

Situation de modélisation n°1 : superficie d'une île

Fiche enseignant.e

Groupe "Analyse et modélisation au lycée" de l'IREMI de Grenoble*

8 juillet 2025

Table des matières

1 Introduction	2
2 Énoncé	2
3 Solutions	2
4 Objectifs envisageables	3
4.1 Objectif principal	3
4.2 Objectifs secondaires	4
5 Guide pour l'enseignant.e	5
5.1 Logistique, organisation	5
5.2 Synthèses possibles	5
6 Observations expérimentales	5
6.1 Evaluation des comptes rendus	5
6.2 Difficultés observées et interventions possibles	5
7 Prolongements possibles	6
8 Annexes	9
8.1 Carte de l'île	9
8.2 Exemple de synthèse écrite pour les élèves	10

*Marie Busser (INSPE de Grenoble), Damien Jacquemoud (Lycée Frison-Roche, Chamonix), Hélène Langlais (Lycée du Mont-Blanc, Passy), Cyril Masson (Lycée du Mont-Blanc, Passy), Florence Michon (Lycée Frison-Roche, Chamonix), Raphaël Rossignol (Univ. Grenoble Alpes) et Iulia Tunaru (Univ. Grenoble Alpes)

1 Introduction

L'objectif principal de cette première activité du parcours "Mesurer, remplir" est d'introduire une première version du cycle de modélisation en précisant ce qu'on entend par modèle, et en illustrant sur cet exemple les différentes étapes (simplification, mathématisation, interprétation, évaluation et validation du modèle). De plus, cette situation permet d'introduire l'idée de donner un intervalle comme réponse quantitative, plutôt qu'un seul nombre.

Pré-requis : mise à l'échelle, formules de l'aire de figures géométriques simples (carré, rectangle, triangle, trapèze).

2 Énoncé

Partie A.

Individuellement, donner une approximation de la superficie de l'île dont voici une photographie aérienne. Vous pouvez négliger les parties submergées et les plages. (2 minutes)

La figure est dans l'annexe (section 8.1). Il s'agit de l'île d'Aix.

Partie B.

Par groupes de 3 ou 4, donner un encadrement le plus précis possible de la superficie de l'île (un encadrement consiste à chercher une valeur inférieure et une valeur supérieure à la superficie).

Un compte rendu par groupe est attendu. Cela devrait contenir la description de la méthode, les constructions réalisées et les calculs. (30 minutes)

3 Solutions

Partie A : On peut approcher grossièrement l'île par des figures simples dont l'aire peut être calculée de tête ou rapidement. Par exemple, on peut comparer l'île à un triangle rectangle isocèle qui aurait environ 1.5 km de côté, ce qui donne une superficie de 1.125 km^2 . A l'aide d'une règle, on peut aussi approcher la surface de l'île par la surface d'un trapèze de bases 3.22 km et 1.37 km rempli aux deux tiers. Le résultat serait 1.53 km^2 .

Partie B : Après avoir tracé un contour de l'île, on peut approcher la surface de l'île par l'intérieur et par l'extérieur au moyen de divers pavages (triangles, carrés, trapèzes). Par exemple (cf. section 8.2) :

- On peut quadriller la feuille entière avec des carreaux réguliers, compter ceux qui sont entièrement à l'intérieur du contour, et obtenir ainsi une borne inférieure. Pour la borne supérieure, on rajoute juste les carrés qui intersectent le bord. Il est nécessaire de connaître l'aire d'un carreau, et l'évaluation de cette aire sera moins entachée d'erreur si on calcule l'aire d'une très grande région rectangulaire. Enfin, il faut faire la mise à l'échelle correctement pour revenir à l'île réelle.
- Le quadrillage peut paraître fastidieux, et peu utile dans des zones où le contour ne passe pas. On peut partir d'un quadrillage grossier et le raffiner près du contour.

- On peut aussi utiliser d'autres formes pour paver une grande zone de l'intérieur du contour (rectangles, triangles).

