

Logique, raisonnements mathématiques et Situations de Recherche pour la Classe (SiRC)

Groupe de recherche de l'IREM de Grenoble¹

Denise GRENIER – Institut Fourier, Université Grenoble-Alpes
Roland BACHER – Institut Fourier, Université Grenoble-Alpes
Hervé BARBE – Lycée Saint-Jean-Bosco, Cluses
Yvan BICAÏS – Collège Le Massegu, Vif
Grégoire CHARLOT – Institut Fourier, Université Grenoble-Alpes
Monique DECAUWERT – retraitée de l'Université Grenoble-Alpes
Tarkan GEZER – Lycée Camille Corot, Morestel, puis INSA, Lyon

Introduction

Ce texte rassemble les documents des stages « Logique, raisonnements mathématiques et Situations de Recherche pour la Classe » que notre groupe éponyme de l'IREM de Grenoble assure dans le cadre du Plan Académique de Formation du rectorat de Grenoble depuis plus de 10 ans. Ces stages sont ouverts aux enseignants de Collège et de Lycée. Nous avons donc veillé à partager le temps entre les contenus théoriques et pratiques, pour permettre à chaque participant de s'y retrouver.

Dans nos derniers stages, nous avons fait le choix d'organiser le contenu des 12 heures de la manière suivante :

- une présentation synthétique des programmes actuels de Collège et Lycée sur les thèmes *raisonnements et preuves, démarche d'investigation/démarche de recherche et Logique*.
- des problèmes pour la formation des enseignants sur la démarche de recherche et la Logique,
- des problèmes pour la Classe (exercices courts, problèmes, situations de recherche), pour l'apprentissage de la « démarche d'investigation » et de tous les types de raisonnements mathématiques, pour tous les niveaux de Collège et de Lycée,
- des analyses des programmes actuels de Collège et de Lycée, d'extraits des documents Ressources sur ces thèmes, et de pages de manuels sur la Logique et le raisonnement mathématique,
- des éléments de cours sur la Logique des propositions, en relation avec les programmes des trois années du Lycée, à destination des enseignants.

Les deux journées de stage sont séparées par un temps suffisant pour permettre aux enseignants d'expérimenter un des problèmes au choix parmi ceux étudiés lors de la première journée. La seconde journée démarre sur le compte-rendu par les enseignants des expérimentations faites en classe.

Les documents qui suivent ont été distribués et travaillés pendant les stages, ou donnés comme compléments. Pour chaque stage, le contenu effectif a été adapté aux souhaits et questions des enseignants présents.

Nous ne donnons pas ici les solutions aux problèmes, ni les éléments d'analyse des programmes et documents divers discutés lors des stages. En revanche, on peut trouver quelques réponses dans des textes publiés (cf. la bibliographie à la fin de ce document), et des analyses détaillées de certaines situations de classe (y compris des éléments de gestion) dans l'ouvrage « Situations de Recherche pour la Classe » que notre groupe publie (sortie prévue octobre 2015, éditeur IREM de Grenoble).

*Nous donnons quelques notes en italique pour préciser l'objectif de certaines fiches de travail.
Et nous sommes à votre disposition pour toute question ou remarque.*

¹ Détails et autres propositions sur le site de l'IREM de Grenoble. Contact : denise.grenier@ujf-grenoble.fr

Partie 1. Problèmes, exercices pour la formation et pour la classe

Note. Les enseignants pourront choisir eux-mêmes les problèmes ou exercices pour leurs élèves, de la 6^{ème} à la Terminale. Une partie « Éléments de cours » est proposée en fin de ce document – pour la formation des enseignants.

1. Propositions, ET, OU, quantificateurs -Exemples d'exercices

E1. Les phrases suivantes sont-elles des propositions ? Si non, peut-on les compléter pour avoir des propositions ?

2 est pair

3 est pair

n est pair

Soit n un entier pair

Il fera beau demain

2 est pair ET 3 est pair

2 est pair OU 3 est pair

n est pair OU $n+1$ est pair

n est pair ET $n+1$ est pair

E2. Comment interpréter le « un » dans les phrases suivantes (une phrase peut contenir deux « un » ayant des sens différents) ? Comment les réécrire pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté ?

Le carré d'un nombre réel est positif

Un carré est un rectangle

Un rectangle a un angle droit

E3. Les phrases suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Peut-on répondre pour toutes ? Justifiez votre réponse.

P1. Un carré est un parallélogramme.

P2. Un rectangle est un carré.

P3. Un rectangle est un parallélogramme qui possède un angle droit.

P4. 4 est pair ET 6 est impair.

P5. 4 est pair OU 6 est impair.

Note. Les termes « un », « ou », « et » dans la langage naturel

Un exercice préliminaire pourrait être: « Donner tous les sens que vous connaissez du mot « un » et des conjonctions « et » et « ou », avec des exemples. On peut ainsi mettre en évidence la pluralité des sens de ces mots dans le langage courant, et donc la nécessité de le préciser en mathématiques. En voici quelques-uns :

Un : le chiffre, le nombre

l'article ou le pronom indéfini : un, au moins un, un parmi d'autres

tout

Exemples : « une bactérie est un être vivant », « l'un et l'autre »

Et : sert à exprimer une addition, une opposition, un rapprochement, une conséquence

sens liés au temps ou à la causalité, peut relier des substantifs ou des adjectifs

Synonymes : alors, avec, comme, plus, puis,

Exemples : « demain, j'irai au travail et au cinéma », « Il est grand et mince », « Manon et Line »

Ou : sert à exprimer une alternative, une équivalence, une exclusion, une explication

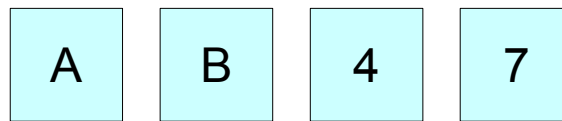
Synonymes : ou bien, sinon, soit

Exemple : on ne dira pas « j'ai un vélo ou une moto » si on a les deux !

2. Différents types de raisonnements mathématiques

Problème 1. « La tache de Wason »

On présente quatre cartes sur lesquelles sont écrits respectivement A, B, 4 et 7. On sait que sur chaque carte, il y a une lettre sur une des faces et un nombre sur l'autre face. On ne peut pas voir l'autre face.



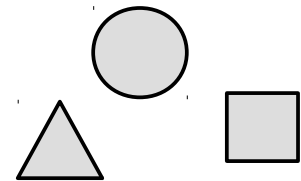
Quelle(s) carte(s) **au plus** devez-vous retourner pour déterminer si l'affirmation suivante est vraie ou fausse : « Si une de ces cartes a une voyelle écrite sur une face, alors il y a un nombre pair écrit sur l'autre face » ?

Problème 2

On dispose de trois jetons de trois formes différentes (Carré, Rond et Triangle) et de trois couleurs différentes (Rouge, Vert et Bleu). Chaque jeton a une seule couleur.

On suppose que les trois affirmations suivantes sont vraies :

- A1. Si le jeton rond est bleu, alors le jeton carré est vert.
- A2. Si le jeton rond est vert, alors le jeton carré est rouge.
- A3. Si le jeton carré n'est pas bleu, alors le jeton triangulaire est vert.



Donnez toutes les solutions (s'il y en a).

Problème 3

Une boîte contient des pièces carrées et des pièces triangulaires. Ces pièces sont soit rouges, soit vertes. On sait que toutes les pièces carrées sont rouges. Parmi les affirmations suivantes, indiquez si elles sont vraies, fausses ou si on peut pas savoir. Justifiez.

- A1. Il n'y a que les pièces carrées qui sont rouges.
- A2. Il n'y a aucune pièce carrée verte.
- A3. Toutes les pièces triangulaires sont vertes.
- A4. Toutes les pièces rouges sont carrées.
- A5. Toutes les pièces vertes sont triangulaires.

Problème 4

Les quatre phrases ci-dessous forment un système logique cohérent.

Combien y-a-t-il de phrases vraies ?

