*
   - *à quelle(s) date(s) la température moyenne à Genève est 10°C.*
4. *Pensez-vous que la fonction trouvée en 2. soit la fonction sinusoïdale la plus fidèle possible à la courbe initiale ? Si oui, justifier ; sinon, donner des idées qui pourraient être utiles pour l'améliorer.*

ALGORITHMES ET STATISTIQUES

ANNÉE 2011 - N° 85[1]

Georges SALIBA

Lycée Victor Louis, Talence

Voici le corps d'un programme écrit avec Xcas_fr :

```
saisir(nb_mod);
s:=0;
pour k de 1 jusque nb_mod faire
  saisir(valeur);
  s:=s+valeur;
fpour
afficher(eval(s/nb_mod));
```

Question 1

Faire fonctionner ce programme avec la série suivante (série de notes obtenues à un devoir de mathématiques) : 10 ; 11 ; 14 ; 7 ; 8 ; 18 ; 15 ; 16. Que fait ce programme ?

Question 2

Le tableau ci-dessous présente le prix du litre de sans plomb 95 relevé dans quelques stations service de la région de Bordeaux, le même jour.

P	1,46	1,47	1,49	1,5	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55	1,56	1,59	1,62	1,63	1,65	1,66	1,69
N	1	2	2	3	3	15	12	2	4	1	2	2	1	4	1	2

P : prix du litre de sans plomb 95 en euros.
N : Nombre de points de ventes à ce prix.

- Modifier le corps du programme ci-dessus pour obtenir le prix moyen du litre de sans plomb 95 ce jour-là
- Comparer la moyenne et la médiane de cette série. Expliquer ces résultats.

Question 3

Rappeler les deux formules du calcul de la variance d'une série statistique.

- Laquelle des deux formules va-t-on choisir pour calculer la variance en modifiant le programme écrit à la question 3 ? Expliquer.
- Modifier le corps du programme de la question 3 pour obtenir la variance et l'écart-type de la série des prix du carburant.

• Que peut-on dire de cette série ?

[1] Éléments de solution : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-85-petit-x/3-activite-algorithmes-et-statistiques--512547.kjsp?RH=1550185713058

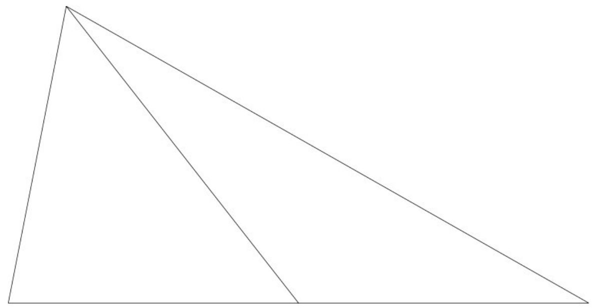
PARTITIONS D'UN TRIANGLE EN TRIANGLES D'AIRES ÉGALES

ANNÉE 2011 - N° 85

Denise GRENIER

Institut Fourier, Université Grenoble I

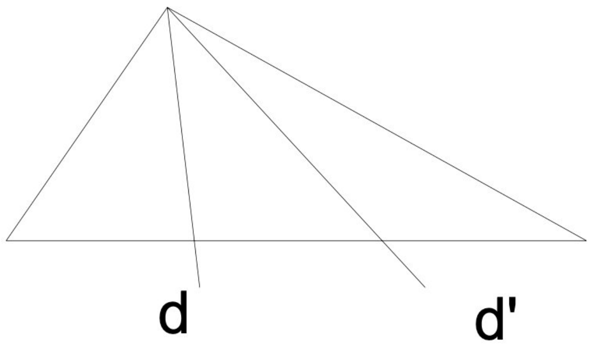
1. La médiane relative à un sommet dans un triangle donné (quelconque) partage ce triangle en deux triangles d'aires égales. Vérifiez-le !



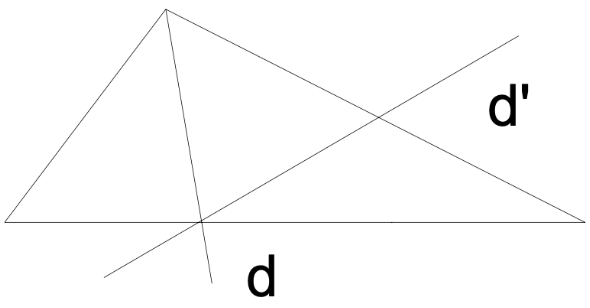
Attention, ces deux triangles ne sont pas superposables, sauf si le triangle a certaines particularités. Sauriez-vous dire lesquelles ?

2. Comment partager un triangle (quelconque) en trois triangles d'aires égales (qui ne se recouvrent pas : on appelle cela une **partition**) ?

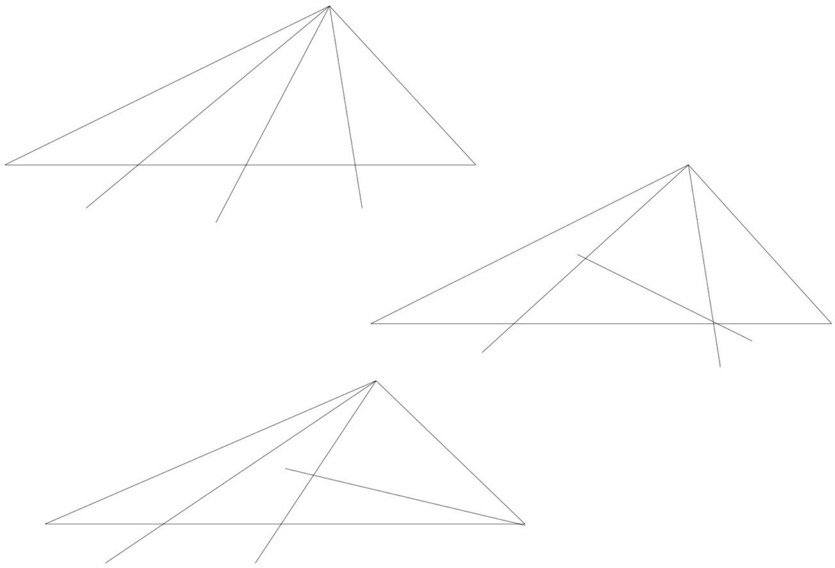
Voici une solution… À vous de construire précisément les deux demi-droites d et d' et de justifier la construction.



3. Voici une autre manière de partitionner ce même triangle en trois triangles d'aires égales. À vous de préciser les constructions et de les justifier.

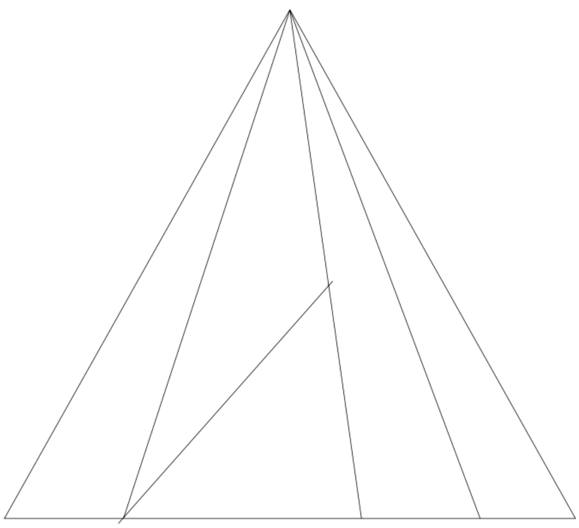


4. Maintenant, on cherche à partitionner un triangle en quatre triangles d'aires égales. Voici trois figures qui suggèrent trois manières différentes de le faire. À vous de préciser les constructions et de les justifier.



5. Pour changer un peu de triangle, on considère maintenant un triangle équilatéral. Comme on vient de le voir, on peut le partager en 2, 3 ou 4 triangles d'aires égales.

Trouvez plusieurs partitions de ce triangle en 5 triangles de même aire. En voici une. Justifiez !



VRAI OU FAUX ? PROUVEZ-LE !

ANNÉE 2011 - N° 85

Lalina COULANGE
IUFM d'Aquitaine - Université de Bordeaux

1. Le produit de deux nombres impairs consécutifs est multiple de 5. VRAI ? FAUX ?
2. Le produit de deux nombres pairs consécutifs est multiple de 4. VRAI ? FAUX ?
3. Le produit d'un nombre impair par un nombre pair est pair. VRAI ? FAUX ?
4. Le produit de trois nombres pairs consécutifs est multiple de 6. VRAI ? FAUX ?

MATHÉMATIQUES EN RIMES

ANNÉE 2011 - N° 87[1]

Valentina Celi

Université Bordeaux IV - IUFM d'Aquitaine

En feuilletant divers livres de récréations mathématiques, j'ai souvent trouvé un curieux problème dont l'énoncé est écrit en rimes dans la langue de Molière et où il s'agit de calculer le nombre d'œufs qu'un gentil cuisinier veut partager entre trois filles.

Le cuisinier courtois

Un jour le cuisinier d'un puissant personnage
Afin de contenter trois filles du village
Qui demandaient des œufs, leur dit en les voyant :
Je vais donner tout ceux que j'ai en le moment.
Il donne la moitié d'abord à la première
Et la moitié d'un œuf, par faveur singulière ;
À la seconde il offre aussi de meilleur cœur
La moitié qui lui reste avec même faveur
Et la moitié d'un œuf dont la fille s'empare.
Enfin continuant son partage bizarre,
Il donne à la troisième avec même amitié
De son troisième reste encore l'humble moitié
Plus la moitié d'un œuf : il eut donc l'avantage
De tout distribuer. Dans cet heureux partage
Qui paraît singulier, combien en avait-il ?
Et comment a-t-il eu l'esprit assez subtil
Pour donner des moitiés à chaque jeune fille
Sans en casser un seul ni s'échauffer la bile ?

Dans sa *Matematica dilettevole e curiosa* (1913), Italo Ghersi raconte que le poème fut introduit par l'écossais John Napier dans sa *Rhabdologie* (1617). Il me semble toutefois plus vraisemblable que le poème en question soit issu de la plume de Pierre-Léon Chavignaud et publié en 1847 dans sa *Nouvelle Arithmétique appliquée au commerce et à la Marina*[2], un ouvrage tout à fait original où les contenus mathématiques sont *ornés des charmes de la poésie*.

Le problème peut être résolu par la voie arithmétique ou, en choisissant convenablement une inconnue, par la voie algébrique.

Pour les plus curieux, vous pouvez lire la solution en rimes proposée par Étienne Mahé sur http://www.univ-rouen.fr/LMRS/Vulgarisation/Oeufs/oeufs.html

[1] Éléments de solution : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-87-petit-x/2-activite-mathematiques-en-rimes-avec-la-solution--512362.kjsp?RH=1550185765406

[2] https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k5450851d.texteImage

LE TRIANGLE RÉVERSIBLE

ANNÉE 2011 - N° 87[1]

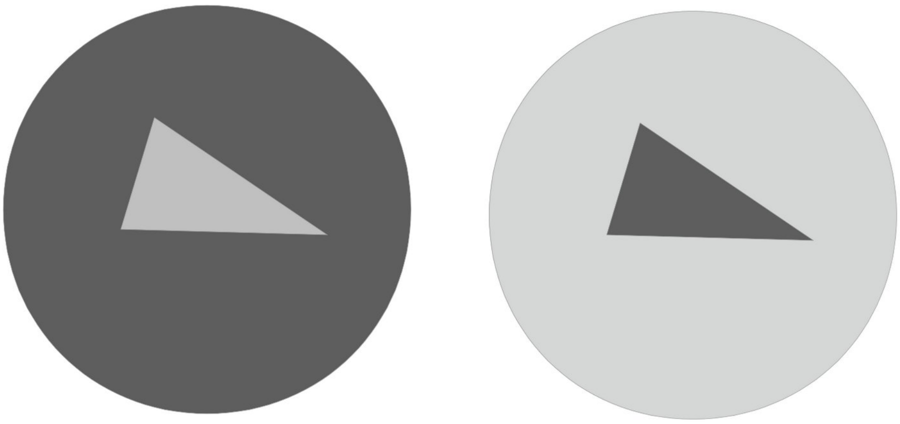
Valentina Celi

Université Bordeaux IV - IUFM d'Aquitaine

Dans un disque double face, noir sur un côté et gris sur l'autre, on coupe une pièce de la forme d'un triangle. Ce triangle aura donc une face noire et une face grise.