En utilisant un quadrillage régulier de 0.5 cm sur une feuille A4 (environ 80 m à l'échelle), on peut trouver l'intervalle $[1.14, 1.71]$ km². En raffinant la borne inférieure avec diverses figure géométriques on peut arriver à 1.35 km². D'autres réponses sont évidemment possibles.

En mesurant l'aire contenue dans le contour de l'île d'Aix (en comptant les plages découvertes) à l'aide de Google Earth, on trouve environ ¹ 1.41 km².

4 Objectifs envisageables

4.1 Objectif principal

L'objectif principal de cette activité est l'introduction de la notion de modélisation en utilisant un cycle.

Un modèle est une représentation simplifiée de la réalité, et on parle de modèle mathématique lorsque les objets représentant la réalité sont des objets mathématiques. La question d'intérêt doit avoir une traduction dans le monde mathématique, et la réponse à cette question mathématique sera interprétée pour donner une réponse à la question initiale. Dans notre cas, on peut par exemple avoir un modèle par quadrillage qui nous permet de calculer les deux bornes ou un modèle qui contient deux contours différents (un pour la borne sup et un pour la borne inf).

On peut remarquer que la question initiale peut déjà comporter une forme d'abstraction. En effet, la notion de superficie correspond déjà à une représentation partiellement abstraite. De plus, l'image fournie est déjà une représentation simplifiée de la réalité, et on la rend abstraite en passant à un contour, vu comme une courbe (sans épaisseur) dans le plan.

Simplification du modèle réel Cette étape consiste à ignorer ou simplifier tous les aspects de la réalité qui complexifieraient trop ou qui empêcheraient la modélisation de la situation donnée. Dans notre situation il s'agit d'ignorer le relief et de choisir des contours utilisant des figures simples ainsi que d'ignorer l'épaisseur du contour. Le fait de ne pas compter les parties submergées (mais visibles sur la photo) relève d'une convention et non d'une simplification.

Modèle mathématique et résolution Le travail intra-mathématique nécessite la définition des contours extérieurs et intérieurs avec des figures d'aires connues, l'introduction de variables pour exprimer les différentes longueurs clefs intervenant dans ces figures (étape optionnelle), la recherche des formules et des mesures nécessaires aux calculs, l'application de ces formules.

1. Remarquons que sur Wikipedia, à la date du 18 octobre 2024, la surface donnée est de 1.39 km² mais l'article ne précise pas l'origine de ce chiffre (qui a varié depuis la création de l'article) et la méthode pour l'obtenir n'est pas documentée. Attention, il y a deux articles sur Wikipedia : [un consacré à la commune](#) et [l'autre consacré à l'île](#). Les deux articles donnent des superficies différentes. L'article sur la commune tire son chiffre de l'INSEE (1.19 km², chiffre extrait de la [base du comparateur de territoires](#)) qui est basée sur des données cadastrales ne prenant pas nécessairement en compte certains éléments naturels.