- A1. Aucune de ces phrases n'est vraie
- A2. Une seule de ces phrases est fausse
- A3. Deux exactement de ces phrases sont vraies
- A4. Deux au moins de ces phrases sont fausses

Problème 5. Les cent déclarations

Sur une (grande) feuille, cent déclarations sont écrites.

La première dit « Sur cette feuille, il n'y a qu'une seule déclaration fausse ».

La seconde dit : « Sur cette feuille, il y a deux et seulement deux déclarations fausses ».

La troisième dit : « Sur cette feuille, il y a trois et seulement trois déclarations fausses ».

et ainsi de suite jusqu'à la centième, qui dit : « Sur cette feuille, il y a cent déclarations fausses ».

Finalement, combien de déclarations sont fausses ?

3. Autres exercices – quantificateurs, table de vérité, contraposée, négation

E1. Négation d'une phrase. Exemples

La négation de « Tous mes copains viendront à mon anniversaire » n'est pas « Aucun de mes copains ne viendra à mon anniversaire » !

Mais cela ne posera aucune difficulté ... (à cause du contexte)

La négation de « Toutes les billes sont rouges » n'est pas « Aucune bille n'est rouge », ni non plus (toutes les billes ne sont pas rouges), mais « Il existe une bille qui n'est pas rouge ».

La première négation fautive est facile à invalider, la seconde, non.

La proposition : « Dans la liste $\{0, 4, 6, 7, 8, 16, 78\}$, tous les nombres sont pairs » est une proposition fautive. Sa négation est « Dans la liste $\{0, 4, 6, 7, 8, 16, 798\}$, il existe un nombre impair » (*impair* étant la négation de *pair* dans \mathbb{N})

E2. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fautive ? Justifier.

A1. « $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ ou $x < 1$ ».

Écrire la négation de A1.

E3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fautes ? Justifier.

P et Q étant des propositions quelconques, « Si $P \Rightarrow Q$ est vraie, alors P est vraie et Q est vraie ».

P et Q étant des propositions quelconques, « Si $P \Rightarrow Q$ est fautive, alors P est vraie et Q est fautive ».

E4. Soit P et Q deux propositions.

(1) Écrire la négation de « $P \Rightarrow \text{non } Q$ ».

(2) Écrire la contraposée de « $\text{non } P \Rightarrow \text{non } Q$ ».

E5. Remplir la table de logique de la proposition « $P \Rightarrow Q$ OU $Q \Rightarrow P$ »

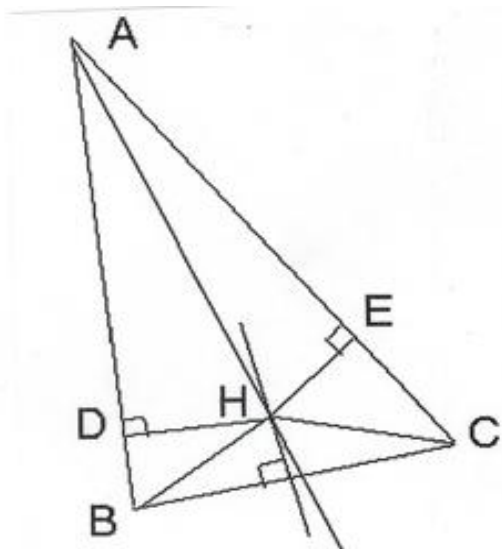
Et celle de « $P \Rightarrow Q$ ET $Q \Rightarrow P$ ». Expliquer.

4. Logique et raisonnement mathématique. Preuves fausses ?

Que démontre cette « preuve » ci-après ?

« Preuve »

Soit ABC un triangle quelconque. Soit H le point d'intersection de sa bissectrice issue de A avec la médiatrice de [BC].



Notons D et E les projetés orthogonaux respectifs de H sur [AB] et [AC].

H étant sur la bissectrice de \widehat{DAE} , on a $HD=HE$. Les triangles rectangles AHD et AHE ayant leurs trois angles égaux deux à deux, et la même hypoténuse (AH), sont égaux.

On en déduit que $AD=AE$. (1)

H étant sur la médiatrice de [BC], on a $HB=HC$. Les triangles rectangles HDB et HEC sont donc égaux (car ils ont leurs trois côtés égaux deux à deux).

On en déduit que $DB=EC$. (2)

(1) et (2) entraînent que $AD+DB=AE+EC$. (3)

et donc $AB=AC$. On a démontré que ABC est un triangle isocèle.

Note. Il existe d'autres preuves fausses, on peut en trouver sur internet. Un critère pour en choisir une est qu'elle nécessite d'examiner chaque « pas de démonstration », et que cette analyse entraîne un questionnement sur des connaissances supposées acquises et stabilisées. Comme dans celle donnée ici.

5. Quelques « problèmes de logique »²

Chaussettes assorties

Arthur a rangé en vrac dans un tiroir de la commode 8 chaussettes bleues et 8 chaussettes vertes.

Le matin, il joue à choisir une paire de chaussettes dans l'obscurité totale de sa chambre.

1. Combien doit-il prendre de chaussettes pour être sûr d'en avoir au moins deux de la même couleur ?
2. Combien doit-il en prendre pour être sûr d'avoir deux chaussettes vertes ?

Arthur a maintenant dans son tiroir une autre paire de chaussettes en plus, offerte par Zoé, de couleur rouge.

1. Combien doit-il prendre de chaussettes pour être sûr d'en avoir au moins deux de la même couleur ?
2. Combien doit-il en prendre pour être sûr d'avoir deux chaussettes vertes ?
3. Combien doit-il en prendre pour être sûr d'avoir les deux chaussettes rouges ?

Habits éponymes

Monsieur Brun, monsieur Blanc et monsieur Noir se connaissent depuis toujours. Ce jour-là, l'un s'est habillé en brun, l'autre en blanc et le troisième en noir. L'homme habillé en brun fait en riant la remarque aux deux autres : « Chacun a choisi une couleur qui ne correspond pas à son nom ». Monsieur Noir rétorque « C'est vrai, je ne l'avais pas réalisé ! ». Pouvez-vous attribuer les couleurs des vêtements à chacun ?

Un père

Pour faire pratiquer la logique à ses enfants, un père propose le jeu suivant : « Chacun de vous va me dire une phrase. Si elle est vraie, je choisirai de lui donner 1 euro ou 20 euros. Si elle est fausse, il n'aura rien ».

Le premier dit « Tu vas me donner 20 euros ». Hélas, le père ne lui donne rien.

Le second dit « Tu vas me donner 1 euro ». Et le père lui donne un euro.

Le troisième réfléchit, puis dit une phrase qui va obliger le père à lui donner 20 euros. Que dit-il ?

Amis sportifs

Trois amis bavardent. Deux font du ping-pong, deux, du judo et deux, du vélo. Celui qui ne fait pas de vélo ne fait pas le judo. Celui qui ne fait pas de ping-pong ne fait pas de vélo. Quels sports fait chacun d'eux ?

Conversation dans le désert (<http://rustrel.free.fr>)

- Abdullah est un touareg très riche, on m'a dit qu'il a plus de 100 chameaux, dit Ali Bubba.
- Jamais de la vie, rétorque Ismaël. Je peux te dire qu'il a moins de 100 chameaux.
- Disons qu'il possède au moins un chameau, intervient Farik.

Si un seul de ces trois énoncés est vrai, combien de chameaux Abdullah possède-t-il ?

Musique !

Dans ce village de montagne de 117 habitants, beaucoup pratiquent la musique. Tous ne sont pas musiciens, mais si on prend deux habitants au hasard, il y a au moins un musicien parmi eux. Combien d'habitants de ce village sont-ils musiciens ?

Un facteur perspicace

Connaissant l'intérêt de son facteur pour les énigmes, un homme lui déclare un jour : « J'ai trois filles, le produit de leurs âges vaut 36 et la somme de leurs âges est égale au numéro de la maison en face ». Le facteur intrigué réfléchit quelques instants puis dit : « J'y suis presque, mais il me manque un indice ». L'homme rajoute alors : « Mais oui, j'ai oublié de vous dire que l'aînée joue du piano ! ». Le facteur s'exclame « J'ai trouvé ! ». Quel est le numéro de la maison d'en face, et quel âge ont les filles ?