On veut ensuite replacer le triangle de sorte à avoir la face grise sur le côté noir du disque et la face noire sur le côté gris.

Si le triangle est isocèle (a fortiori équilatéral), pas de souci… Mais si le triangle n'est pas isocèle, comment peut-on le replacer en respectant la contrainte imposée ?



Avant de replacer le triangle convenablement dans le disque, vous avez le droit de le découper en plusieurs parties, puis de le recoller.

[1] Éléments de solution : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-87-petit-x/4-activite-le-triangle-reversible-avec-la-solution--512364.kjsp?RH=1550185765406

MULTIPLICATION PAR 11

ANNÉE 2012 - N° 88[1]

Valentina CELI

Université Bordeaux IV - IUFM d'Aquitaine

Dans un ancien ouvrage[2] consacré au calcul rapide, nous avons trouvé une méthode pour multiplier par 11 un nombre de deux chiffres. Voici l'extrait en question :

> Il faut distinguer deux cas.
>
> - 1er cas. La somme des deux chiffres qui forment le facteur différent de 11 ne dépasse pas 9. Additionner ces deux chiffres et placer au milieu des deux la somme trouvée.
>
>   Par exemple, pour , on additionne 1 et 7, ce qui fait 8. On écrit le 8 entre le 1 et le 7. Le produit cherché est 187.
> - 2e cas. La somme des deux chiffres qui forment le facteur différent de 11 est au moins égale à 10.
>
>   Additionner ces deux chiffres et placer au milieu des deux l'unité de la somme trouvée, puis augmenter de 100 le nombre ainsi formé. Par exemple, pour , on additionne 8 et 4, ce qui fait 12. On écrit le 2 entre le 8 et le 4 et on obtient 824, on ajoute ensuite 100. Le produit cherché est 924.

1. En utilisant une méthode de ton choix, vérifie que :
   - le produit 17×11 est bien 187
   - le produit 84×11 est bien 924.
2. Justifie de façon générale la méthode décrite ci-dessus.
3. Pour quelles valeurs du facteur différent de 11 a-t-on un produit de quatre chiffres ?

[1] Éléments de solution : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-88-petit-x/2-activite-multiplication-par-11--512286.kjsp?RH=1550185794796

[2] Martel, F. (1907). *Procédés de calcul rapide*. Librairie Armand Colin, Paris, p. 63.

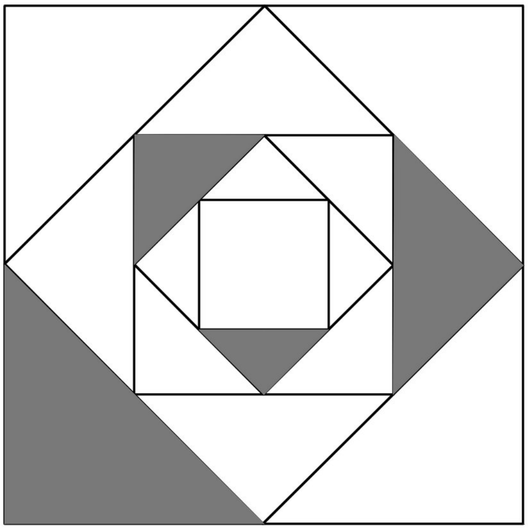
CALCULS D'AIRES DE TRIANGLES DANS DES CARRÉS

ANNÉE 2012 - N° 88

Denise GRENIER

Institut Fourier - Université Grenoble I

Quelle portion d'aire du grand carré représente la réunion des zones sombres ?



AIRE D'UN TRIANGLE : LA FORMULE DE HÉRON

ANNÉE 2012 - N° 89

Denise GRENIER

Institut Fourier - UJF et IREM de Grenoble

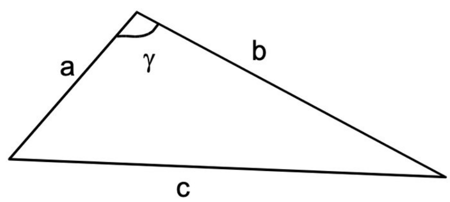
En géométrie, les structures métriques sont fondamentales. Les propriétés de la distance euclidienne telles que spécifiées par la formule de Pythagore suffisent à entraîner toutes les autres propriétés de la géométrie (euclidienne comme affine). En particulier, l'aire qui est une notion affine doit théoriquement pouvoir se calculer par une expression faisant intervenir seulement les distances.

Dans le cas du calcul de l'aire d'un triangle quelconque (abordée maintenant dès le CM2), la seule formule donnée — y compris jusqu'à la fin du collège — est celle utilisant la mesure d'une hauteur relative à un des côtés[1]. Or cette formule, accessible dès que l'on connaît celle de l'aire d'un rectangle, n'est pas si « naturelle » que cela, car ce que l'on connaît le plus souvent d'un triangle est la donnée des mesures de ses trois côtés.

L'activité suggérée ici consiste à établir la formule de Héron, qui donne l'aire d'un triangle quelconque à partir uniquement des mesures *a*, *b* et *c* des trois côtés.

$$A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ où } p=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

***Proposition de calcul*[2]**



Choisissons l'un quelconque des angles du triangle, par exemple γ. On peut utiliser les propriétés suivantes (*cf.* les notations de la figure ci-dessus) :

- $A=\frac{1}{2}.a.b.\sin\gamma$ (on retrouve cette formule en utilisant celle usuelle $A=\frac{1}{2}.b.h$, où h est la mesure de la hauteur relative au côté de mesure b, et l'égalité $h=a\sin\gamma$, sans pour autant avoir besoin de calculer h) ;
- $(\sin x)^2+(\cos x)^2=1$ pour tout angle x ;
- $c^2=a^2+b^2-2.a.b.\cos\gamma$, où γ est l'angle du triangle opposé au côté de mesure c.

On obtient la formule de Héron, écrite uniquement en fonction des mesures a, b et c des trois côtés. Cette formule (déjà connue des Grecs) a de plus l'intérêt d'être symétrique relativement aux trois côtés du triangle.

---

[1] On trouve même parfois des écritures évoquant « la » base par « la » hauteur du triangle, sans explication sur le choix et la non unicité de ces deux éléments.

[2] Un autre calcul est possible, qui utilise les propriétés du cercle inscrit au triangle.

ALLEZ FRANCE !

ANNÉE 2013 - N° 91[1]

Valentina CELI

Université Bordeaux IV - IUFM d'Aquitaine

Georges Perec (1936-1982) est un écrivain français, membre de l'*Oulipo*[2], dont les œuvres sont caractérisées par l'emploi de contraintes formelles, littéraires ou mathématiques. Connu pour ses exercices de style, au cours de sa vie, Georges Perec a aussi exercé ses talents à concocter des jeux de mots ou de logique.

En 1997, la maison d'édition Zulma a édité *Perec/rinations*, un recueil d'activités récréatives publiées précédemment dans *Télérama* entre 1980 et 1981.

Dans cet ouvrage posthume, un problème en particulier a attiré notre attention (p. 29). Nous vous le proposons ci-après.

> À l'occasion d'un match international de football, 321 supporteurs venus d'une petite ville de Touraine débarquent à la gare d'Austerlitz et se précipitent au parc des Princes en prenant d'assaut trois wagons vides de la ligne de métro Austerlitz - Auteuil (aujourd'hui prolongée jusqu'à Boulogne - Jean-Jaurès, mais ceci est sans incidence sur la résolution de notre problème)[3]. Dans la cohue, chacun a un peu perdu ses amis et à la station suivante (Jussieu) les supporteurs essayent de se regrouper. C'est ainsi que :
>
> - la moitié des voyageurs du premier wagon émigre dans le troisième ;
> - quarante voyageurs du deuxième wagon se répartissent moitié-moitié entre le premier et le troisième ;
> - un tiers des voyageurs du troisième wagon va pour un tiers dans le premier wagon et pour deux tiers dans le second.
>
> Au terme de ces regroupements, il se trouve qu'il y a dans chaque wagon le même nombre de supporteurs qu'il y avait au départ. Comment sont donc répartis les 321 supporteurs dans les trois wagons ?

[1] Éléments de solution : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-91-petit-x/2-activite-allez-france--511309.kjsp?RH=1550185889221

[2] http://www.oulipo.net/

[3] Il s'agit de la ligne 10 du métro parisien. Actuellement, cette ligne va de Boulogne - Pont de Saint Cloud à Gare d'Austerlitz : elle a été prolongée d'une station au-delà de Boulogne - Jean-Jaurès.

MULTIPLIER DEUX NOMBRES DE DEUX CHIFFRES

ANNÉE 2013 - N° 91[1]

Valentina CELI

Université Bordeaux IV - IUFM d'Aquitaine

Problème 1

À travers un exemple, on vous propose ici une procédure de calcul *rapide* pour déterminer le produit de deux nombres entiers compris entre 10 et 19 :

Pour calculer le produit de 12 par 17, on procède ainsi :

- on ajoute à 12 le nombre représenté par le chiffre des unités de l'autre facteur, à savoir $12+7=19$
- on multiplie le résultat obtenu 19 par 10 et on obtient ainsi 190 ;
- on ajoute le produit des nombres représentés par les chiffres des unités des deux facteurs : $190+2\times7=204$.

Le produit cherché est alors 204.

(a) Sauriez-vous prouver de façon générale la validité de cette procédure ?

(b) Trouvez une procédure de calcul *rapide* lorsque la somme des nombres représentés par les chiffres des unités des deux facteurs est égale à 10.

(c) De quelle manière peut-on adapter la procédure décrite ci-dessus lorsque les deux facteurs sont compris entre 20 et 29 ?

Problème 2

À travers un exemple, on vous propose une procédure de calcul *rapide* pour déterminer le produit de deux nombres entiers, l'un compris entre 10 et 19 et l'autre entre 20 et 29 :

Pour calculer le produit de 17 par 24, on procède ainsi :

- on ajoute à 24 le double du nombre représenté par le chiffre des unités de l'autre facteur, à savoir $12+2\times7=38$;
- on multiplie le résultat obtenu 19 par 10 et on obtient ainsi 380 ;
- on ajoute le produit des nombres représentés par les chiffres des unités des deux facteurs : $380+7\times4=408$.

Le produit cherché est alors 408.

(a) Sauriez-vous prouver de façon générale la validité de cette procédure ?

(b) Trouvez une procédure de calcul *rapide* lorsque la somme des nombres représentés par les chiffres des unités des deux facteurs est égale à 10.

(c) Trouvez une procédure de calcul *rapide* lorsque la somme des nombres

représentés par les chiffres des unités des deux facteurs est égale à 20.

Problème 3

Sauriez-vous trouver une procédure de calcul *rapide* pour déterminer le produit de deux nombres entiers, l'un compris entre 10 et 19 et l'autre entre 31 et 99 ?

---

[1] Éléments de solution : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-91-petit-x/5-activite-multiplier-deux-nombres-de-deux-chiffres--511335.kjsp?RH=1550185889221

SYLLOGISMES

Année 2013 - n° 92

Denise GRENIER

Institut Fourier - UJF et IREM de Grenoble

En logique mathématique, le syllogisme est un raisonnement où la conjonction de deux propositions conduit à une conclusion : si les deux propositions données sont supposées vraies, alors la conclusion est vraie. Un exemple célèbre, attribué à Aristote, illustre bien de quoi il s'agit : *« Tous les hommes sont mortels, or Tous les Grecs sont des hommes, donc Tous les Grecs sont mortels »*.

ATTENTION. Le raisonnement suivant : « Presque tous les enfants de ma classe ont les cheveux bruns, et Anne est dans ma classe, donc Anne a les cheveux bruns », est FAUX, car il y a des enfants dans la classe qui n'ont pas les cheveux bruns et Anne est peut-être parmi eux (ou non), on n'en sait rien. La conclusion est donc FAUSSE.