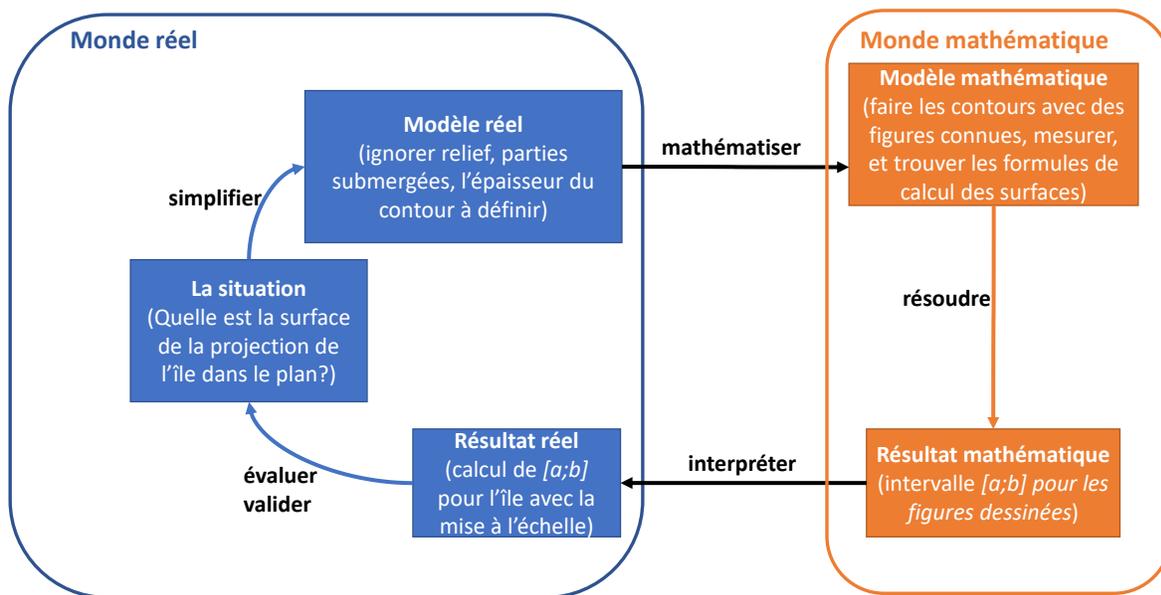


FIGURE 1 – Cycle de modélisation pour la situation île

Interprétation L'interprétation correcte du calcul mathématique nécessite la mise à l'échelle et le rappel des hypothèses effectuées.

Evaluation et validation Une fois la réponse mathématique interprétée, il convient de se poser la question de l'évaluation et de la validation du modèle (cf. document cadre, notamment pour la distinction validation empirique / validation théorique). Concernant la *validation*, on peut par exemple :

- vérifier la cohérence entre les résultats de la partie A et ceux de la partie B,
- vérifier la cohérence des résultats provenant de groupes ayant utilisé des méthodes différentes,
- comparer les résultats obtenus à des résultats donnés par un "expert" extérieur (Calcul de superficie via Google earth),
- pour une méthode de validation empirique, cf. section 7.

Une fois le modèle validé, on peut se poser la question de son *évaluation*. Dans le cas présent, on peut évaluer la précision de la réponse à l'aide de la largeur relative $\frac{b-a}{a}$ de l'intervalle $[a, b]$.

4.2 Objectifs secondaires

Plusieurs objectifs secondaires sont également poursuivis :

- l'utilisation d'un intervalle pour répondre à une question qui parle d'une seule valeur (i.e., la surface de l'île),
- l'identification des limitations du modèle :

- il y a des erreurs dues à ce qui manque ou est en trop par rapport à la réalité : simplification (de méthode inconnue) de la projection donnant l'image initiale, délimitation entre parties submergées et la terre, non-prise en compte du relief,
- et des erreurs dues au tracé ou aux mesures : l'épaisseur du trait, les erreurs de mesure et leur propagation quand on somme plusieurs aires.
- faire sentir l'importance du temps disponible sur le modèle utilisé et la qualité de la réponse (comparaison entre la partie A et la partie B).

5 Guide pour l'enseignant.e

5.1 Logistique, organisation

Avant la séance, prévenir les élèves qu'ils devront apporter une règle. Prévoir de donner plusieurs images par groupe pour avoir la possibilité de faire 2 constructions différentes pour la phase 2. La durée recommandée de l'activité est entre 55 minutes et 1h05, suivie d'une synthèse de l'enseignant de 10 minutes, qui peut être décalée à une prochaine séance.

Phase 1 : partie A, recherche individuelle et mise en commun. (15 minutes)

- On donne la partie A aux élèves. Ils ont deux minutes pour donner une approximation de la superficie de l'île. (5 minutes)
- On interroge à l'oral deux élèves qui viennent présenter leur démarche. (10 minutes)

Phase 2 : partie B, recherche par groupe et présentation. (40-50 minutes)

- On donne la partie B et on explique ce qui est attendu.
- Recherche par groupe. (30-40 minutes)
- A l'oral deux groupes viennent présenter leurs démarches. Il serait intéressant de projeter leur découpage ou la figure initiale au tableau. (10 minutes)

Phase 3 : synthèse par l'enseignant. (10 minutes)

5.2 Synthèses possibles

Après une discussion orale, une trace écrite contenant un cycle de modélisation simplifié pourrait être proposée en classe ou déposée sur l'ENT (voir annexe 8.2). Pour plus de détails, se référer à la section 4.