Cartes

Les 32 cartes d'un jeu ont été réparties en deux tas, un tas de quatre cartes et un avec toutes les autres. Toutes sont retournées faces contre la table. On sait que les quatre cartes choisies sont un roi, une dame, un valet et un as. Trouvez la « couleur » (carreau, cœur, pique, trèfle) de ces quatre cartes, si je vous dis que :

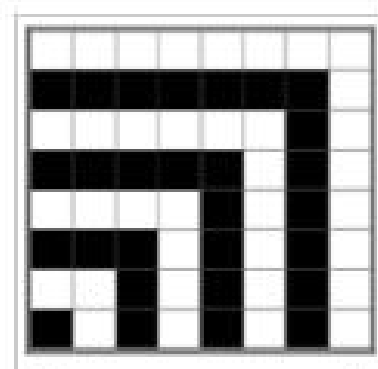
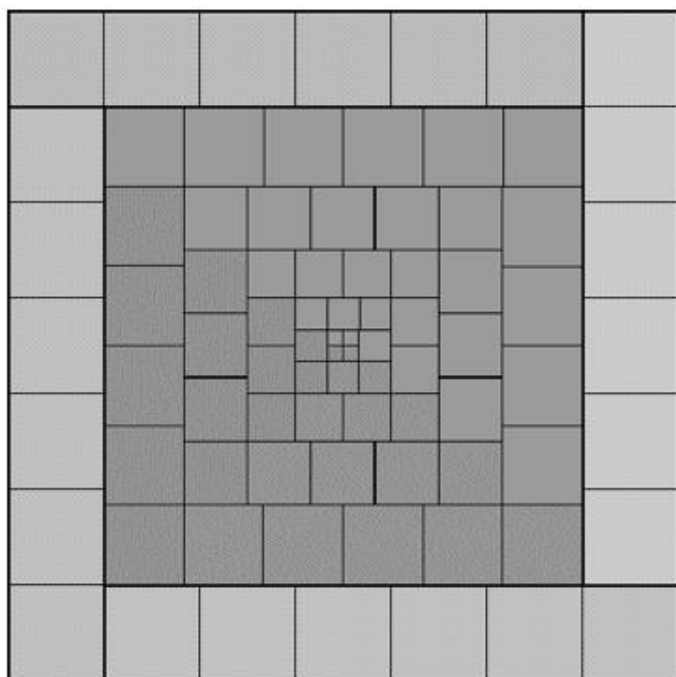
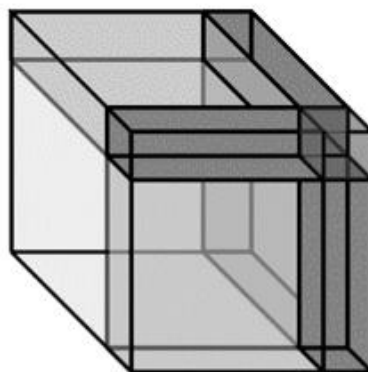
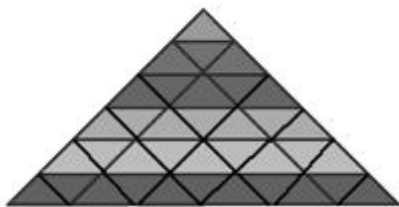
- trois « couleurs » (au moins) sont représentées
- le roi et le valet sont rouges
- l'as et la dame sont de la même « couleur »
- la dame de pique et le roi de cœur sont dans un même tas
- Ah oui ! ... J'ai caché l'as de trèfle dans ma poche !

² Il s'agit de quelques exemples qui nous semblent pertinents pour nos objectifs sur la Logique. Certains de ces problèmes sont tirés de – ou inspirés par – le site <http://rustrel.free.fr>, d'autres ont été inventés par nous.

6. Preuves sans mots

Les « preuves sans mots » ci-dessous proviennent de différentes sources :
maths-à-modeler : <http://mathsamodeler.ujf-grenoble.fr> , wikipedia, Jean-Paul Delaye.

Qu'est-ce que ces dessins « montrent » ? Quelles conjectures générales peut-on déduire ?



Note. Les preuves sans mot ont un double intérêt :

- faire raisonner sur des figures « génériques » que l'on doit analyser, pour aboutir à une conjecture sur une propriété (souvent numérique) que la figure illustre – la plus connue est celle du théorème de Pythagore illustrée par deux carrés identiques partagés de manière différente ;
 - aller à l'encontre d'une conception répandue que toute preuve doit être indépendante d'un dessin – ce qui est vrai quand le dessin ne peut être lu de manière générique ; ici chaque figure est une preuve pour un cas particulier.
-

Partie 2. Études de problèmes à destination des enseignants et formateurs

1. Synthèse et questions sur la Logique dans les programmes du Secondaire

1.1 Dans les programmes du Collège (BO 2008, documents Présentation et Ressources 2009)

« **Raisonnement logiquement, pratiquer la déduction, démontrer** sont des capacités qui relèvent du socle commun de connaissances et de compétences et qui sont à acquérir progressivement, tout au long de la scolarité au collège. » (extrait du document Ressources collège 2009)

Importance de la résolution de problèmes pour mettre en oeuvre la « démarche d'investigation » et **différents types de raisonnement** (*inductif, exhaustivité des cas, disjonction des cas, contre-exemple, absurde, ...*)

Apprentissage de la « démarche de recherche », où le raisonnement inductif permet l'élaboration de *conjectures*. Passage du *raisonnement inductif* au *raisonnement déductif*

Le programme met l'accent sur le raisonnement plus que sur le langage mathématique. Cependant :
– il est dit par ailleurs que les mathématiques sont une discipline d'expression qui participe à la maîtrise de la langue
– il faut au minimum un langage commun basé sur des règles précises pour valider une conjecture, « Penser mathématiquement », communiquer son raisonnement.

1.2 Logique, raisonnements et preuve dans les programmes de Lycée (2009 – 2011)

Ce programme est donné dans un tableau, identique pour les trois années de Lycée : une liste de notions, thèmes, sans commentaires, que l'on peut « trier » ainsi :

Notations et vocabulaire mathématiques, langage des ensembles
Différents types de raisonnements, CN, CS, disjonction des cas, absurde
Des notions de Logique : ET, OU, NON, Implication proposition conditionnelle),
quantificateurs, contre-exemple, réciproque, contraposée, négation.

Tous les types de raisonnement et toutes les notions de base de la Logique y figurent, mais sans indication de niveau de complexité de chacun, et aucune progression, n'est suggérée.

Une consigne forte est donnée : ne pas faire d'exposé sur la logique, la traiter « naturellement » au fil des chapitres.

Des objectifs explicites ambitieux (page 1 du BO Seconde 2009):

« distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant »
« distinguer implication mathématique et causalité ».

Organisation présentée dans le document « Ressources » Seconde

« Notations et raisonnement mathématiques »	
Notions d'ensemble, sous-ensemble, appartenance, inclusion	
Explicitation des quantifications	
Implications et équivalences	
	dans le cadre des fonctions
Condition nécessaire, condition suffisante	
Appartenance d'un point à une droite	
	en géométrie
Réunion et intersection	
Négation	
	en statistiques et probabilités
Langage courant et langage mathématique	
Langage courant explicite et implicite	
Implication mathématique	

1.3 Quelques remarques générales et questions

- Jusqu'où le langage « naturel » suffit-il pour « faire des mathématiques » : chercher, raisonner, construire et étudier des conjectures, prouver, formuler et écrire des démonstrations ? Argumentations, raisonnements et preuves en mathématiques doivent respecter des règles spécifiques.
- L'introduction des notions de Logique « au fil des chapitres » permet-elle de construire des notions de Logique ? Les *propositions* ont un statut et des formes précises : un *énoncé*, une *conjecture*, une *hypothèse* sont soumis à des contraintes d'écriture et de sens, contiennent souvent des *variables* de natures différentes et ont une *validité* universelle ou existentielle exprimée par des *quantificateurs*.