Question. Pour chacun des raisonnements suivants, dites s'il est juste ou faux. Justifiez.

R1. Aucune personne de cette famille n'est malade, et vous êtes malade, donc vous n'êtes pas de cette famille.

R2. Aucune personne de cette famille n'est malade, et vous n'êtes pas malade, donc vous êtes de cette famille.

R3. Tous les chats de mon quartier sont noirs, et le chat que je vois est gris, donc ce chat n'est pas de mon quartier.

R4. Tous les chats de mon quartier sont noirs, et le chat que je vois est noir, donc ce chat est de mon quartier.

R5. Aucun des chats de mon quartier n'est noir, et ce chat est gris, donc ce chat est de mon quartier.

R6. Tous les copains de Zoé ont obtenu au moins 11/20, et certains copains de Zoé sont des glandeurs, donc certains glandeurs ont eu la moyenne (10/20).

R7. Tous les copains de Zoé ont obtenu au moins 11/20, et certains copains de Zoé sont des glandeurs, donc tous les glandeurs ont eu la moyenne (10/20).

Note. Ces quelques exemples peuvent bien sûr en inspirer d'autres, y compris avec des propositions mathématiques.

DES TRIPLETS PYTHAGORICIENS CACHÉS DANS DES TRIANGLES

ANNÉE 2013 - N° 93

Denise GRENIER
Institut Fourier - UJF et IREM de Grenoble

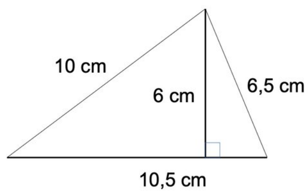
En géométrie du triangle, les mesures dont on a « naturellement » besoin diffèrent selon que l'on veut déterminer le périmètre ou l'aire d'un triangle donné. Ainsi, dans les formules proposées dès la fin du primaire, si la question est le calcul du périmètre, on donne les mesures des trois longueurs, et si la question est le calcul de l'aire, on donne celles d'une hauteur et d'une « base ». Cependant, au collège, peu de manuels précisent que, si la donnée des mesures des trois côtés définit un seul triangle à une isométrie près, celle des mesures d'une base et d'une hauteur correspondent à un ensemble infini de triangles. De fait, très peu d'exercices proposés aux élèves « mélangent » les deux questions : calcul du périmètre et de l'aire d'un triangle donné. De plus, au lycée, la formule de Héron est peu travaillée, or le calcul de l'aire d'un triangle (unique) à partir de la donnée des mesures de ses trois côtés est pourtant une bonne occasion de travailler la trigonométrie (mais ce n'est pas notre sujet ici).

Quel rapport avec les triplets pythagoriciens ?

Tout d'abord, un rappel. Un triplet pythagoricien est un triplet d'entiers naturels non nuls $(x\,;y\,;z)$ vérifiant la relation de Pythagore : $x^2+y^2=z^2$. Il en existe une infinité, le plus connu étant probablement le triplet $(3\,;4\,;5)$. En géométrie, ces trois nombres représentent les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.

En feuilletant des manuels sur ce sujet, j'ai trouvé des exercices où on donnait à la fois les longueurs des trois côtés d'un triangle et la longueur d'une hauteur. Il y avait donc une donnée « redondante ». Et tous ces nombres étaient pourtant des entiers ou des décimaux simples ! Il s'agissait, selon les cas, soit de valeurs très particulières, soit de valeurs approximatives. En voici un exemple (manuel de 6e, 2009).

Calculer l'aire de ce triangle

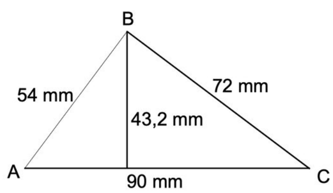


Les valeurs sont exactes, on peut le vérifier en utilisant le théorème de Pythagore.

En fait, c'est parce que les quatre nombres cachent les triplets pythagoriciens $(3\,;4\,;5)$ et $(5\,;12\,;13)$.

Vérifiez et trouvez-les !

Voici un autre exercice (toujours dans le manuel de 6e), où on demandait de calculer l'aire de *ABC* de deux manières différentes. Les longueurs données sont-elles toutes exactes ? Si oui, quels triplets de Pythagore sont cachés dans les mesures proposées ?



AIRES ET PROPORTIONS

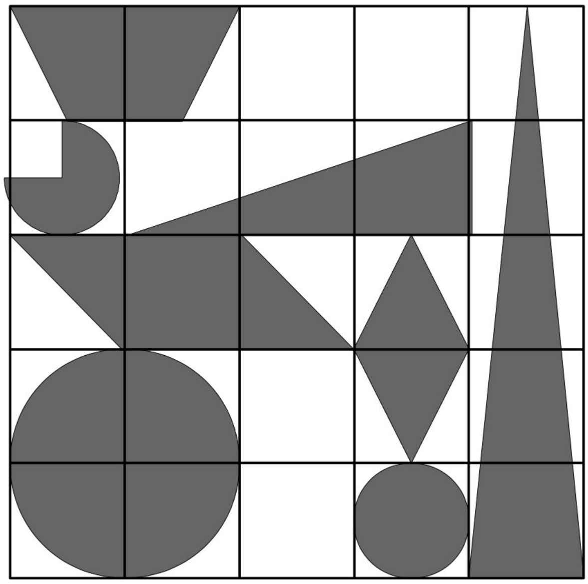
ANNÉE 2014 - N° 94

Denise GRENIER

Institut Fourier - Université de Grenoble et IREM de Grenoble

Quelle portion d'aire du grand carré représente la réunion des zones sombres ?

Les figures sont respectivement : un losange, un trapèze isocèle et un parallélogramme, un triangle isocèle, un triangle rectangle, deux disques et une partie d'un autre disque.



TRADUIRE DES PARTAGES ET DES PROPORTIONS

ANNÉE 2014 - N° 94

Denise GRENIER

Institut Fourier - Université de Grenoble et IREM de Grenoble

Traduire un problème « concret » dans un cadre mathématique, pour le résoudre, fait partie des compétences qui sont au programme de tout le collège (et au-delà). Une autre compétence, associée à la première, consiste à reconnaître, parmi des modèles existants, celui qui est compatible et pertinent pour le problème posé. Ces deux types de tâche font partie de l'activité de modélisation en mathématique. Bien sûr, la modélisation se réduit très souvent, en classe, à des mises en expressions numériques, mais cette tâche elle-même ne va pas de soi et nécessite un vrai travail pour tous les élèves du secondaire.

Pour résoudre le problème 1 donné ci-après, il faut repérer les données pertinentes, trier les objets et les relations entre ces objets, et « traduire » tout cela en opérations.

Dans le problème 2 (page suivante), il faut reconnaître quelle(s) expressions numériques, parmi plusieurs proposées, sont compatibles avec l'énoncé et vont fournir la solution, et à quelles représentations et procédures de calcul chacune correspond.

Problème 1. Des boules et des couleurs…

Dans une boîte, il y a 45 boules unicolores de trois couleurs : bleue, verte et rouge.

On sait que :

- il y a deux fois plus de boules vertes que de boules bleues,
- et il y a trois fois plus de boules rouges que de boules vertes.

Combien y-a-t-il de boules de chaque couleur, et quelle proportion représente chacune des couleurs ?

On rajoute ensuite dans cette boîte 13 boules bleues, 8 boules vertes et 6 boules rouges.

Calculer la nouvelle proportion des boules dans chacune des couleurs.

Problème 2. Partage de billes

Quatre enfants se partagent un paquet de billes de la manière suivante : le premier en prend le quart et passe le paquet au second qui prend les deux cinquièmes du reste, qui le passe au troisième qui prend le tiers du nouveau reste.

Question 1.

Quelle(s) opération(s) permettent de calculer la part du quatrième ?

(a) $1-\frac{1}{4}-\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$ (b) $\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)$ (c) $1-\left(\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}\right)$

(d) $\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}$ (e) $1-\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{10}+\frac{3}{20}\right)$ (f) autre…

Question 2.

Écrire un énoncé de problème qui correspond au calcul donné en (a).

UNE ÉNIGME POLICIÈRE

ANNÉE 2014 - N° 94

Guillaume LEBRAT
Étudiant en Licence 3 de mathématiques - UJF Grenoble

Scénario

Dans un immeuble du quartier Étoile, la danseuse qui habitait au n° 9 a été enlevée. La police a retenu onze suspects, habitant tous dans l'immeuble. Parmi eux, il y a un coupable et un complice, tous les deux mentent toujours. Les neuf autres personnes disent la vérité.

On ne dispose que des affirmations suivantes, une de chacun des habitants de l'immeuble.

Qui est le coupable, et qui est le complice ?

Plombier « Le coupable n'habite pas à l'étage tout en bas » **10**	**Marin** « Le coupable ne se trouve pas dans ma colonne » **11**	**Pompier** « L'habitant du n°1 n'est pas complice » **12**
Serveuse « Le coupable n'est ni mon voisin du dessus, ni celui du dessous » **7**	**Boucher** Le coupable habite l'étage juste en dessous du mien ou celui du dessus **8**	**9**
Médecin « Le coupable habite à un numéro pair » **4**	**Garagiste** « Le complice n'est pas le marin » **5**	**Électricien** « L'habitant du n°12 dit vrai » **6**
Jardinier « Je ne suis pas coupable » **1**	**Coiffeuse** « Le coupable n'est pas à l'étage de la danseuse » **2**	**Boulanger** « Le coupable ne se trouve pas à mon étage » **3**

MULTIPLICATION : UNE DRÔLE DE COMMUTATIVITÉ !

ANNÉE 2014 - N° 95[1]

Valentina CELI

ESPE d'Aquitaine, Université de Bordeaux

1. Calculez le produit de 34 par 86.

Calculez ensuite le produit de 68 par 43.

Que remarquez-vous sur le résultat des deux multiplications ?

Quels liens les nombres 68 et 43 ont-ils avec les nombres 86 et 34 ?

2. Suivez la même procédure avec les nombres 23 et 96. Parvenez-vous bien à la même conclusion ?

3. Identifiez la caractéristique commune aux deux cas traités et prouvez-la dans le cas général.

4. Est-il possible de déterminer de façon exhaustive tous les couples de nombres entiers naturels à deux chiffres qui respectent la caractéristique en question ?

[1] Éléments de solution : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-96-petit-x/2-activite-multiplication-une-drole-de-commutativite-elements-de-solution--508621.kjsp?RH=1550186020984

UNE HISTOIRE DE TONNEAUX

ANNÉE 2014 - N° 95[1]

Valentina CELI

ESPE d'Aquitaine

Nous vous proposons un problème remontant au début du 20e siècle et originaire du Royaume Uni[2] :

> Un vigneron achète six tonneaux, dont un contient de la bière et les autres du vin.
>
> Les six tonneaux contiennent respectivement : 15 gallons[3], 31 gallons, 19 gallons, 20 gallons, 16 gallons et 18 gallons de liquide.
>
> Le vigneron garde pour lui la bière et vend tous les tonneaux de vin à deux autres personnes, dont l'un se trouve acheter le double de gallons de vin que l'autre.
>
> Combien de gallons de bière le vigneron garde-t-il dans son tonneau ?

[1] Éléments de solution : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-96-petit-x/6-activite-une-histoire-de-tonneaux-elements-de-solution--508646.kjsp?RH=1550186020984

[2] D'après *The greatest puzzles ever solved* (2009, Carlton Books Limited).

[3] Un *gallon UK* vaut 4,5461 *L*.

L'AUBERGE AUTRICHIENNE

ANNÉE 2014 - N° 96

Valentina CELI
ESPE d'Aquitaine

Un groupe est constitué de quarante et une personnes comprenant des hommes, des femmes et des enfants. Ils dînent tous dans une auberge. Leur addition s'élève à 40 groschen[1]. Ils la partagent de manière à ce que chaque homme paye 3 groschen, chaque femme paie 2 groschen et chaque enfant paie 1/3 de groschen.