6 Observations expérimentales

6.1 Evaluation des comptes rendus

Vous pouvez trouver dans la table 1 une proposition de grille d'évaluation pour les compte-rendus.

6.2 Difficultés observées et interventions possibles

Les difficultés rencontrées sont essentiellement de deux types : mauvaise gestion de la mise à l'échelle et mauvaise interprétation de l'encadrement demandé. Pour plus de détail, se référer à la table 2

	0 (non-acquis)	1 (en cours d'acquisition)	2 (acquis)
Qualité de la rédaction	Aucune ou très peu de rédaction (mesures et calculs sans explications).	Rédaction non-aboutie ou avec peu de détails.	Rédaction complète et claire.
Compréhension de la notion d'encadrement	Une seule valeur ou deux valeurs inférieures/supérieures sont données.	L'objectif d'encadrement est compris mais la stratégie de mise en oeuvre est erronée.	L'objectif d'encadrement est compris et la stratégie est correcte.
Raffinement ou précision du modèle choisi	Les figures géométriques utilisées ne sont pas plus petites que celles de la phase 1.	Les figures géométriques utilisées sont plus petites mais il n'y a pas de raffinement autour des bords.	Les figures utilisées sont plus petites que celles de la phase 1 et il y a un raffinement ou une prise en compte différente des bords.

TABLE 1 – Grille d'évaluation pour les compte-rendus.

7 Prolongements possibles

Des prolongements peuvent être suscités par les questions suivantes : y a-t-il une formule pour calculer l'aire de l'île? Comment fait Google Earth pour déterminer la superficie de l'île une fois qu'on a tracé un contour polygonal de celle-ci?

Dans un repère orthonormé d'origine O , l'aire algébrique d'un triangle OAB est égale à $\frac{1}{2}(x_A y_B - x_B y_A)$. En effet, on sait que le déterminant de (\vec{OA}, \vec{OB}) est égal à l'aire algébrique (i.e comptée positivement si (\vec{OA}, \vec{OB}) est directe) du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs. Si on considère un polygone convexe étoilé par rapport à l'origine² et parcouru en sens direct, on voit qu'alors, en notant (x_i, y_i) les coordonnées de M_i et en convenant que $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_1, y_1)$, l'aire du polygone est égale à la somme des aires des triangles $OM_i M_{i+1}$, ce qui donne

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i .$$

Si le polygone est parcouru dans le sens indirect, il faut prendre l'opposé de ce nombre pour obtenir l'aire. Dans tous les cas, la valeur absolue donne donc l'aire cherchée. Un moment de réflexion permet de se convaincre que la formule est valable également si le polygone n'est pas étoilé par rapport à O , mais contient O . En effet, l'aire algébrique négative des triangles $OM_i M_{i+1}$ de sens indirect permettant de compenser les morceaux comptés "en trop" dans les triangles directs $OM_i M_{i+1}$ qui ne sont pas totalement inclus dans le polygone. Enfin, le déterminant étant invariant par changement d'origine, le fait que O soit à l'intérieur du polygone n'est pas non plus nécessaire. On obtient donc comme formule :

$$A = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^n x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i \right| .$$

2. Un polygone P est dit étoilé par rapport à un point O si pour tout point $A \in P$, le segment $[OA]$ est inclus dans l'intérieur de P (frontière comprise).