1.4 « Compétences » dans les programmes du Secondaire (extraits)

Collège (MEN socle commun, mathématiques et culture scientifique, décembre 2012)

Capacités

À la sortie de l'école obligatoire, l'élève doit être en mesure d'appliquer les principes et processus mathématiques de base dans la vie quotidienne, dans sa vie privée comme dans son travail. Pour cela, il doit être capable :

- de raisonner logiquement, de pratiquer la déduction, de démontrer ;
- de communiquer, à l'écrit comme à l'oral, en utilisant un langage mathématique adapté ;
- de contrôler la vraisemblance d'un résultat [...]

Attitudes

L'étude des mathématiques permet aux élèves d'appréhender l'existence de lois logiques et développe :

- la rigueur et la précision ;
- le respect de la vérité rationnellement établie ;
- le goût du raisonnement fondé sur des arguments dont la validité est à prouver.

Les compétences mathématiques au Lycée (MEN novembre 2013)

Chercher

Analyser un problème.

Extraire, organiser et traiter l'information utile.

Observer, s'engager dans une démarche, expérimenter en utilisant éventuellement des outils logiciels, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, reformuler un problème, émettre une conjecture.

Valider, corriger une démarche, ou en adopter une nouvelle.

Modéliser, Représenter, Calculer,

Raisonner

Utiliser les notions de la logique élémentaire (conditions nécessaires ou suffisantes, équivalences, connecteurs) pour bâtir un raisonnement.

Différencier le statut des énoncés mis en jeu : définition, propriété, théorème démontré, théorème admis

Utiliser différents types de raisonnement (par analyse et synthèse, par équivalence, par disjonction des cas, par l'absurde, par contraposée, par récurrence ...).

Effectuer des inférences (inductives, déductives) pour obtenir de nouveaux résultats, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture, prendre une décision.

Communiquer

Cadre de mise en œuvre

La résolution de problèmes est un cadre privilégié pour développer, mobiliser et combiner plusieurs de ces compétences.

2. Réflexions sur quelques exercices des documents « Ressources » du M.E.N.

2.1 Document « Raisonnements et preuve » au collège (2008)

Nous avons sélectionné quatre « exemples » donnés dans ce document, pour les questions qu'ils posent, relativement à la rubrique annoncée « Raisonnements et preuves ». Pour chacun d'eux :

- résoudre le problème, éventuellement de différentes manières ;
- répondre à la question : quels types de raisonnements et de preuves avez-vous utilisés pour la résolution ?

Exemple 1. $\sqrt{2}$ est-il un nombre décimal ?

Exemple 2. Deux points A et B étant donnés, déterminer l'ensemble de tous les points C tel que le triangle ABC soit un triangle rectangle en C.

Exercice 9. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- Deux rectangles de même périmètre ont aussi la même aire.
- Deux rectangles de même aire ont aussi le même périmètre.

Exercice 18. Vrai ou faux : pour tout entier n, l'entier n^2-n+11 n'admet que deux diviseurs.

2.2 On peut faire le même type de travail pour des exercices du document du M.E.N. Ressources pour la classe de Seconde « Notations et raisonnements mathématiques » (juillet 2009)

Questions : Résoudre vous-mêmes le problème donné en exemple reproduit ci-dessous. Puis, en accord avec les objectifs annoncés dans le document (texte écrit dans l'encadré), faire une figure montrant les différents sous-ensembles et les inclusions correspondant aux données du problème et permettant d'illustrer les réponses aux questions. Enfin, traduire les phrases données en termes d'implications.

Implication mathématique

Deux grands types d'implication sont mis en œuvre :

- les implications correspondant à une inclusion (ou de type ensembliste) ;
- les implications correspondant à un raisonnement logique (faisceau d'informations permettant d'en déduire une conclusion).

Pour ce deuxième type, il est intéressant de faire un parallèle entre les situations issues de la vie courante et le transfert vers les situations mathématiques.

Exemple 11

Une réunion de cosmonautes du monde entier a lieu à Paris. Les cosmonautes américains portent tous une chemise rouge.

1. À l'aéroport on voit quelqu'un qui porte une chemise blanche.

Est-il cosmonaute américain ?

2. À côté de la personne précédente, on voit quelqu'un qui porte une chemise rouge.

Est-il cosmonaute américain ?

3. Le haut-parleur annonce l'arrivée d'un cosmonaute russe.

Porte-t-il une chemise rouge ?

4. Dans le hall, on voit un cosmonaute américain qui porte un manteau.

Porte-t-il une chemise rouge ?

2.3 Analyse d'extraits de manuels sur des notions de Logique

Dans la page suivante, nous avons choisis deux extraits de manuels de Seconde (édition 2010), concernant les notions Et et OU (et aussi l'équivalence dans l'un, et la négation de Et et Ou dans l'autre).

L'extrait du manuel Declic 2nde est en fait le seul paragraphe réservé à la Logique dans tout le manuel.

Leurs présentations des connecteurs ET et OU sont très dissemblables. Dans l'un des manuels, elles ne sont ni conformes aux notions de Logique associées, ni opérationnelles en mathématiques. Dans l'autre manuel, ce sont presque des « définitions », elles permettent de se mettre d'accord sur les différences entre les conjonction de coordination du langage courant et les connecteurs logiques – et sont donc utilisables en mathématiques. Nous proposons ici au lecteur de faire l'analyse de ces différences.

Exemples de présentation des connecteurs ET, OU et \Leftrightarrow dans deux manuels de Seconde (Declic 2nde, 2010 – p.329)

● **Un peu de logique**

Symbole, vocabulaire	Exemples
<p>\Leftrightarrow équivaut à, si et seulement si, à placer entre deux propositions. Cela signifie que celles-ci sont simultanément vraies (ou encore simultanément fausses).</p> <p>« et » entre deux propositions, deux événements : les deux propositions doivent être simultanément vraies ; les événements réalisés tous deux.</p> <p>« ou » entre deux propositions, deux événements : au moins l'un(e) des propositions, des événements (et peut-être les deux) doit être vraie (réalisé).</p>	<ul style="list-style-type: none"> • ABC est un triangle rectangle en $A \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$. • Les points A, B et C sont alignés \Leftrightarrow les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires. • « $x \geq -5$ et $x \leq 1$ » signifie : « $x \in [-5; +\infty[\cap]-\infty; 1]$ », soit « $-5 \leq x \leq 1$ ». • Lors du tirage d'une carte dans un jeu de 32, « obtenir un roi » et « obtenir un pique » signifie « obtenir le roi de pique ». • « $x \in [-1; 2]$ ou $x \in]0; 3]$ » signifie : « $x \in [-1; 2] \cup]0; 3]$ », soit « $x \in [-1; 3]$ ». • Lors d'un lancer d'un dé, « obtenir un multiple de 3 » ou « obtenir un numéro supérieur à 4 » signifie « obtenir l'un des numéros suivants : 3, 4, 5, 6 ».

(Math'x Seconde 2010 : extrait de la page logique – p.351)

3 **« ET », « OU » en mathématiques**

Dans le langage courant :

- « et » est employé avec différentes significations (« et en plus » : 1 cahier et un stylo et..., « et puis » : je finis mon travail et je viens te voir, « à la fois » : une mer chaude et calme).
- « ou » est aussi employé avec différentes significations, mais le plus souvent, il sert à désigner deux possibilités qui s'excluent l'une l'autre (« fromage ou dessert » sur un menu ne permet pas de prendre les deux !).

En mathématiques, « OU » et « ET » ont des significations très précises !

« A **ET** B » est vraie quand A et B sont toutes les deux vraies et uniquement dans ce cas.

« A **OU** B » est vraie quand au moins l'une des deux est vraie (l'une ou l'autre, voire les deux)

Du point de vue des **ensembles** (page 350) :

- ET est associé à l'intersection :
« $x \in I$ ET $x \in J$ » signifie « $x \in I \cap J$ ».
- OU est associé à la réunion :
« $x \in I$ OU $x \in J$ » signifie « $x \in I \cup J$ ».