Peut-on déterminer exactement combien d'hommes, de femmes et d'enfants composent ce groupe de quarante et une personnes ?

[1] Le groschen est une ancienne unité monétaire de l'Autriche utilisée de 1925 à 2002. En 2002, le schilling, qui valait 100 groschen, a définitivement été remplacé par l'euro.

PAIRS OU IMPAIRS ?

ANNÉE 2015 - N° 97

Denise GRENIER
Institut Fourier - Université de Grenoble

Arthur a pensé à trois nombres entiers *a*, *b*, *c*, il ne dit pas lesquels. Mais il donne pour indications quatre phrases, en affirmant qu'**une seule d'entre elles est fausse**.

Peux-tu trouver laquelle est fausse, et combien de nombres impairs Arthur a choisis ?

A1. *a* est impair ou *b* est pair.

A2. *c* et *b* sont de même parité[1].

A3. *c* et *a* sont pairs.

A4. *b* est pair.

[1] tous les deux pairs OU tous les deux impairs.

LE PRINCIPE DES « CAGES À PIGEONS »

ANNÉE 2015 - N° 98

Denise GRENIER
Institut Fourier et IREM de Grenoble

Questions

(1) Faites cette expérience plusieurs fois :

- Choisir cinq nombres entiers naturels.
- Vérifier qu'au moins deux d'entre eux ont une différence qui est un multiple de 4. Expliquer ce résultat.

(2) Si vous choisissez quatre nombres seulement, est-ce encore vrai ?

À nouveau, faites plusieurs expériences pour avoir la bonne conjecture !

(3) Généralisation. On suppose maintenant qu'on se donne $n+1$ entiers naturels. Prouver qu'au moins deux d'entre eux ont une différence qui est un multiple de n.

Éléments de solution

Le « principe des cages à pigeons » est un outil performant pour résoudre ces questions. En voici un énoncé.

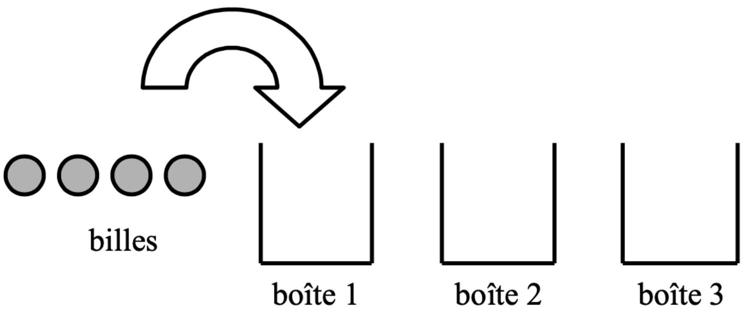
Principe des « cages à pigeons »[1]

Quel que soit n (un entier naturel), si on a rangé n+1 objets dans n boîtes, alors au moins une de ces boîtes contient deux objets ou plus.

Le travail essentiel consiste à déterminer parmi les données, lesquelles il faut choisir pour les « cages » et lesquelles pour les « pigeons ».

Ici, les cages et les pigeons sont des nombres, mais pas les mêmes types de nombres. L'énoncé de base de ce principe est très facile à comprendre. Le voici.

Exemple. Quelle que soit la façon de ranger quatre billes dans trois boîtes, il y aura au moins une boîte qui contiendra deux billes — c'est-à-dire deux, trois ou quatre billes. Essayez ! (dans cet exemple, $n=4$).



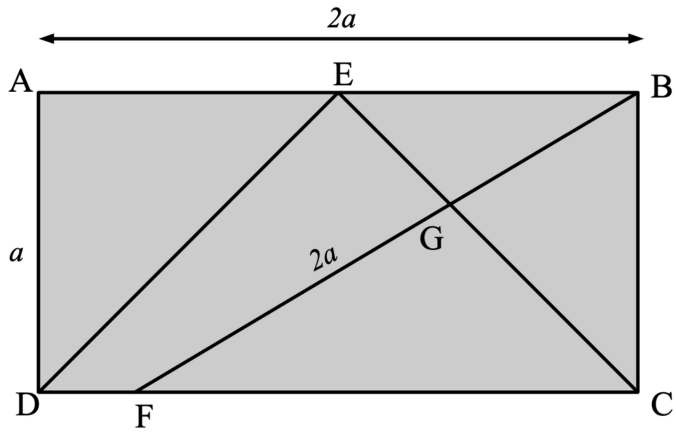
[1] ou « principe de Dirichlet ». La preuve de ce principe n'est pas très difficile. Essayez !

UN PUZZLE - DES CONSTRUCTIONS !

ANNÉE 2015 - N° 98

Denise GRENIER
Institut Fourier et IREM Grenoble

Question 1. Tracer et découper le puzzle de cinq pièces ci-dessous, en choisissant une valeur pour la longueur a (par exemple $a=8$) et en respectant les propriétés de la figure indiquées.



$ABCD$ est un rectangle,

$AB=2.AD$,

E est le milieu de $[AB]$,

F est sur $[DC]$ tel que $BF=AB$,

G le point d'intersection de (EC) et (BF).

On note $a=AD$.

Question 2. En réordonnant les cinq pièces du puzzle, pouvez-vous construire :

- un parallélogramme qui ne soit pas un rectangle ?
- un carré ?
- un trapèze qui ne soit pas un parallélogramme ?
- un losange qui ne soit pas un carré ?

UNE ÉNIGME

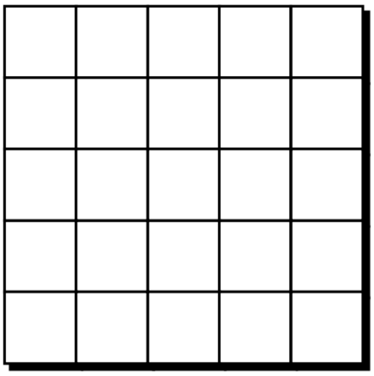
ANNÉE 2015 - N° 99

Denise GRENIER
Institut Fourier et IREM de Grenoble

Problème

Dans un carré de 5×5 cases comme ci-dessous, dessinez des croix dans les cases de votre choix, autant que vous voulez (donc, ce peut être de 0 à 25), en respectant les règles suivantes :

> *« Deux lignes ne doivent pas avoir le même nombre de croix ; deux colonnes ne doivent pas avoir le même nombre de croix ; une colonne et une ligne ne doivent pas avoir le même nombre de croix ».*



Essayez ensuite avec un carré 6×6, ou un 4×4…

Que constatez-vous ? Pouvez-vous expliquer pourquoi ?

LE PRINCIPE DES « CAGES À PIGEONS » (SUITE)

ANNÉE 2015 - N° 99

Denise GRENIER

Institut Fourier et IREM de Grenoble

Note. Cette activité s'inscrit comme une suite à l'activité « Le principe des cages à pigeons »[1] proposée dans le numéro 98 de *Petit x* (p. 28).

Voici deux problèmes amusants. Essayez de les résoudre le plus « naturellement » possible, avec les méthodes que vous voulez.

Problème 1

Pour faire sa valise, Charlie rassemble toutes ses chaussettes pour en choisir deux paires identiques (quatre de la même couleur). Elle ne possède que des chaussettes de couleur rose, bleue ou verte. Elle en prend sept au hasard. Est-elle sûre d'en avoir quatre de la même couleur ? Est-il vrai que trois au moins d'entre elles sont de la même couleur ?

Charlie cherche encore dans ses tiroirs et en retrouve trois autres. Elle en a alors dix. Est-elle sûre maintenant d'avoir quatre chaussettes de la même couleur ?

Problème 2

La conjecture suivante est-elle vraie ou fausse ?

« Dans une assemblée de 25 personnes, au moins trois personnes sont nées le même mois ».

Si une personne s'en va, est-ce la même réponse ?

Qu'est-ce que ces deux problèmes ont en commun ? En fait, comme dans l'activité précédente (*Petit x*, n° 98, p. 28), on peut définir des « cages » (ou des boîtes) et des « pigeons » (des objets à mettre dans des boîtes), et raisonner ainsi :

On dispose de n tiroirs pour ranger P objets. Si n et P vérifient $P = n.k+1$, alors il y aura un tiroir (ou plusieurs) contenant au moins $k+1$ objets.

C'est le « principe des cages à pigeons généralisé » ou principe de Dirichlet généralisé.

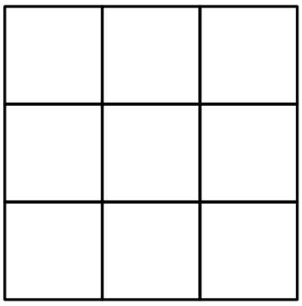
[1] Rappel du « principe des cages à pigeons » : « Quel que soit n (un entier naturel), si on a rangé $n+1$ objets dans n boîtes, alors au moins une de ces boîtes contient deux objets ou plus ».

PARTAGE D'UN CARRÉ EN *n* CARRÉS

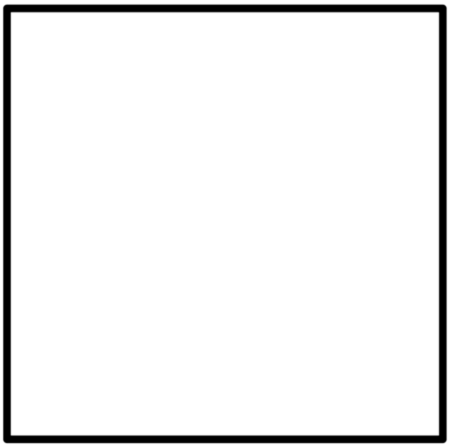
ANNÉE 2016 - N° 100[1]

Groupe Logique, raisonnement et SiRC
IREM de Grenoble

Il est facile de partager un carré en 9 carrés, comme ceci :



Mais pouvez-vous partager le carré ci-dessous en 6 carrés ? Attention, ceux-ci ne doivent pas se chevaucher et ils doivent tout recouvrir. Et ils ne sont pas forcément égaux…



On peut aussi se poser la question plus générale : pour quelles valeurs de *n* est-il possible de partager un carré de taille quelconque en *n* carrés ?

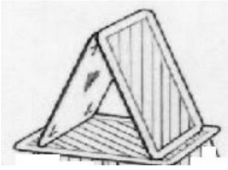
[1] Éléments de solution : dans la brochure « Situations de Recherche pour la Classe : expérimenter, conjecturer et raisonner en Mathématiques, au collège, au Lycée et… au delà » Groupe Logique, Raisonnement et SiRC, éd. IREM de Grenoble, mars 2016.

UN CHÂTEAU DE CARTES

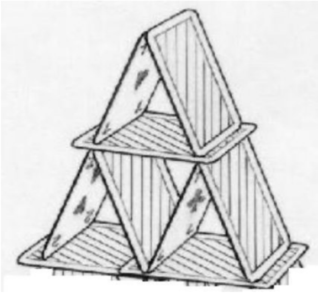
ANNÉE 2016 - N° 101[1]

Hervé BARBE
IREM de Grenoble

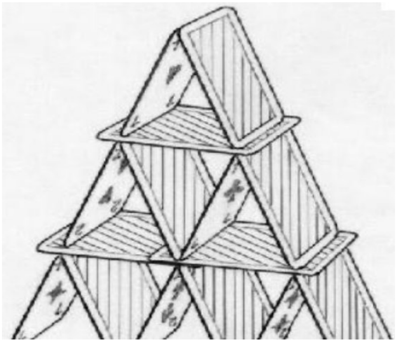
Jérôme souhaite créer un château avec un paquet de 32 cartes. Au début, il pose trois cartes (étape 1).



Puis il pose de nouvelles cartes (sur un côté, puis dessus) comme sur le dessin de droite (étape 2).



Il continue sa construction en posant encore de nouvelles cartes sur le château de l'étape 2 (étape 3).



Et ainsi de suite…

Questions

1. Jusqu'à quelle hauteur peut-il aller avec ses 32 cartes ? Et combien de cartes lui restera-t-il ?
2. Pour faire un plus grand château, Jérôme décide de recommencer avec un jeu de tarot, qui comporte 72 cartes. Quelle sera la hauteur du nouveau château ?
3. Combien de cartes lui faudrait-il pour construire un château de 10 étages ?