Phase	Evènement	Interprétation	Cycle	Intervention
1	Erreur d'ordre de grandeur	Peut être lié à une mauvaise lecture de l'échelle	Intra-mathématique et interprétation	Laisser faire ... se décantera durant la phase 2
2	Echelle mal exploitée	Prérequis sur la notion d'échelle non maîtrisés	Intra-mathématique et interprétation	Faire un point sur les différentes manières d'utiliser l'échelle.
2	Pas d'intervalle, juste une valeur	Mauvaise interprétation de l'encadrement	Mathématisation et interprétation	Faire un point avec le groupe sur l'interprétation de l'encadrement demandé
2	Donne une valeur et ajoute de manière arbitraire une marge d'erreur	Mauvaise interprétation de l'encadrement	Mathématisation et interprétation	Faire un point avec le groupe sur l'interprétation de l'encadrement demandé
2	Raffinement d'une borne sup à la place d'une borne inf	Mauvaise interprétation de l'encadrement	Mathématisation et interprétation	Faire un point avec le groupe sur l'interprétation de l'encadrement demandé
2	Au lieu d'encadrer l'aire par les aires d'ensemble contenant ou étant incluses dans l'île, le groupe trace des figures qui "traversent la frontière de l'île" en s'efforçant d'avoir des compensations entre les parties incluses dans l'île et celles qui ne le sont pas.	Mauvaise interprétation de l'encadrement	Mathématisation et interprétation	Faire un point avec le groupe sur l'interprétation de l'encadrement demandé
2	Erreur de formule pour l'aire d'un disque		Intra-mathématique	Prévoir en amont de la séance de leur demander avant la tâche de revoir les formules de l'aire d'un disque, d'un triangle, d'un rectangle, d'un trapèze.

TABLE 2 – Difficultés fréquemment rencontrées

Nous ne savons pas exactement comment Google Earth fait pour calculer l'aire à partir d'une ligne polygonale. Néanmoins, on peut présumer qu'il utilise une méthode similaire, prenant en compte la courbure terrestre³. D'une manière générale, les systèmes d'informations géographiques utilisent des coordonnées similaires aux coordonnées cartésiennes, mais plusieurs nuances sont à apporter :

- sur la Terre, le système de coordonnées n'est pas un système de coordonnées cartésiennes, mais un système de coordonnées de type sphérique (latitude et longitude).
- Si la portion qu'on regarde est suffisamment petite pour négliger la courbure de la terre, on peut transformer les coordonnées sphériques en coordonnées cartésiennes, localement, et appliquer la formule ci-dessus. Pour les distances concernées par la présente activité, qui sont de l'ordre du kilomètre, la différence due à la courbure de la Terre est en effet négligeable devant la précision que l'on peut atteindre avec les moyens utilisés.
- Si on assimile la Terre à une sphère, et qu'on ne souhaite pas supposer qu'elle est plane, on peut adapter la formule ci-dessus. Cf. le [problème 99 dans le livre de Toddhunter](#).
- Si on assimile la Terre à un ellipsoïde (légèrement aplati aux pôles), alors il faut encore adapter la formule.⁴

Remarquons qu'avec les données dont disposent les élèves, il est difficile de prendre en compte la courbure terrestre : ils ont une représentation plane et ne savent pas comment elle a été obtenue. Plusieurs questions peuvent alors mener à des prolongements naturels :

- Comment projeter une portion de la Terre sur un plan ? Voir par exemple [cette description de la projection de Mercator](#).
- Historiquement, comment faisait-on dans le passé pour mesurer des aires, et à quoi cela pouvait-il servir ? A ce propos, une mallette de l'IREMI de Grenoble permettant de faire des mesures sur le terrain avec des outils anciens est [disponible ici](#). Une ressource eduscol sur la mesure de la Terre (consacrée aux mesures de longueurs) est [disponible ici](#).

Enfin, on peut parler de validation empirique en testant la méthode employée sur une figure dont on connaîtrait la surface (normalisation ou pratique commerciale par exemple) : carreau de carrelage, CD, carte bancaire ou d'identité, feuille A5 etc.