La négation de « A OU B » est « négation de A ET négation de B ».

La négation de « A ET B » est « négation de A OU négation de B ».

Exemples

- Les moteurs de recherche utilisent le ET et le OU logique. Si on recherche un livre sur un catalogue électronique d'une bibliothèque, en tapant dans le champ « auteur » : « George OU Boole » on obtient la liste de tous les ouvrages écrits par des auteurs dont le nom contient George ainsi que ceux dont le nom contient Boole. Parmi eux figurent bien sûr ceux dont le nom contient George Boole. La même requête avec « George ET Boole » n'aurait renvoyé que les livres écrits par George Boole.
- La proposition A : « $x < 3$ ET $x > 1$ » signifie « $1 < x < 3$ ». Elle est vraie pour tous les nombres x appartenant à $]1; 3[$, fausse pour les autres.

La **négation de** « $x < 3$ ET $x > 1$ » est donc : « $x \geq 3$ OU $x \leq 1$ ».

-1 0 1 2 3 4 5

- « m est pair OU multiple de 3 » est vraie pour $m = 4$ (4 est pair, non multiple de 3), vraie pour $m = 9$ (9 est multiple de 3 mais pas pair) et vraie pour $m = 12$ (12 est pair et aussi multiple de 3). La proposition est fausse pour $m = 5$ (ni pair ni multiple de 3).

La **négation de** « m est pair OU multiple de 3 » est « m n'est pas pair ET n'est pas multiple de 3 ».

Note. Il s'agit d'analyser les « définitions » proposées. Ces deux manuels sont très différents. L'un donne une description de ces termes trop proche du langage commun (ne permettant pas de les distinguer des termes désignant les notions de Logique associés), l'autre décrit explicitement les différences de signification entre les termes du langage courant et ceux de la Logique – jusqu'à proposer une typographie (minuscules et majuscules) qui permet de les reconnaître dans une phrase..

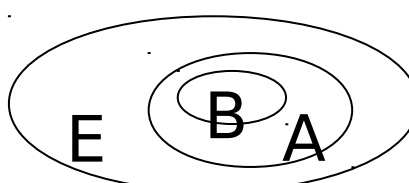
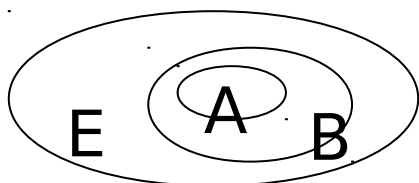
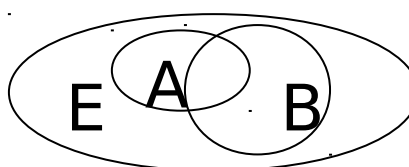
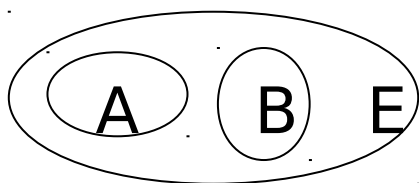
3. Des problèmes sur les définitions, propriétés des notions de Logique

Implication, ET, OU, NON, Condition nécessaire / condition suffisante – Inclusion

Problème 1. A et B étant deux propositions quelconques, les propositions suivantes sont-elles équivalentes à $A \Rightarrow B$?

	Oui	Non	autre	Justification
B est une condition nécessaire pour A				
A est une condition nécessaire pour B				
B est une condition suffisante pour A				
A est une condition suffisante pour B				
NON A OU B				
NON B OU A				
NON B OU NON A				
A ET NON B				
B ET NON A				
NON B ET NON A				
$B \Rightarrow A$				
$\text{NON } A \Rightarrow \text{NON } B$				
$\text{NON } B \Rightarrow \text{NON } A$				
B si A				
A si B				
(NON B) si A				
B seulement si A				
A seulement si B				

Problème 2. Étant donné un ensemble E et deux propriétés A et B sur E, soit A le sous-ensemble des éléments de E qui vérifient A et B le sous-ensemble des éléments de E qui vérifient B. Hachurez dans chacun des cas ci-dessous le sous-ensemble de E vérifiant $\forall x \in E, A(x) \Rightarrow B(x)$ est vraie.



Problème 3

Que pensez-vous des implications suivantes ? **Justifiez** chacune de vos réponses.

$k \in \mathbb{N}$ quelconque,

- a) k pair $\Rightarrow k+1$ pair
- b) k pair $\Rightarrow k+1$ impair
- c) k impair $\Rightarrow k+1$ pair
- d) k impair $\Rightarrow k+1$ impair

Vrai	Faux	On ne peut pas savoir	Je ne sais pas répondre

- a') 3 pair \Rightarrow 4 pair
- b') 3 pair \Rightarrow 4 impair
- c') 3 impair \Rightarrow 4 pair
- d') 3 impair \Rightarrow 4 impair

Problème 4

Voici trois propriétés relatives à des **losanges** (on se place dans l'ensemble des losanges).

Indiquer, dans chacune des cases correspondantes si l'énoncé proposé est vrai (V) ou faux (F). **Justifiez.**

A: Posséder 2 angles droits et des diagonales de même longueur.

B: Posséder un angle droit.

C: Être un carré.

A est une condition nécessaire pour B

A est une condition suffisante pour B

B est une condition nécessaire pour A

B est une condition suffisante pour A

A est une condition nécessaire pour C

A est une condition suffisante pour C

C est une condition nécessaire pour A

C est une condition suffisante pour A

C est une condition nécessaire pour B

C est une condition suffisante pour B

B est une condition nécessaire pour C

B est une condition suffisante pour C

Note. Ces quatre problèmes, de notre point de vue, permettent d'aborder tous les concepts fondamentaux du raisonnement mathématique et de la Logique. L'idéal serait de pouvoir les proposer aux élèves de fin de Lycée. Cependant, ils nécessitent, pour être résolus, d'avoir une idée des définitions des notions cachées derrière tous ces termes ... Mais peut-on comprendre une notion de Logique sans connaître au minimum sa définition ?

Partie 3. Situations de Recherche pour la Classe (SiRC)

Ces problèmes ont été étudiés à tous les niveaux scolaires (et universitaires) depuis de nombreuses années, dans l'équipe Maths-à-Modeler et notre groupe de l'IREM de Grenoble. Ils permettent aux élèves, en travail de groupes, d'expérimenter, argumenter, construire et étudier des conjectures, travailler tous les types de raisonnements mathématiques, ébaucher des preuves. Les exemples donnés ici ont un véritable succès dès la Sixième, auprès des élèves et des enseignants.

Un ouvrage sur les SiRC est en cours (sortie prévue 2015, éditeur IREM de Grenoble), il décrira l'organisation en classe, des résolutions et analyses de productions d'élèves, et des indications de gestion en classe.

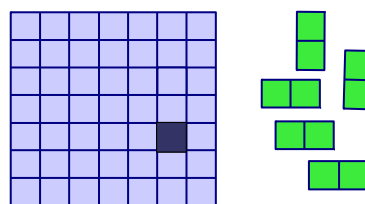
S1. Partition d'un carré en n carrés³

Question. Pour quelles valeurs de n est-il possible de partager (paver) un carré quelconque en n carrés ?

S2. Pavages de polyminos avec des dominos

On considère un polymino carré de taille n (nombre de cases du côté) ayant un trou d'une case pouvant se situer n'importe où. Pour quelles valeurs de n et quelles positions du trou est-il pavable par des dominos ?

(exemple pour $n=7$)

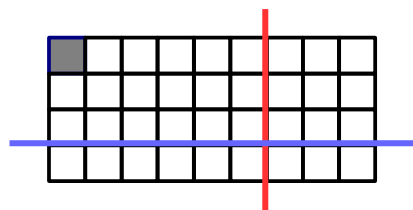


S3. Un jeu de Nim : Le « jeu du chocolat »⁴

Jeu à deux (équipes de) joueurs.