[1] Éléments de solution :

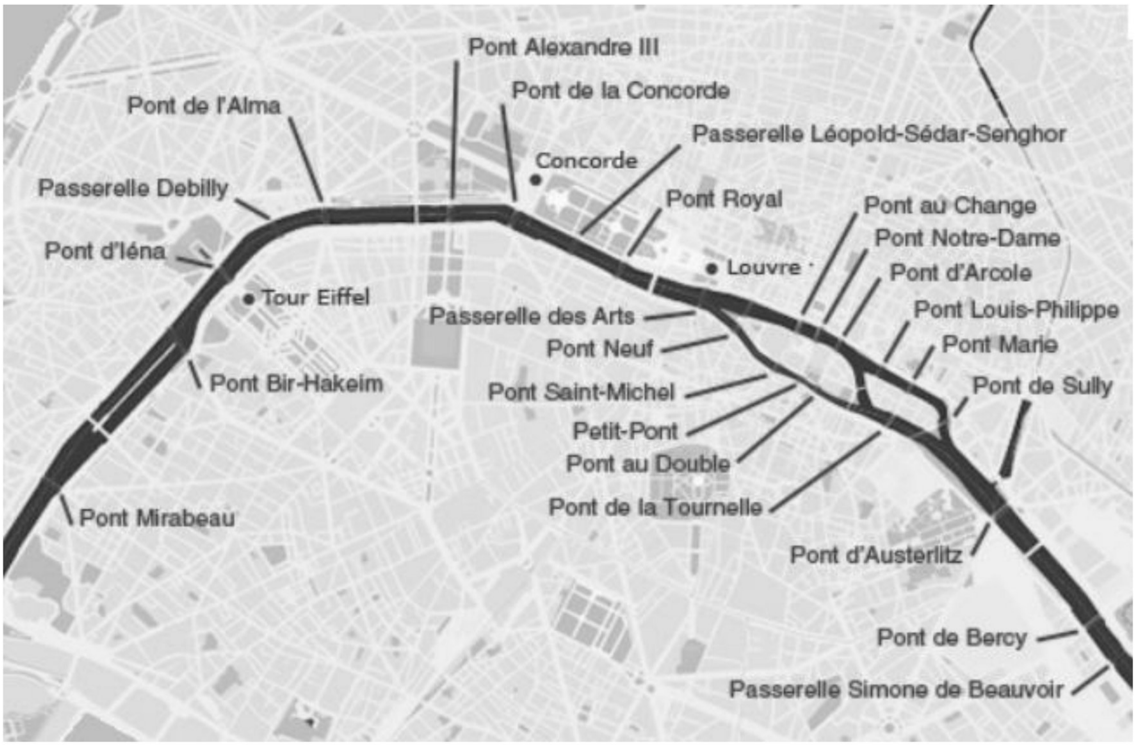
SUR LES PONTS DE PARIS

ANNÉE 2016 - N° 101

Hervé BARBE
IREM de Grenoble

Les ponts de Paris sont d'autant plus beaux qu'ils sont tous différents.

Est-il possible de trouver une promenade qui emprunte une et une seule fois chacun des ponts de cette carte ?



DÉCOUPE D'UN AQUARIUM DANS UNE SPHÈRE

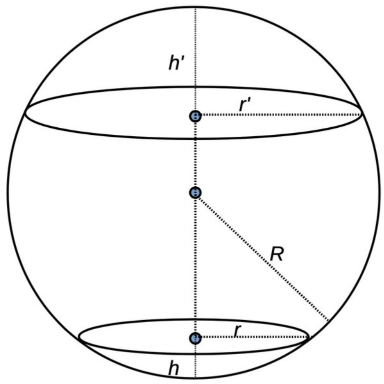
ANNÉE 2016 - N° 102

Denise GRENIER
Institut Fourier - Université Grenoble Alpes

Un verrier veut fabriquer un grand aquarium (de luxe) dans une sphère creuse en verre. Il doit pour cela découper deux calottes sphériques parallèles, une petite pour la base de l'aquarium et une grande pour l'ouverture haute (il devra ensuite fondre un disque en verre pour fermer la base du récipient).

Avant de découper, le verrier doit calculer, pour chacune des calottes sphériques, le diamètre du cercle défini par le plan de section et sa hauteur (distance entre le sommet de la sphère et le plan de section).

On note R le rayon de la sphère. Les deux calottes sphériques seront coupées à des hauteurs h et h'. On note r et r' les rayons des cercles définis par les plans de section, et d et d' leurs diamètres respectifs. La figure ci-dessous précise ces données. Dans tout le problème, on négligera l'épaisseur du verre.



Questions

(1) Écrire les relations entre h, r et R d'une part et h', r' et R d'autre part.

(2) Le maître verrier dispose d'une sphère de diamètre 50 *cm*. À quelle hauteur h' doit-il couper la sphère pour que l'ouverture soit un cercle de diamètre $d'=48\,cm$? Quel sera le diamètre du cercle de base pour que la hauteur de la calotte basse soit $h=1\,cm$?

(3) Question « pour aller plus loin »

Le volume d'une calotte sphérique de hauteur h, découpée dans une sphère de rayon R, et dont le cercle du plan de section est de rayon r est donné par les formules :

$$V_{cal}=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)=\frac{1}{2}\pi h\left(r^2+\frac{h^2}{3}\right)$$

Calculer le volume de l'aquarium d'abord avec les données de la question 2, puis dans le cas général.

Note. Si $h=R$, on retrouve le volume de la demi-sphère. Vérifiez !

LE COÛT DE LA PERLE CENTRALE

ANNÉE 2016 - N° 102

Valentina CELI

ESPE d'Aquitaine, Lab-E3D, Université de Bordeaux

Henry Ernest Dudeney (Royaume Uni, 1857-1930) est connu dans le domaine des mathématiques récréatives car créateur de nombreux casse-tête numériques et logiques.

Nous vous proposons ici le problème d'un collier de perles dont on cherche le coût de la perle centrale, à partir des renseignements suivants :

- le collier est constitué de trente-trois perles ;
- il vaut 65 000 £ ;
- les perles sont disposées de manière que la plus grosse et la plus chère occupe la place centrale ;
- les perles les moins chères se trouvent à chaque extrémité ;
- en partant d'une extrémité, les perles augmentent en valeur de 100 £ chacune, jusqu'à la perle centrale comprise ;
- en partant de l'autre extrémité, l'écart est de 150 £ de plus à chaque perle jusqu'à la perle centrale comprise.

Combien la perle centrale vaut-elle ?

TRIANGLES DE CARTES

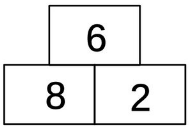
ANNÉE 2017 - N° 103

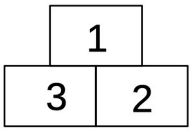
Hervé BARBE
Lycée Saint-Jean-Bosco, Cluses et IREM de Grenoble

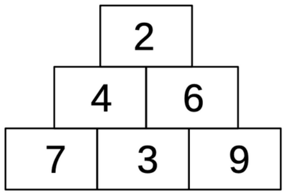
Triangle absolu

Un **triangle absolu** est une pyramide de pavés numérotés par des entiers naturels de telle sorte que chacun d'eux indique la différence en valeur absolue entre les nombres des deux pavés sur lesquels il repose. Un même entier ne peut être utilisé qu'une seule fois.

Voici trois exemples de triangles absolus à deux et trois étages.





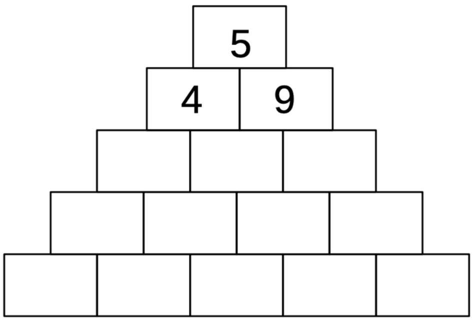


Questions

On se donne une contrainte supplémentaire : réaliser des triangles absolus à 2, 3, 4 étages utilisant tous les premiers nombres naturels successifs différents de 0. Le second exemple ci-dessus est un triangle absolu à deux étages vérifiant cette contrainte supplémentaire (il utilise les trois premiers nombres entiers non nuls : 1, 2 et 3).

1. Cherchez un triangle absolu à trois étages avec les nombres de 1 à 6, puis un triangle absolu à quatre étages avec les nombres de 1 à 10. Y en a-t-il plusieurs ?

2. En utilisant les entiers de 1 à 15, compléter la pyramide ci-dessous :

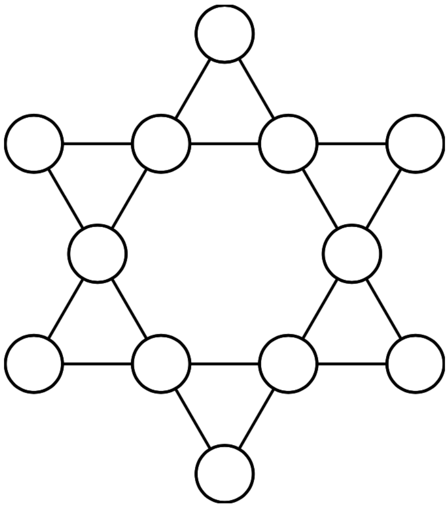


Question subsidiaire

Pouvez-vous trouver un triangle absolu à six étages en utilisant tous les nombres entiers de 1 à 21 une seule fois ?

Étoile magique

On dit que cette étoile est **magique** ssi, en additionnant les nombres de n'importe quel segment, on tombe toujours sur la même somme.



Question

Sur cette étoile, placez tous les nombres de 1 à 12 (une fois et une seule) pour qu'elle devienne magique.

Indice. *Chaque somme doit faire 26.*

Pour aller plus loin

Peut-on construire une étoile magique à 5 branches avec les nombres de 1 à 10 ?

UN RÉSULTAT SURPRENANT

Année 2017 - n° 104

Hervé BARBE

Institution Ohalei Mena'Hem, HABAD, Genève

On considère le nombre à trois chiffres 471.

On répète les trois chiffres de façon à obtenir un nombre à six chiffres : 471 471.

Divisez ce nombre par 7, puis le nombre obtenu par 11, puis ce dernier résultat par 13.

(vous avez droit à la calculatrice, mais essayez sans…)

Qu'obtenez vous ? Étonnant, non ?

Essayez avec d'autres nombres à trois chiffres. Si vous n'avez pas fait d'erreurs, vous devez obtenir ce même résultat surprenant.

Cela fonctionne-t-il pour tous les nombres à 3 chiffres ? Le démontrer.

Pour aller plus loin

On part maintenant d'un nombre à 4 chiffres, par exemple 4 715, on répète les quatre chiffres pour faire un nombre à huit chiffres : 47 154 715.

Trouver une suite de divisions qui permet de retrouver le nombre à quatre chiffres 4 715.

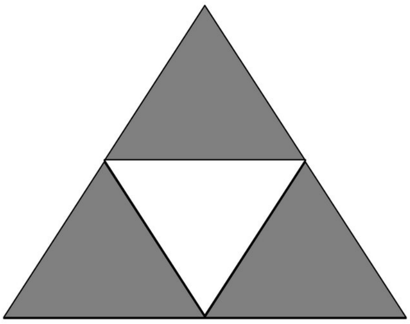
PARTAGE D'UN TRIANGLE ÉQUILATÉRAL EN TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX

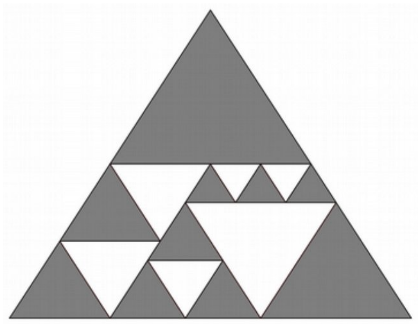
ANNÉE 2017 - N° 105

Denise GRENIER
Université Grenoble Alpes

Dans la figure de gauche ci-dessous, on a partagé un triangle équilatéral en quatre triangles équilatéraux (on a alterné les couleurs blanc/gris pour qu'ils soient bien visibles.