3. Nous serions curieux d'obtenir une information à ce sujet, nous n'avons pas pu l'obtenir sur le site de Google Earth.

4. Remarquons que tout ceci néglige les aspérités à la surface de la Terre.

8 Annexes

8.1 Carte de l'île

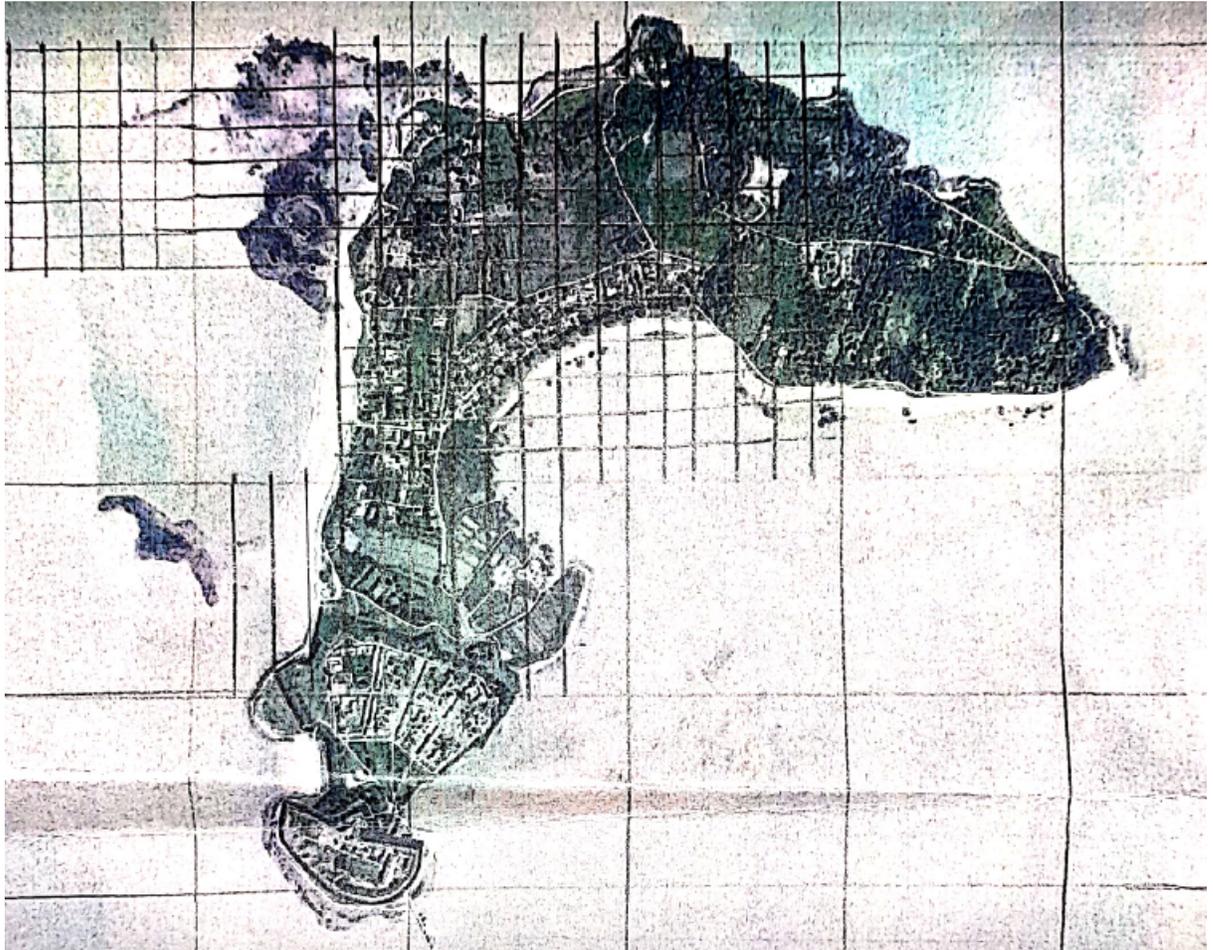


8.2 Exemple de synthèse écrite pour les élèves

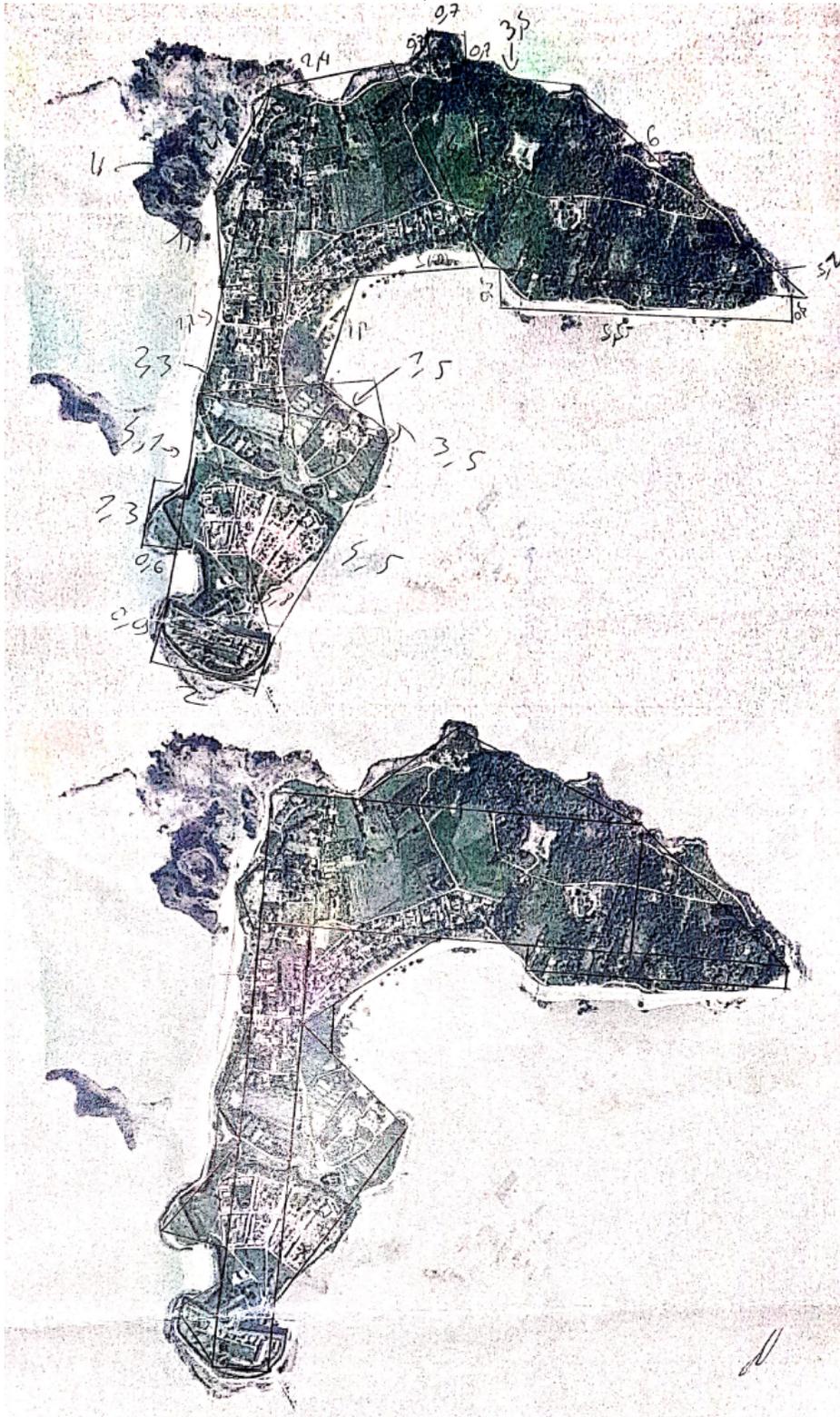
Énoncé Donner un encadrement (une valeur inférieure et une valeur supérieure) de la surface de l'île ci-dessous. L'encadrement devrait être le plus précis possible. Vous pouvez négliger les parties submergées et les plages.

Deux constructions possibles

1. Encadrement donné à partir d'un quadrillage par comptage de carreaux.



2. Calcul d'une valeur supérieure et d'une valeur inférieure à partir de deux constructions (une par l'extérieur, l'autre par l'intérieur).