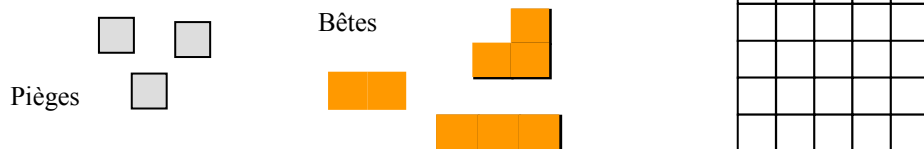
Chaque joueur doit à tour de rôle « couper » la tablette (restante) dans une seule de ses dimensions et choisir de garder l'un des deux morceaux. Celui qui est obligé de prendre le carré de savon (en gris sur le dessin) doit le manger et il a perdu.

Existe-t-il une « stratégie gagnante »
(pour ne pas manger le carré de savon !)
quelles que soient les dimensions de la tablette ?



S4. La « Chasse à la bête »

On veut protéger un territoire quadrillé (5x5) d'un nuage de bêtes qui veulent se poser. On dispose pour cela d'un grand nombre de pièges. Les bêtes comme les pièges se posent exactement sur les cases (et non en travers). Si une case est occupée par un piège, aucune bête ne peut se poser en couvrant la case.



Question. Quel est, pour chaque type de bêtes, le plus petit nombre de pièges qui protégera le territoire ?

3 Cette situation a été construite et étudiée dans le groupe « Logique et SiRC » de l'IREM de Grenoble

4 Colipan (2014) thèse de l'université de Grenoble .

Partie 4. Éléments de « cours » sur la logique des propositions (logique classique)

Définition. Une *proposition* est un énoncé (décidable) qui n'a qu'une seule valeur de vérité : elle est soit Vraie soit Fausse.

Exemples

« L'entier 6889037 est un nombre premier » est une proposition

Les deux énoncés « $x \in \mathbb{R}, x < 2$ », et « Il fera beau demain » **ne sont pas des propositions**, on ne peut pas dire s'ils sont vrais ou faux.

Dans l'énoncé « $x \in \mathbb{R}, x < 2$ », x est une *variable libre*, on ne peut pas décider si cette phrase est vraie ou fausse. Cet énoncé peut être clos (fermé) en deux propositions qui ont des valeurs de vérité différentes (on appelle cela le *calcul des prédicats*) :

« $\forall x \in \mathbb{R}, x < 2$ », qui est une proposition fausse,

« $\exists x \in \mathbb{R}, x < 2$ » qui est une proposition vraie.

Une proposition quantifiée avec « pour tout », « quel que soit » est une proposition *universelle*. Une proposition quantifiée avec « il existe » est une proposition *existentielle*.

Note. Les *quantificateurs existentiels et universels* sont indispensables, car un des objectifs essentiels des mathématiques étant d'établir des résultats généraux, les énoncés comportent très souvent des variables.

Construction de nouvelles propositions

On construit de nouvelles propositions à partir de propositions existantes en utilisant des connecteurs logiques :

le connecteur unaire NON, symbolisé par \neg

et les connecteurs binaires ET, OU, « ou exclusif », « implique », « équivalent », symbolisés

respectivement par : \wedge \vee \oplus \rightarrow \leftrightarrow . Ces deux derniers connecteurs sont plus souvent symbolisés respectivement par \Rightarrow et \Leftrightarrow . On notera ET, OU les connecteurs logiques pour les distinguer des conjonctions de coordination usuelles.

Définitions, propriétés, exemples, et remarques

Dans ce qui suit, p et q sont deux propositions quelconques.

L'énoncé NON p est une nouvelle proposition, appelée *négation de p* , on la note aussi $\neg p$. La proposition $\neg p$ est vraie quand p est fausse et fausse quand p est vraie.

Si $A(x)$ est un propriété sur les objets x appartenant à un ensemble E ,

la négation de « $\forall x \in E, A(x)$ » est « $\exists x \in E, \text{non } (A(x))$ »

la négation de « $\exists x \in E, A(x)$ » est « $\forall x \in E, \text{non } (A(x))$ ».

Exemple. La négation de « Toutes les billes sont rouges » n'est pas « Aucune bille n'est rouge », mais « Il existe une bille qui n'est pas rouge ».

Un *contre-exemple* est une valeur d'une variable quantifiée universellement pour laquelle la proposition est fausse (pour laquelle sa négation est vraie).

L'énoncé « p ET q » est une nouvelle proposition, appelée *conjonction de p et q* , on la note aussi $p \wedge q$. La proposition p ET q est vraie uniquement quand p et q sont toutes les deux vraies.

Le sens du ET en mathématiques est proche de celui de la logique naturelle. Cependant, dans p ET q , il n'y a pas de temporalité entre p et q , comme c'est le cas dans « Je prends une entrée et un dessert ». Il n'y a pas non plus de causalité, comme dans le raisonnement déductif ou les énoncés de théorèmes.

L'énoncé « p OU q » est une nouvelle proposition, appelée **disjonction de p et q** , on la note aussi $p \vee q$. La proposition p OU q est fausse uniquement quand p et q sont toutes les deux fausses.

En logique naturelle, le « ou » est souvent perçu comme exclusif, comme dans « fromage ou dessert ». Cette interprétation est à rattacher à un principe du maximum d'information usuel dans la vie courante. Par exemple, si Arthur possède à la fois un vélo et une moto, la phrase « Arthur a un vélo **ou** une moto » ne sera pas bien acceptée, on dira plutôt « Arthur a un vélo **et** une moto ».

L'énoncé « p ou exclusif q » est une nouvelle proposition, appelée **disjonction exclusive de p et q** , on la note $p \oplus q$. Elle est vraie uniquement quand une seule des propositions p et q est vraie.

La notion de disjonction exclusive permet de renforcer la signification de la notion OU en mathématiques, relativement à celle de la logique naturelle.

L'énoncé « p implique q » est une nouvelle proposition, appelée **implication de q par p** , on la note $p \Rightarrow q$. La proposition $p \Rightarrow q$ est fausse uniquement quand p est vraie et q est fausse. On peut aussi exprimer l'implication sous les formes « si p alors q » ou « q si p », ou encore « p seulement si q ».

p est appelée la **prémisse** et q le **conséquent**.

La proposition $q \Rightarrow p$ est appelée la **réciproque** de la proposition $p \Rightarrow q$

La valeur de vérité de la réciproque d'une implication ne dépend pas de la valeur de vérité de l'implication.

La proposition $\text{NON } q \Rightarrow \text{NON } p$ est appelée la **contraposée** de la proposition $p \Rightarrow q$

L'énoncé « $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$ », qui se lit aussi « p si et seulement si q » est une nouvelle proposition, appelée **bi-conditionnelle**, on la note $p \Leftrightarrow q$, on dit que p est **équivalent** à q . La proposition $p \Leftrightarrow q$ est vraie uniquement quand p et q ont les mêmes valeurs de vérité.

Théorème. Quelles que soient les propositions p et q , $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\text{NON } p \text{ OU } q) \Leftrightarrow (\text{NON } q \Rightarrow \text{NON } p)$

La preuve est lisible dans la table de vérité ci-après.

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$q \Rightarrow p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p \Leftrightarrow \neg q$
V	V	F	V	V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F	V	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	V	V	V	V	V

En logique classique, la valeur de vérité d'une proposition est une application univoque dans un ensemble image de cardinalité 2.

- c'est une application – **principe du tiers exclu** : pour toute proposition p , p ou non p est vraie
- univoque – **principe de non contradiction** : pour toute proposition p , p et non p est fausse
- et l'ensemble image de cardinalité 2 – **principe de bivalence** : toute proposition n'a qu'une seule valeur de vérité, soit vraie, soit fausse.

Vérifonctionnalité. La valeur de vérité d'un énoncé complexe dépend uniquement de la valeur de vérité des énoncés qui le composent et de connecteurs avec lesquels ces énoncés sont reliés. Ainsi, l'implication n'est pas la déduction d'une proposition par une autre. En logique, plus généralement, il s'agit de donner une valeur de vérité à toute proposition.