Dans celle de droite, on a aussi partagé le triangle équilatéral en triangles équilatéraux, de trois tailles différentes. Vérifiez, il y en a seize.





Question

Dessinez un triangle équilatéral (assez grand) sur une feuille. Pouvez-vous le partager en 6 triangles équilatéraux ? Cherchez aussi un partage en 5, puis en 7, en 8.

Pour les plus motivés

Pour quelles valeurs de *n* peut-on paver un triangle équilatéral en *n* triangles équilatéraux ?

LES NOMBRES TRIANGULAIRES

ANNÉE 2017 - N° 106

Christian LARUE

Lycée Saint-Cricq - Pau

Cette activité est destinée à un travail sur l'algèbre au lycée. L'objectif est d'établir un lien entre une preuve visuelle et la preuve algébrique classique concernant l'identité $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, à partir de la reconnaissance d'une régularité dans le calcul[1].

L'activité se base donc sur des schémas et doit permettre aux élèves de reconnaître cette régularité — en anglais, un *pattern* — qui permet ensuite d'inférer des moyens de calcul et de trouver la formule du $n^{ième}$ nombre T_n. On vise la perception par les élèves du caractère générique des productions figuratives, pour établir l'écriture générale de la somme des n premiers nombres entiers sans passer par un formalisme lié aux suites numériques.

Étape 1

Faire dessiner la suite des nombres triangulaires, comme ci-après (figure 1), et les calculer.

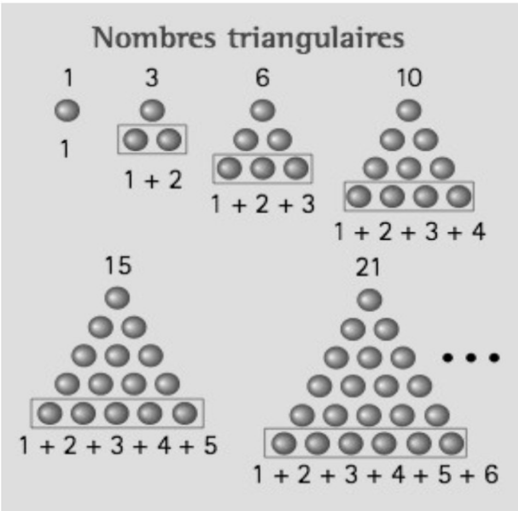


Figure 1 *: Représentation de T_1 à T_9.*

On peut utiliser des dessins comme en figure 2, afin de montrer la progression des schémas.

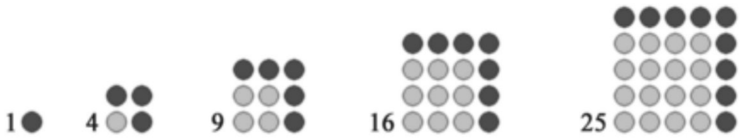


Figure 2 *: Principe d'extension des figures numériques.*

[1] Cette activité a été expérimentée en anglais dans une classe européenne de lycée.

Étape 2

Établir la preuve de la formule de T_n (voir figure 3).

Elle peut être obtenue selon le calcul classique, ici pour T_9 :

- $T_9 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9$
- $T_9 = 9+8+7+6+5+4+3+2+1$
- d'où $2T_9 = 10+10+10+10+10+10+10+10+10 = 9 \times 10$
- donc $T_9 = ...$

On pourra représenter ce processus de calcul dans un schéma comportant les *patterns* visés, le nombre cherché apparaissant deux fois, dans des couleurs différentes, pour former un rectangle facilement dénombrable.

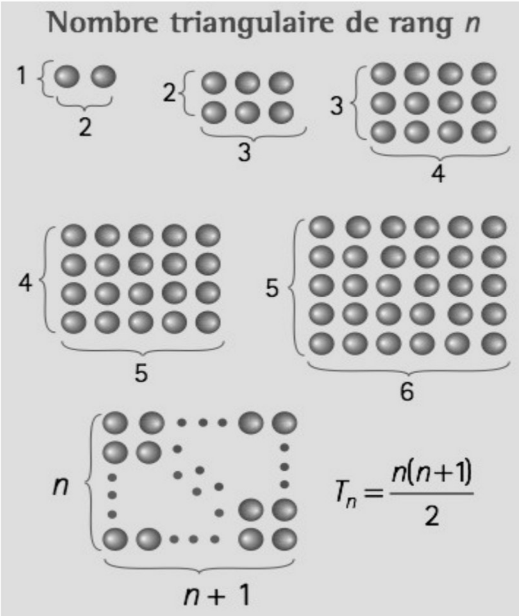


Figure 3 *: Calcul de T_n.*

Un dernier résultat

En s'aidant aussi d'un coloriage adéquat de la figure 2, ou par un calcul algébrique utilisant les formules, on montrera que $T_n + T_{n-1} = n^2$. Amusez-vous bien !

LES NOMBRES GLISSANTS

ANNÉE 2018 - N° 107[1]

Valentina CELI

ESPE d'Aquitaine, Université de Bordeaux

Avertissement. *Tous les nombres dont il est question dans cet énoncé sont des nombres écrits en base 10.*

Définition d'un nombre **glissant** :

Le nombre G, entier naturel à n chiffres (n, entier naturel non nul), est **glissant** s'il peut s'écrire comme la somme de deux entiers naturels a et b, pas nécessairement égaux, et de sorte que la somme des inverses de a et b soit égale à $\frac{G}{10^n}$.

Si G un nombre entier naturel à *deux* chiffres, on dira alors que G est **glissant** s'il peut s'écrire comme la somme de deux entiers naturels a et b, pas nécessairement égaux, et de sorte que la somme des inverses de a et b soit égale à $\frac{G}{10^2}$.

Par exemple, 20 est un nombre **glissant** (à deux chiffres), avec $a=b=10$, car $20=10+10$ et $\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{20}{100}$.

1. Trouver tous les nombres **glissants** à deux chiffres.
2. Il existe aussi des nombres **glissants** à trois chiffres.
3. 101 est-il un nombre **glissant** (avec $a=1$ et $b=100$) ?
4. Déterminer tous les nombres **glissants** à trois chiffres.
5. Existe-t-il des nombres **glissants** à un chiffre ? Si oui, lesquels ?
6. Trouver au moins un nombre **glissant** à quatre chiffres.
7. Trouver au moins un nombre **glissant** à plus de quatre chiffres.

[1] Éléments de solution : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-108-petit-x/4-activite-les-nombres-glissants-elements-de-solution-571674.kjsp?RH=1550186395537

UNE HISTOIRE DE CUBES INSÉCABLES

ANNÉE 2019 - N° 109[1]

Mickaël DA RONCH
Université Grenoble Alpes
Institut Fourier, équipe Combinatoire et Didactique

Le problème de pavages insécables en dimension 3 présenté ci-après est issu d'un problème déjà étudié en dimension 2, le problème de « Carrés insécables ». Celui-ci a notamment été analysé par le groupe « logique, raisonnement et SiRC » de l'IREM de Grenoble (Brochure SiRC, 2017, pp. 53-67).

L'étude du problème de Carrés insécables est apparue lors de l'exhibition d'un pavage particulier du plan par des pavés carrés. En effet, la figure ci-après met en évidence

> *un pavage du plan par des carreaux (carrés) dont la particularité est qu'on ne peut tracer aucune droite traversant le pavage horizontalement ou verticalement sans couper au moins un carré du pavage. On dira qu'un tel pavage est **insécable** (ibid., p. 53).*

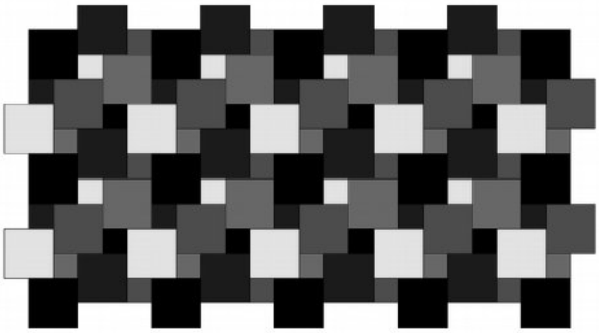


Figure 1 *: Pavage insécable du plan (ibid., p. 53).*

Ce travail a permis de mettre en avant un questionnement sur l'existence d'un tel pavage pour des régions bornées du plan comme le carré ou le rectangle par exemple. Si l'on se restreint à l'étude de grilles carrées, ce même groupe a alors montré qu'il existe au moins un pavage insécable pour toute grille carrée de taille $n \geqslant 5$ (*ibid.*, p. 59). La figure ci-après nous montre d'ailleurs un exemple de pavage insécable pour une grille carrée de taille $n = 7$ (figure 2).

[1] Éléments de solution : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-110-111-petit-x/7-elements-de-reponse-a-l-activite-du-n-109-une-histoire-de-cubes-insecables-650367.kjsp?RH=1585216932896

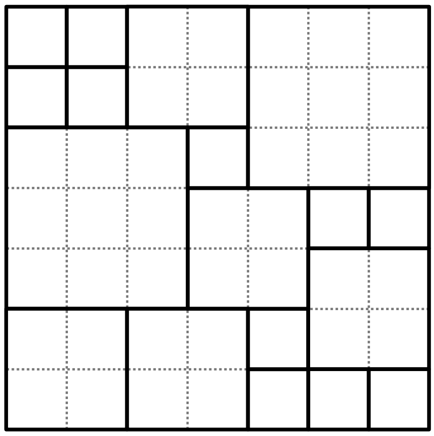


Figure 2 *: Pavage insécable d'une grille carrée (ibid., p. 55).*

Il semble alors intéressant d'élargir ce problème à d'autres dimensions, notamment à la dimension 3. En effet dans ce cas-ci, *est-il toujours possible de partitionner un cube de longueur entière par des pavés cubiques — ou cubes-partition — de telle manière qu'il n'existe, cette fois-ci, aucun plan horizontal ou vertical coupant le grand cube dans toute sa longueur* ***sans traverser un cube-partition****, et ce, quelle que soit la taille de notre cube ?*

Le but de ce questionnement est de faire émerger chez les élèves un processus de démarche de recherche lié à l'activité mathématique. En effet, cette activité vise à insuffler des savoir-faire idoines à cette démarche tels que : expérimenter sur des cas particuliers, modéliser cette situation sur des exemples à l'aide de matériels manipulables ou en utilisant un logiciel de géométrie en 3D, émettre des conjectures locales d'existence ou d'inexistence, les prouver ou les invalider à l'aide d'arguments utilisant une pluralité de raisonnements, mais le but est également d'inciter les élèves à formuler des conjectures de portée plus générale, voire, si possible, de les prouver...

Prenons l'exemple d'un cube d'arête 2 unités (figure 3), il semble alors évident d'exhiber un pavage en 8 cubes-partition d'arête 1 unité (en excluant bien évidemment le pavage trivial qui consiste à prendre un pavé cubique ayant pour arête 2 unités car sans intérêt pour notre problème).

