Le Tour du Monde (Circuit Hamiltonien)

Objectifs :

- Découverte de la notion de graphe non orienté, son vocabulaire, ses propriétés, notions de circuits et de chemins
- Résolution de problème concret
- Questionnement autour des solutions : existence, unicité, construction, complexité
- Raisonnements algorithmiques et logiques

Modalités : Travail en groupe de 4/5 élèves par essais successifs.
Cette activité fait suite à celle sur les chemins eulériens : la tournée du facteur.

Matériel :

- planche à clous (voir le fichier « Matériel » pour la construction de la planche à clous)
- ficelle
- imprimer pour chaque groupe le fichier « Planches-Hamilton»

Intérêt : L'intérêt de l'activité est de montrer que, si la démarche reste la même que celle sur les chemins eulériens, certains problèmes sont plus difficiles que d'autres.
On ne trouve que des conditions "négatives" (conditions suffisantes mais pas nécessaires pour qu'un graphe ne soit pas hamiltonien).
Ensuite, le calcul d'une solution repose sur une énumération des circuits du graphe, que l'on essaye la plus intelligente possible.

Niveaux : Cycle 3 et Cycle 4 et lycée
On adaptera le vocabulaire et le questionnement proposé au niveau des élèves.

Pré-requis : pair et impair, chemins et cycles dans un graphe non orienté

Durée : 1h30. Cette activité peut être traitée en plusieurs fois.

Indication de durée	**Phase**	Activités et consignes	Matériel
5 min	**Introduction de la séance**	Nous allons travailler aujourd'hui sur des problèmes mathématiques qui s'appliquent à la vie courante : Quelles sont les contraintes d'un voyageur qui aimerait faire un tour du monde ? Faire émerger les réponses des élèves... (réponses attendues: passer par tous les pays ; partir de sa maison ; passer une seule fois par chaque pays; revenir à sa maison (ou pas?). Nous allons modéliser le tour du monde de ce voyageur...(explication autour de la modélisation …)	
3 min	**Présentation de l'activité et appropriation de la problématique**	Voici le tracé des liaisons aériennes entre plusieurs pays. (elles sont représentées par des segments). Les pays par lesquels le voyageur doit passer sont représentés par les points. Le voyageur doit partir de sa maison, passer une et une seule fois par chaque pays et finalement revenir sa maison (ou ailleurs ?). Son voyage est modélisé par une ficelle. Il n'est pas obligé d'emprunter toutes les lignes aériennes (à la différence du facteur) Au tableau on montre le matériel et on manipule une ou plusieurs fois la ficelle et la planche à clous.	Planche à clous et ficelle
2 min	**Distribution du matériel et constitution des groupes**	Nous distribuons à chaque groupe une planche à clous et un jeu de photocopies de planches et expliquons la manipulation pour placer les fiches. Nous constituons des groupes d'élèves homogènes en niveau.	

10 min + 5 min	**Exploration classique : Le tétraèdre, le cube, le cube à plat, l'octaèdre**	**Questionnement proposé aux élèves :** Est-il possible de trouver un chemin pour le voyageur ? Est-ce un cycle ? Es-ce que cela dépend du point de départ ? Y en a-t-il plusieurs ? Est-ce que c'est facile ? A la fin des 5 min, on organise un temps commun de restitution des réponses aux questions. On note les réponses au tableau sans hiérarchiser et sans donner son avis… Lors de la mise en commun, tester les propositions précédentes de élèves et en faire émerger de nouvelles pour répondre aux différentes questions posées.	Fiche n°1 : tétraèdre Fiche n°2 : cube Fiche n°3 : cube à plat Fiche n°4 : octaèdre
5 min+ 5 min	**Existence d'au moins une solution : graphe de Herschel, prisme, sablier**	**Questionnement supplémentaire proposé aux élèves :** A quelles conditions n'y aura-t-il pas de solutions ? ***On laisse les élèves chercher des solutions à ces trois fiches pour essayer de faire émerger les notions suivantes :*** • On rappelle la notion de degré d'un nœud d'un graphe • Le graphe de Herschel est le plus petit graphe des arêtes d'un polytope convexe qui n'a pas de cycle hamiltonien • le graphe du prisme ne permet pas de cycle hamiltonien, mais un chemin hamiltonien *(preuve : si on parcourt de droite à gauche, en partant du haut, le denier point parcouru est celui en bas à droite et aucun chemin ne permet de retourner en haut à gauche sans repasser par un point déjà parcouru.)* • Le graphe du sablier est hamiltonien • Le graphe de la maison bizarre est biparti *(on peut colorer les sommets par des jetons de 2 couleurs différentes en alternance, on constate qu'il n'y a pas le même nombre de jetons de chaque couleur, il est donc non-hamiltonien)* • Le graphe de Petersen est non-hamiltonien • Le graphe de Chvátal est hamiltonien : il a 12 sommets, 24 arêtes et 370 cycles	Fiche n°5 : graphe de Herschel Fiche n°6 : prisme Fiche n°7 : sablier Fiche n°8 : maison-bizarre Fiche n°9 : graphe de Petersen Fiche n°10 : graphe de Chvátal

		hamiltoniens distincts. • Pour les graphes eulériens, on dispose d'une condition nécessaire et suffisante simple pour déterminer si le graphe est eulérien (le théorème d'Euler). On n'a malheureusement pas trouvé d'équivalent pour les graphes hamiltoniens. On dispose néanmoins d'un certain nombre de critères, de plus en plus généraux, qui permettent d'assurer que tel ou tel graphe est hamiltonien. C'est Gabriel Andrew Dirac qui ouvre le bal en 1952, avec l'idée intuitive qu'un graphe est forcément hamiltonien lorsqu'il possède « suffisamment d'arêtes ». La meilleure caractérisation d'après le degré des sommets à laquelle on soit arrivé à ce jour est celle du théorème de Bondy et de Chvátal de 1976. D'autres théorèmes, comme celui de Ghouila-Houiri, sont des versions dans le cas des graphes orientés.	
5 min+ 5 min	**Construction de la solution**	**Questionnement proposé aux élèves :** Avez-vous mis en place des stratégies pour réussir votre parcours ? Lesquelles ? A ce moment-là, on peut faire travailler les élèves sur un algorithme qui fonctionne dans tous les cas : • Je parcours tous les sommets dans un ordre aléatoire, et donc j'essaie tous les chemins (il y en a *Factorielle(n)*), et je vois si chaque chemin est réalisable ou non.	
5 min	**Bilan**	• La démarche de recherche: on se pose des questions (existence de la solution, unicité, construction, complexité) et on essaie d'y répondre. • Les conditions nécessaires et suffisantes.	