Exemple. Les deux propositions « $2^7 < 23 \Rightarrow F_4 = 65537$ est un nombre premier » et « $2^7 < 23 \Rightarrow F_4 = 65537$ est divisible par 7 » sont toutes les deux vraies. Cependant, on ne peut rien déduire ni de l'une ni de l'autre, car leur prémisse est fausse.

Il est indispensable de distinguer :

- l'implication $A \Rightarrow B$, qui est vraie si A est faux ou si A et B sont vraies. A est la **prémisse** et B le **conséquent**, ils peuvent être vrais ou faux indépendamment l'un de l'autre ;
- et l'implication A vraie \Rightarrow B vraie, dans le raisonnement déductif. Sous l'**hypothèse** A considérée comme vraie, on en déduit la **conclusion** B.

Ceci est précisé dans les règles du *modus ponens* et du *modus tollens* décrites ci-après.

propositions		propositions quantifiées
	Règle du <i>modus ponens</i>	
A est vraie		A(a) est vraie
Or $(A \Rightarrow B)$ vraie		or $\forall x, A(x) \Rightarrow B(x)$
Donc B est vraie		Donc B(a) est vraie
	Règle du <i>modus tollens</i>	
$A \Rightarrow B$ est vraie		$\forall x, A(x) \Rightarrow B(x)$
Or (Non B) est vraie		Or (Non B (a)) est vraie
Donc (Non A) est vraie		Donc (Non A(a)) est vraie

Négation d'une proposition conditionnelle (implication)

Pour deux propositions A et B : $\text{non}(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow A \text{ et non } B$ (vérifiez-le).

La négation d'une proposition conditionnelle n'est pas une implication (cherchez pourquoi...).

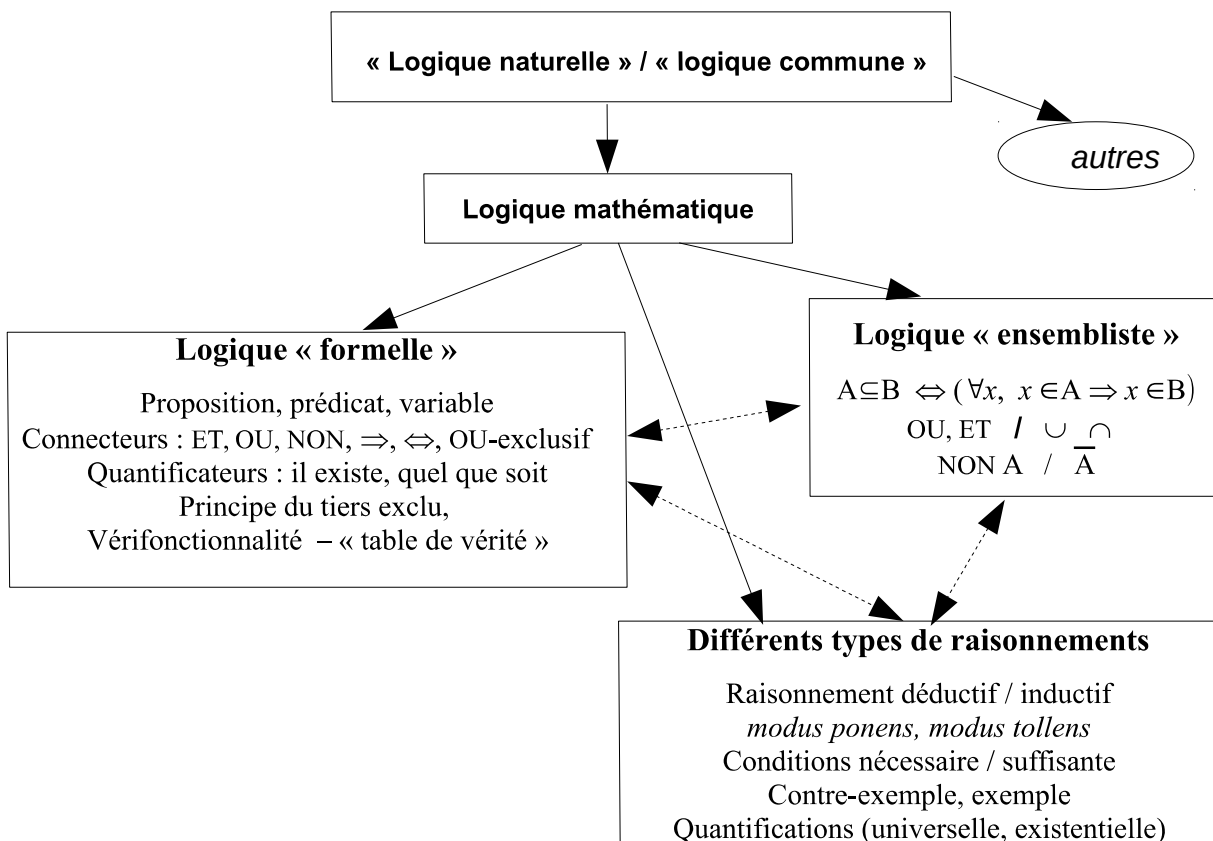
Pour deux propositions quantifiées :

la négation de « $\forall x, A(x) \Rightarrow B(x)$ » est « $\exists x ; A(x)$ et non (B(x)) »

la négation de « $\exists x, A(x) \Rightarrow B(x)$ » est « $\forall x ; A(x)$ et non (B(x)) »

Dans le cadre ensembliste, la négation de « $\forall x, x \in E \Rightarrow x \in F$ » est « $\exists x, x \in E$ et $x \notin F$ »

Le schéma ci-dessous situe les différents registres de la logique mathématique – formel, ensembliste, raisonnement déductif – et quelques notions ou axiomes de base dans chacun de ces registres.



Quelques remarques et réflexions complémentaires pour l'enseignement

Ce qui peut (et doit) être explicité – à notre avis !

La définition de l'implication contient la donnée de ses valeurs de vérité pour tous les cas possibles vrai-faux des deux propositions concernées.

La phrase « $A \Rightarrow B$ signifie que si A est vraie, alors B est vraie » ne définit pas (du tout) l'implication. D'autre part, la « remarque : une proposition peut être vraie ou fausse » fait partie intégrante de la définition.

Enfin, une implication $A \Rightarrow B$ n'est définie que si A et B sont elles-mêmes des propositions.

Il faut distinguer « $A \Rightarrow B$ est vraie » de « A vraie \Rightarrow B vraie », qui est l'un seulement des trois cas où l'implication est vraie, et aussi de « A donc B » qui est l'instanciation de « $A \Rightarrow B$ vraie », lorsque A est vraie, permettant de conclure que B est vraie (*modus ponens*).

On parlera de *condition nécessaire* ou *condition suffisante* seulement lorsque l'implication est vraie.

Lorsque $A \Rightarrow B$ est vraie, A est une condition suffisante pour B et B est une condition nécessaire pour A.

Lorsque $A \Rightarrow B$ est fausse, A est vraie et B est fausse, A n'est donc pas une condition suffisante pour B.

La réciproque, comme la contraposée, d'une implication $A \Rightarrow B$ ne sont pas définies seulement lorsque l'implication est vraie. Elles peuvent donc être fausses, l'une comme l'autre.

La valeur de vérité de la réciproque d'une implication est **indépendante** de celle de l'implication.

L'équivalence d'une implication et de sa contraposée n'est pas une « remarque » (comme on le voit parfois écrit dans les manuels), mais un théorème important dont on se sert régulièrement. Ce théorème n'est pas difficile à démontrer.

Il n'est pas possible d'écrire correctement la négation d'une phrase qui contient des implicites, car on va devoir s'en servir pour écrire cette négation. C'est donc une bonne opportunité pour montrer la nécessité d'expliciter les quantifications, le domaine où on se situe, la forme et le type d'énoncé.

Exemple. On ne peut pas nier la phrase « $x \leq 2 \Rightarrow x^2 \leq 4$ » (qui n'est pas une proposition) sans préciser dans quel domaine on se place (usuellement \mathbb{R} ou \mathbb{R}^+) et si la quantification est universelle ou existentielle.