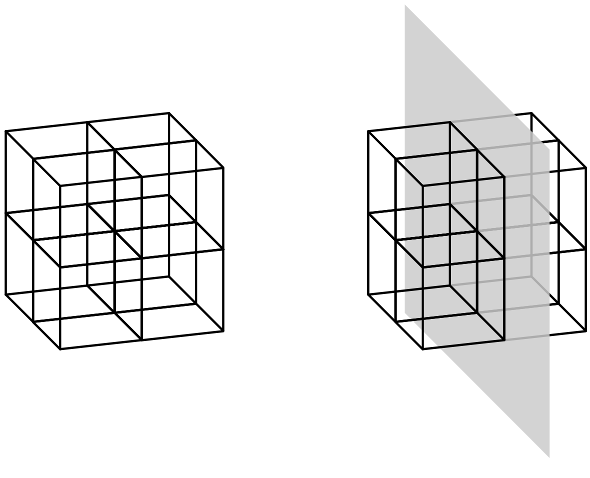


Figure 3 *: Pavage d'un cube d'arête 2 unités avec 8 cubes-partition d'arête 1 unité.*

L'observation de cette figure (figure 3, à droite) montre qu'un plan vertical traverse l'intégralité du cube sans intersecter aucun cube-partition. Ce type de pavage est donc ce qu'on appelle communément un pavage sécable. À présent, que se passe-t-il si l'on décide de faire varier l'arête du cube ? *Est-il toujours possible d'exhiber un pavage insécable d'un cube d'arête n unités par des cubes-partitions ? Quelle est la condition portant sur l'entier n pour pouvoir réaliser un tel pavage ?*

L'exemple que nous proposons ci-après illustre la partition d'un cube ayant pour arête 6 unités par des cubes de plus petites tailles[2] dont les longueurs sont entières (figure 4). *Vérifiez à présent qu'aucun plan horizontal ou vertical ne puisse couper le grand cube dans toute sa longueur sans intersecter au moins un cube-partition*. Ainsi la réunion des cubes-partitions est égale au cube de départ.

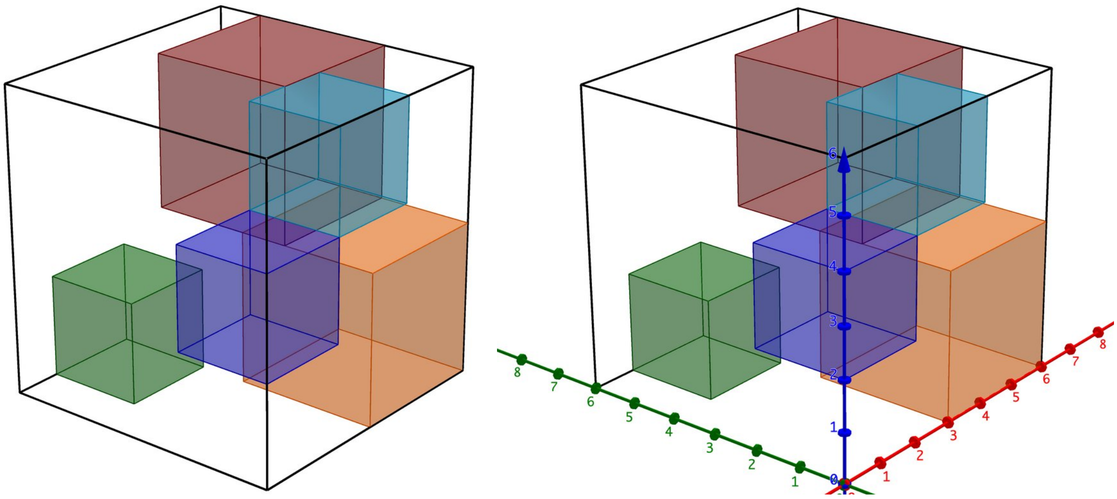


***Figure 4** : Pavage d'un cube d'arête 6 unités par des cubes-partition.*

À présent, *pouvez-vous partager un cube d'arête 7 unités par des cubes plus petits sans qu'aucun plan horizontal ou vertical ne puisse le couper dans toute sa longueur ? Essayez ensuite avec un cube d'arête 8 unités, puis 4.*

De façon générale : *pour quelles valeurs de l'entier n est-il toujours possible de partitionner un cube d'arête n unités en cubes d'arêtes strictement plus petites que n de telle sorte qu'il n'existe aucun plan horizontal ou vertical coupant le grand cube dans toute sa longueur sans intersecter au moins un cube-partition ?*

Nous donnerons des éléments de réponse au problème dans un prochain numéro...

Référence bibliographique

Groupe « Logique, raisonnement et SiRC ». (2017). *Situations de recherche pour la classe. Expérimenter, conjecturer et raisonner en mathématiques, au collège, au Lycée et... au delà*. IREM de Grenoble.

[2] Pour éviter la surcharge de la figure, nous ne présentons pas les cubes unitaires (*d'arête* 1 unité) qui complètent naturellement les espaces libres situés entre le grand cube et les pavés cubiques.

LE PROBLÈME DES 100 VOLATILES

ANNÉE 2019 - N° 110-111[1]

Mahdi ABDELJAOUAD
Université de Tunis

« Un coq vaut cinq pièces, une poule trois pièces et trois poussins valent une pièce. Avec cent pièces, on achète cent oiseaux. Combien y a-t-il de coqs, de poules et de poussins ? » Ce problème se trouve dans un traité écrit par Zhang Quijian au milieu du V^{e} siècle en Chine. Il est du type « problème des 100 volatiles ». Des énoncés de ce type ont été proposés dans toutes les cultures anciennes. On en trouve par exemple en Inde au VII^{e} siècle chez Mahavira, à Bagdad vers 900 chez Abu Kamil et en Italie au XIII^{e} siècle chez Fibonacci.

Dans chaque problème de ce type, il s'agit d'acheter un certain nombre de volatiles de plusieurs espèces, connaissant :

1. le prix unitaire de chaque volatile,
2. le nombre total de volatiles achetés
3. le prix global de l'achat et de déterminer le nombre de volatiles de chaque espèce que l'on a pu acheter.

Les historiens des mathématiques ont montré que plusieurs techniques ont été utilisées pour résoudre ce problème. Depuis quelques années, nous avons étudié les problèmes des 100 volatiles chez les mathématiciens de langue arabe, entre le X^{e} et le XV^{e} siècle, de Samarcande à Grenade en passant par Bagdad. Dans cette activité, nous proposons quelques problèmes choisis dans leurs traités sans dévoiler leur(s) solution(s) et suggérons au lecteur de tenter de les résoudre. Dans un prochain article, nous proposerons de dénombrer les problèmes de ce type, de les décrire et d'en déduire une typologie.

Quelques énoncés

Abu Kamil (m. 930[2]) est le premier mathématicien arabe ayant rédigé un traité totalement réservé aux problèmes des 100 volatiles. Il est intéressant de relire une partie de sa préface :

> *Je me trouvai devant un problème que je résolus et pour lequel je découvris quantité de solutions ; approfondissant ceci, je parvins à deux mille six cent septante-six solutions. Mon étonnement fut grand, mais je fis l'expérience que, lorsque je racontai cette découverte, certains me considérèrent avec étonnement ou me jugèrent incapable, ou que ceux qui me connaissaient furent pris de suspicion à mon égard. Je me décidai alors à écrire un livre sur ce type de calcul, destiné à en faciliter le traitement et à en rendre l'accès plus aisé.*[3]

Abu Kamil explique que, dans ce genre de problèmes, la solution nécessite implicitement que le nombre de chaque type de volatiles soit entier, car on ne peut pas vendre des portions d'animaux

[1] Éléments de solution : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-112-petit-x/2-solutions-de-l-activite-du-n-110-111-le-probleme-des-100-volatiles-716610.kjsp?RH=1596813504510

[2] « m. » signifie « mort en ».

[3] Sesiano, J. (1999). *Une introduction à l'histoire de l'algèbre*. Lausanne : Presses Polytechniques et universitaires romanes. pp. 78-80.

ou les combiner entre eux. Par ailleurs, ces problèmes peuvent avoir une seule ou plusieurs solutions et même ne pas en avoir du tout. Il précise que ce type de problèmes ne concerne pas seulement les oiseaux, mais également les humains (hommes, femmes, enfants), les achats d'armes diverses (épées, arcs et autres sortes). Pour les résoudre, ll faut également tenir compte d'autres contraintes introduites dans l'énoncé comme, par exemple, l'achat d'un type d'oiseaux en nombre supérieur aux autres types.

Le problème qui étonna Abu Kamil est difficile à résoudre, nous le placerons en fin de notre liste, juste avant celui proposé par al-Kashi qui traite de dix types de volatiles.

> *1. On t'a donné 100 dirhams et on t'a demandé d'acheter 100 volatiles ; des canards, des poules et des moineaux. Un canard coûte 5 dirhams, 20 moineaux coûtent 1 dirham et le poulet est à 1 dirham. Combien y a-t-il de volatiles de chaque espèce ? (Abu Kamil, m. 930).*

> *2. Nous voulons acheter pour cent dirhams cent volatiles de trois espèces — canards, pigeons et poulets. Chaque canard pour deux dirhams, trois pigeons pour un dirham et deux poulets pour un dirham. Combien y a-t-il de chaque espèce ? (Al-Samaw'al al-Maghribī, m. 1175).*

> *3. Une personne donne à un de ses ghulâm [jeunes serviteurs] 100 dirhams et lui dit : « distribue-les à cent indigents : des vieillards, des vieilles et des fillettes. Donne à chaque vieillard un demi-dirham, à chaque vieille un quart de dirham et à chaque fillette dix dirhams ». (Auteur inconnu, XIVe siècle).*

> *4. Un canard coûte 3 dirhams, une poule 2 dirhams, un pigeon un tiers de dirham et un moineau un quart de dirham. On désire seize volatiles pour seize dirhams. (Ibn al-Ha'im, m. 1412).*

> *5. Si on te dit : « une oie coûte 4 dirhams, 10 moineaux 1 dirham, 2 pigeons 1 dirham et 1 poule 1 dirham. On achète cent volatiles pour cent dirhams ». Combien y a-t-il de chaque espèce ? (Abu Kamil, m. 930).*

> *6. Nous souhaitons acheter 10 espèces de volatiles, à raison de 300 volatiles pour 300 dinars. Une grue vaut 3 dinars, 2 canards valent 3 dinars, 3 oies valent 5 dinars, 1 coq de neige vaut 1 dinar, 3 perdrix pour 2 dinars, 2 faisans pour 1 dinar, 3 pigeons pour 1 dinar, 4 poules pour 1 dinar, 5 cailles pour 1 dinar et 6 moineaux pour 1 dinar. (Al-Kashi, m. 1429).*

LES TROIS CARRÉS
MANQUERAIT-IL UNE DONNÉE ?

Année 2020 - n° 112[1]

Gilles ALDON

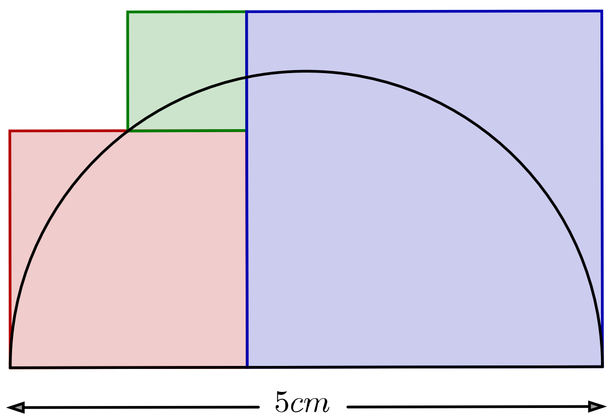
IREM de Lyon

Marie-Line GARDES

Université de Lyon, CNRL, INSPÉ de l'Académie de Lyon

Nous avons trouvé ce problème dans le fil twitter de MathsJam (#mathsjam), proposé par Catriona Shearer. C'est un énoncé très simple qui s'appuie sur un dessin géométrique et dont les données peuvent sembler *a priori* insuffisantes… Et pourtant…

Quelle est l'aire totale des trois carrés ?