Éléments de synthèse

1. Qu'a-t-il fallu faire pour proposer un résultat ?

Pour approximer la superficie de l'île, nous avons dû transformer un problème concret en un problème mathématique à travers un *modèle mathématique*, dans notre cas des figures géométriques dont on sait calculer l'aire. Plusieurs modèles sont possibles, chacun peut choisir le découpage géométrique qu'il souhaite.

2. Quelle est la différence entre les approches des parties A et B ?

Le choix du modèle dépend des *contraintes*. Ici le temps nous impose un modèle plus ou moins grossier. D'autres contraintes peuvent exister pour le choix d'un modèle : le coût, les outils à disposition . . .

3. Comment estimer la qualité des résultats obtenus ?

D'abord, avoir un *encadrement* est un résultat plus riche en information qu'une simple valeur approximative. Toutefois un encadrement est différent de l'intervalle d'incertitude associé à une valeur approximative.

On peut aussi réfléchir à la cohérence des réponses entre les parties A et B, ensuite entre différents modèles (des pairs ou avec un logiciel) ainsi que valider la méthode de découpage sur des figures d'aires connues. Ceci est une étape de *validation* du modèle choisi.

Enfin, on peut prendre comme critère d'*évaluation* de la qualité du modèle la différence entre la valeur supérieure et la valeur inférieure rapporté à une des bornes pour avoir une valeur relative.

4. Que peut-on dire des erreurs commises ?

On distinguera les erreurs dues au tracé de la grille et aux imprécisions de mesures et les erreurs dues à ce qui manque ou est en trop par rapport à la réalité.

Cycle de modélisation A partir du travail réalisé sur cette activité nous pouvons faire une synthèse des différentes étapes d'une activité de modélisation réunies dans ce qu'on appelle un *cycle de modélisation*.

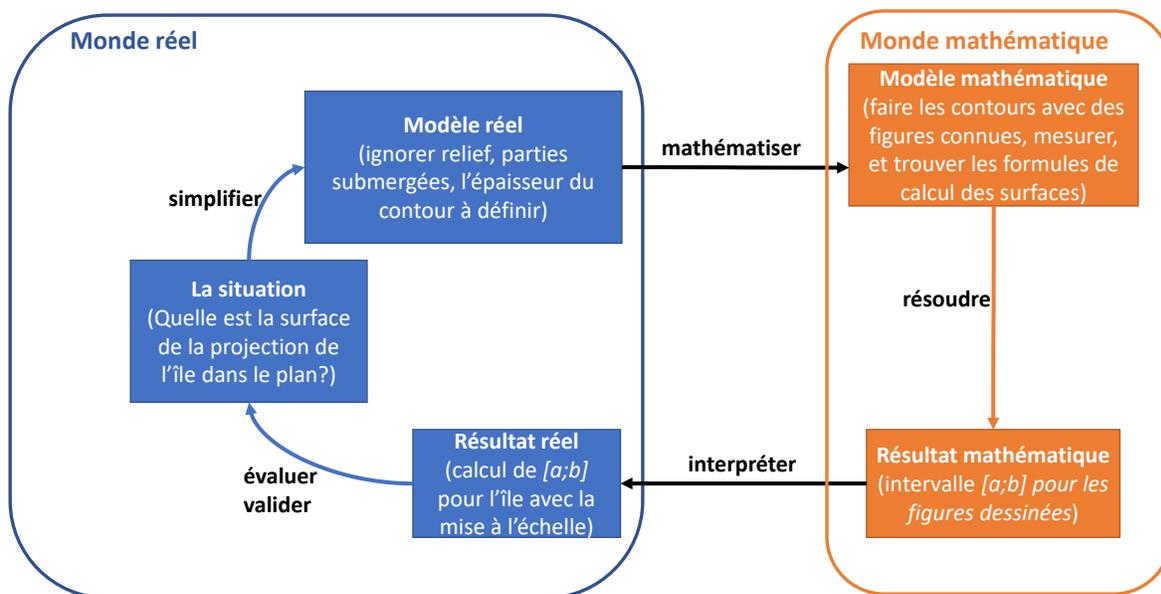


FIGURE 2 – Cycle de modélisation pour la situation île