Confusions d'expressions et de notations

Il est nécessaire de **distinguer : propriété (d'objets), proposition, événement**.

Un événement est, selon le contexte, un fait (en histoire), ou le résultat d'une expérience aléatoire (en statistiques), ou encore une occurrence d'information (en informatique), etc.. Ce ne sont pas des propositions.

Une propriété est une caractéristique que l'on peut attribuer à un objet : par exemple, Exemple. dans l'ensemble Q des quadrilatères du plan, « avoir deux angles droits » est une propriété qui caractérise un sous-ensemble de Q. Une propriété n'est pas une proposition (au sens logique du terme), mais elle permet de construire des propositions. Ainsi, « tout quadrilatère qui a deux angles droits est un rectangle » est une proposition (fausse). Cette proposition est vraie sur le sous-ensemble des parallélogrammes.

La confusion entre proposition et ensemble (ces deux notions sont introduites simultanément dans les programmes des trois années de lycée) sont parfois entretenues par de mauvais choix de notations. Ainsi, la négation d'une proposition A s'écrit « non A ». La notation \bar{A} doit être réservée au complémentaire de l'ensemble A (qui n'est pas une proposition).

Le flou ou l'**instabilité de certains symboles ou termes** désignant des notions précises de logique n'aident probablement pas à leur compréhension. Ils risquent au contraire de créer des confusions inutiles. Par exemple, on trouve parfois dans des manuels :

- des symboles non conventionnels pour l'implication ou l'équivalence, tels que \langle (implication écrite dans l'autre sens) ou \int (pour l'équivalence)
- le terme « interchangeables » pour dire qu'une implication et sa réciproque sont équivalentes.

Si ces termes ou symboles non usuels sont utilisés (mais pourquoi le faire ?), il est nécessaire de les relier explicitement à ceux des conventions usuelles.

Des exemples de la « vie courante » qui posent question

Les exemples de la vie courante sont évoqués dans les documents d'accompagnement, dans le but de relier la logique mathématique à la logique « naturelle » en montrant les ressemblances et les différences. Pour autant, les exemples ne doivent pas être pris au hasard, ni avoir trop de poids dans l'illustration des notions de logique. Prenons quelques exemples de telles phrases (trouvées tels quels dans des manuels)

A1 : « Il fait beau \Leftrightarrow Je vais me baigner »

A2 : « Il pleut \Rightarrow Je prends mon parapluie »

A3 : « Si tu manges ta soupe, alors tu auras un dessert »

Ces exemples posent question, car il n'est pas sûr qu'ils vont aider à la compréhension de l'implication : on ne peut pas leur attribuer de valeurs de vérité, et il est difficile d'écrire et d'interpréter leurs réciproques, contraposées, négations, etc. Mettre le symbole \Leftrightarrow entre deux telles phrases frise le ... ridicule, le risque est que les élèves pensent que les mathématiques c'est n'importe quoi !

La « réciproque » de A2 serait : « Je prends mon parapluie \Rightarrow Il pleut » ?? Et la « contraposée » s'écrirait « si je prends mon parapluie, alors il ne pleut pas » (?). Ces phrases doivent-elles être comprises au présent, en simultané, ou bien dans la durée ? Reprenons la « contraposée » : doit-on comprendre « si je ne prends pas mon parapluie, c'est parce qu'il ne pleut pas » ou « si je ne prends pas mon parapluie, alors il ne pleuvra pas » (magique !) ?

La phrase A3 contient une temporalité qui ne peut être réduite : on ne peut savoir si on aura un dessert qu'après avoir mangé (ou non) la soupe ! Essayez d'écrire la réciproque et la contraposée, elles n'ont pas de sens. De plus, il y a toutes les chances que dans la « vie courante » cette phrase A3 soit confondue quasi unanimement avec sa « réciproque » : « si tu ne manges pas ta soupe, alors tu n'auras pas de dessert ». Ce serait donc une équivalence implicite, qui fonctionnera bien dans la « vie courante » et n'a rien à voir avec l'implication en mathématique.

On ne peut travailler ni le point de vue syntaxique ni le point de vue sémantique sur de tels exemples. Leur rôle doit donc être très limité et ils doivent rapidement disparaître de dans la progression de l'enseignement.

Voici, pour poursuivre cette réflexion, un autre exemple étonnant, il donné dans l'unique paragraphe qui présente la « démonstration par l'absurde » d'un manuel de 1ère S (2011)⁵.

Application concrète :

Mon professeur nous a dit qu'il ferait peut-être un contrôle lundi.

Malheureusement j'ai été malade ce jour-là et n'ai pas pu aller en cours.

En revenant mardi mes camarades m'ont dit ne pas avoir eu le contrôle.

Montrer que le professeur n'a pas fait son contrôle lundi.

Exercice pour le lecteur. Écrire la démonstration demandée !

5 Il s'agit du manuel Repères 1ère S 2011, p.186

Références et bibliographie

Sur la Logique et le raisonnement mathématique

- DELOUSTAL V., GRENIER D. (2001) L'implication dans le raisonnement mathématique : Etat des lieux dans l'enseignement en France et conceptions d'étudiants, *Learning in mathematics and Science and Educational Technology*, A. Gagatsis editeur, Intercollege press Cyprus, 2001.
- DELOUSTAL-JORRAND V. (2004) *Étude épistémologique et didactique de l'implication en mathématique*, Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.
- DURAND-GUERRIER V. (2005) *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*, Habilitation à Diriger les Recherches, Université Claude Bernard Lyon.
- FABERT Ch. (2010) *Le nouveau programme de logique de seconde*, mémoire de master de Didactique des maths, Université Joseph Fourier Grenoble, en ligne : charlotte.fabert.free.fr.
- FABERT Ch. & GRENIER D. (2011), Une étude didactique de quelques éléments de raisonnement mathématique et de logique, *petit x* n°87 31-52.
- GANDIT M. (2008) *Étude épistémologique et didactique de la preuve en mathématiques et de son enseignement. Une ingénierie de formation*. Thèse de l'université Joseph Fourier.
- GRENIER D. (2015) De la nécessité de définir les notions de Logique au Lycée, *Repères IREM* n°100, 65-83.
- GRENIER D. (2012a) Research Situations to learn logic and various types of mathematical reasonings and proofs, *actes du 8ème Congress of European Research in Mathematics education*.
- GRENIER D. (2012b) Une étude didactique du concept de récurrence, *petit x* n°88 27-47.

Sur les SiRC

- COLIPAN X. (2014) *Étude didactique de situations de recherche pour la classe concernant des jeux combinatoires*. Thèse de l'université Joseph Fourier.
- GIROUD Nicolas (2011) *Rôle de la démarche expérimentale dans les Situations de recherche pour la classe*. Thèse de l'université Joseph Fourier.
- GRENIER D. (à paraître, 2015) La pratique des problèmes de recherche pour enseigner la Logique et les raisonnements mathématiques. *actes du colloque CORFEM 2014*.
- GRENIER D. (2009) Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes, *Actes du séminaire de l'ARDM*, Paris.
- GRENIER D. (2008b) Expérimentation et preuve en mathématiques, in *Didactique, épistémologie et histoire des sciences*, collection « Science, histoire et société », direction Laurence Viennot, PUF.
- GRENIER D. & PAYAN Ch. (2003) Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation, *cahiers du séminaire national de recherche en didactique de mathématiques*, Paris, 2002.
- GODOT K. (2005) *Situations de recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation*. Thèse de l'université Joseph Fourier.

Documents officiels

Bulletin officiel du collège n°6 du 28 août 2008, ministère de l'éducation nationale.

Bulletins officiels pour le Lycée : n°4 du 29 avril 2010 (Seconde), n°9 du 30 septembre 2010 (Première S), n°8 du 13 octobre 2011 du 28 août 2008 (Terminale S), ministère de l'éducation nationale.

Ressources pour les classes de 6e, 5e, 4e et 3e du collège « raisonnement et démonstration », ministère de l'éducation nationale, juin 2009.

Ressources pour la classe de seconde, ministère de l'éducation nationale, juin 2009.