[1] Éléments de solution : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-113-petit-x/6-solutions-de-l-activite-du-n-112-les-trois-carres-932759.kjsp?RH=1612362054926

UNE PORTION DE RECTANGLE

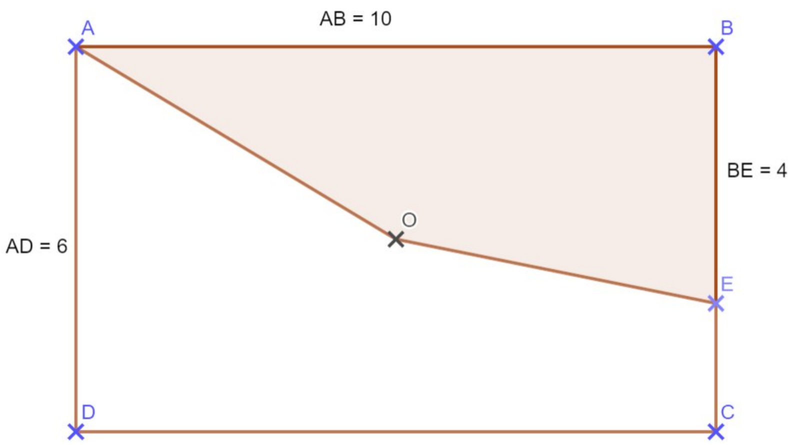
ANNÉE 2020 - N° 113[1]

Georges SALIBA
Collège Aliénor d'Aquitaine, Bordeaux

Conçu dans le cadre du projet E-fran PERSEVERONS et sa composante sur l'usage de tablettes en classe de mathématiques, le site http://saliba.maths.free.fr était initialement destiné aux élèves du collège Aliénor d'Aquitaine. Lors de la mise en place de l'enseignement à distance, afin de faire face à la crise sanitaire, nous l'avons alimenté de manière plus conséquente.

Nous présentons ici un problème extrait de ce site, dans la partie consacrée à des problèmes d'aires pour des élèves de cinquième.

ABCD est un rectangle de centre *O*.



À l'aide des informations fournies par la figure, calculer l'aire du quadrilatère *ABEO*.

Justifier votre réponse.

[1] Éléments de solution : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-114-petit-x/5-solutions-de-l-activite-du-n-113-une-portion-de-rectangle-876589.kjsp?RH=1623312678208

LES PARTICULES

ANNÉE 2021 - N° 114[1]

Julien BERNAT
Groupe IREM de Lorraine

Sébastien LOZANO
Groupe IREM de Lorraine

Le problème

On dispose d'un certain nombre de particules qui peuvent être de trois couleurs différentes : il y en a des rouges, des vertes et des bleues.

On souhaite obtenir un ensemble de particules qui soient toutes de la même couleur. Pour cela, on peut fusionner des particules : cela consiste à prendre deux particules qui sont de couleurs différentes et à les remplacer par une particule de la troisième couleur (par exemple, on remplace une particule rouge et une particule verte par une particule bleue). Si plusieurs fusions sont possibles, on choisit librement celle que l'on veut. On doit réaliser des fusions jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une seule couleur.

Le but de l'activité est de savoir si, pour une répartition initiale donnée, la couleur finale peut être n'importe laquelle des trois couleurs ou non.

1. Déterminer la ou les couleurs finales possibles à partir de la répartition initiale suivante :

- 4 particules rouges, 2 particules vertes et 4 particules bleues (répartition A).

2. Reprendre l'étude du problème pour chacune des répartitions initiales suivantes :

- répartition B : 4 particules rouges, 3 particules vertes et 4 particules bleues ;
- répartition C : 5 particules rouges, 3 particules vertes et 4 particules bleues ;
- répartition D : 5 particules rouges, 2 particules vertes et 4 particules bleues ;
- répartition E : 5 particules rouges, 1 particule verte et 3 particules bleues.

3. Déterminer sous quelle(s) condition(s) nécessaire(s) et/ou suffisante(s) une répartition initiale donnée peut mener à n'importe quelle couleur finale.

[1] Éléments de solution : https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/consultation/numero-115-petit-x/6-solutions-de-l-activite-du-n-114-les-particules-932750.kjsp?RH=1633082629495

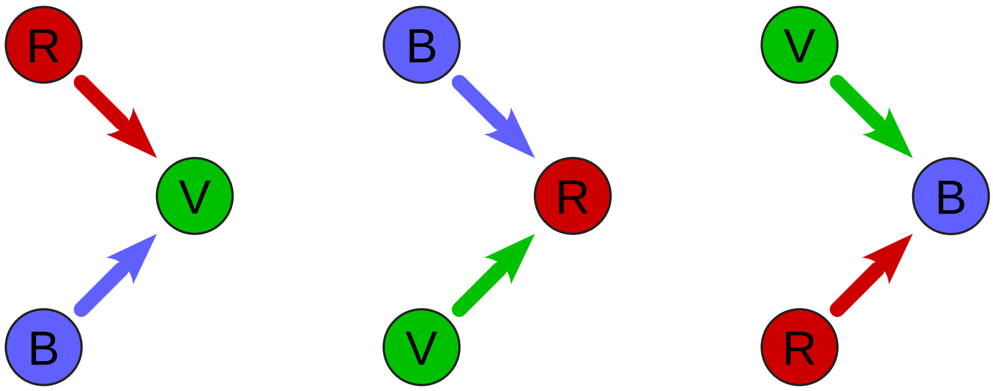
Présentation aux élèves

Voici une suggestion de présentation de l'activité pour des élèves, version en couleur :

Les particules

Au laboratoire de physique, trois nouvelles sortes de particules viennent d'être découvertes : les rouges, les vertes et les bleues.

Lorsque deux particules de deux couleurs différentes se rencontrent, elles fusionnent et sont remplacées par une particule de la troisième couleur.



On choisit l'ordre dans lequel les particules se rencontrent, et tant qu'il reste au moins deux couleurs, on provoque des collisions entre particules. On s'arrête lorsqu'il ne reste plus qu'une seule couleur.

Pour chaque situation de départ, déterminer si la couleur finale peut être n'importe laquelle, ou si l'on finit toujours avec une couleur en particulier.

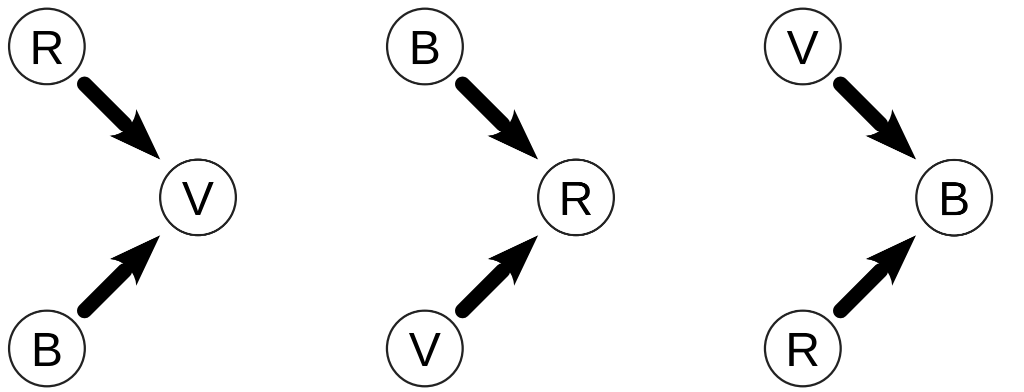
Situation A :	4× R	2× V	4× B
Situation B :	4× R	3× V	4× B
Situation C :	5× R	3× V	4× B
Situation D :	5× R	2× V	4× B
Situation E :	5× R	1× V	3× B

Voici une suggestion de présentation de l’activité pour des élèves, version en noir et blanc :

Les particules

Au laboratoire de physique, trois nouvelles sortes de particules viennent d’être découvertes : les rouges, les vertes et les bleues.

Lorsque deux particules de deux couleurs différentes se rencontrent, elles fusionnent et sont remplacées par une particule de la troisième couleur.



On choisit l’ordre dans lequel les particules se rencontrent, et tant qu’il reste au moins deux couleurs, on provoque des collisions entre particules. On s’arrête lorsqu’il ne reste plus qu’une seule couleur.

Pour chaque situation de départ, déterminer si la couleur finale peut être n’importe laquelle, ou si l’on finit toujours avec une couleur en particulier.

Situation A :	4×R	2×V	4×B
Situation B :	4×R	3×V	4×B
Situation C :	5×R	3×V	4×B
Situation D :	5×R	2×V	4×B
Situation E :	5×R	1×V	3×B

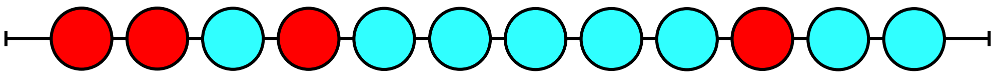
COURTOISIE DE CAMBRIOLEURS

ANNÉE 2021 - N° 115[1]

Rémi MOLINIER

Institut Fourier, IREM de Grenoble, Université Grenoble Alpes

Deux cambrioleurs courtois s'introduisent indépendamment dans une bijouterie pour dérober un collier de rubis et saphirs, enfilés les uns après les autres le long d'un unique fil d'or blanc, d'une très grande valeur. L'un passe par la porte, le deuxième par le toit et ils se retrouvent en même temps devant la vitrine du collier. Comme ils sont courtois, ils décident de se partager le collier pour que chacun ait autant de rubis et autant de saphirs. Cependant, pour limiter le bruit et ne pas perdre trop de temps (il faut découper le collier avec minutie), ils souhaitent effectuer le minimum de coupes. Si le collier était bien symétrique, une seule coupe suffirait ! Cependant celui-ci est complexe (d'où sa valeur) et il n'est plus très clair qu'une coupe suffira...



Un exemple de collier avec quatre rubis (en rouge) et huit saphirs (en bleu).

Le problème est alors le suivant :

> *Étant donné un collier de rubis et de saphirs, quel est le plus petit nombre de coupes qui permettent de répartir équitablement les rubis et les saphirs entre deux individus ?*

Résoudre ce problème pour l'exemple donné ci-dessus, puis pour n'importe quel collier.

Quelques consignes et recommandations :

- Comme souvent, le raisonnement qui permet de justifier la solution est aussi intéressant que la réponse elle-même.
- L'énoncé est un peu vague : par exemple, on ne dit pas quelle est la taille du collier, ni le nombre de rubis et de saphirs, etc. C'est à vous de faire ces choix. N'hésitez pas à chercher sur des exemples différents, en faisant varier les paramètres (nombre de perles, de rubis et de saphirs). Ce qui vous permettra de comprendre quand est-ce que ça marche et comment faire !
- Si c'est trop facile, vous pouvez essayer d'augmenter le nombre de cambrioleurs.
- Enfin, si vous êtes intrépides, vous pouvez aussi augmenter le nombre de types de perles.

[1] Éléments de solution : à paraître dans le numéro 116.

Petit x

Revue de didactique des mathématiques
Recherches sur l'enseignement et la formation

Si vous commandez votre abonnement après le mois d'avril, des frais d'expédition seront ajoutés.

Nom :	**Prénom :**
Adresse :	
Code Postal :	**Ville :**
e-mail (obligatoire) **:**	
n° SIRET de l'établissement :	
n° client (noté sur votre ancienne facture) **:**	

Abonnement 2022 - n° 116 et 117

Renouvellement : ☐ **1er abonnement :** ☐

Particuliers	France : **30 €**	☐	Étranger et DROM : **34 €**	☐
Institutions	France : **45 €**	☐	Étranger et DROM : **50 €**	☐

Commande de numéros anciens

- ***anciens numéros à l'unité jusqu'en 2021*** *(en fonction du stock)* 23 € ☐
- ***numéro hors série n° 2*** *Activités collège Petit x 1993 à 1998* 30 € ☐
- ***numéro hors série n° 3*** *Activités Collège Petit x 1999 à 2010* 30 € ☐

Indiquez ci-dessous les numéros commandés - voir sommaire sur le site de l'IREM de Grenoble

Trois modes de paiement sont proposés

• *Paiement en ligne*

Renvoyer ce bon de commande à Valérie Chorier : **irem-secretariat@univ-grenoble-alpes.fr**
La version numérique est disponible sur le site : **https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/**
À réception de la facture, se rendre sur https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/revues/petit-x/abonnements-et-commandes/
Les informations de paiement demandées figureront sur votre facture.

• *Chèque*

À l'ordre de **Monsieur l'Agent Comptable de l'Université Grenoble Alpes**
À joindre à ce bon de commande et à renvoyer à l'adresse : **IREM de Grenoble - Petit x**
Université Grenoble Alpes CS40700
38058 GRENOBLE Cedex 9

• *Virement administratif*

Accepté pour les institutions uniquement.