Situation de modélisation n°3: les balles de ping-pong
Fiche enseignant.e

Groupe "Analyse et modélisation au lycée" de l'IREMI de Grenoble.*

8 juillet 2025

Table des matières

*Marie Busser (INSPE de Grenoble), Damien Jacquemoud (Lycée Frison-Roche, Chamonix), Hélène Langlais (Lycée du Mont-Blanc, Passy), Cyril Masson (Lycée du Mont-Blanc, Passy), Florence Michon (Lycée Frison-Roche, Chamonix), Raphaël Rossignol (Univ. Grenoble Alpes) et Iulia Tunaru (Univ. Grenoble Alpes)

1 Introduction

L'activité sur les balles de ping-pong s'inscrit dans le parcours de modélisation *Mesurer, remplir* qui vise à travailler les compétences mathématiques liées aux espaces et aux formes. Plus précisément, dans ce troisième volet du parcours, les élèves ou étudiant.e.s seront confronté.e.s à la représentation géométrique d'un problème facile à énoncer : *Combien de balles de ping-pong pourrait-on mettre dans cette pièce ?* mais aussi à la résolution algébrique d'un modèle mathématique associé et à l'interprétation des résultats. L'objectif principal de cette activité est de détailler la phase de validation et d'évaluation du modèle mathématique à travers l'utilisation d'un modèle réduit pour la salle – une boîte à chaussures – et construire ainsi un cycle de modélisation complet.

Pré-requis : Volume d'un parallélépipède droit, volume d'une boule, conversion de longueurs et de volumes. Pour le cas compact : Pythagore, tétraèdre.

2 Énoncé

Phase 1: individuelle ou en binôme

Chaque élève doit estimer le nombre maximal de balles de ping-pong pouvant tenir dans la salle de classe.

Consigne:

Vous avez 5 minutes pour donner une estimation du nombre maximal de balles de ping-pong que l'on peut mettre dans la salle de classe. Voici une balle.

Durée : 15 minutes dont 5-7 minutes de mise en commun.
Matériel : crayon, papier, calculatrice.
Donner une balle ou donner le diamètre d'une balle ($4\,cm$).
Mise en commun :

— Recueillir des réponses au tableau en les regroupant par ordre de grandeur (puissances de 10). Faire voter les élèves par comptage des voix.

— Demander à un ou deux élèves d'expliciter la méthode adoptée.

— Si certains n'ont pas trouvé de réponse par le calcul, on peut leur demander de donner une réponse intuitive.

En fin de phase 1, souligner qu'il est impossible de départager les réponses. Dans la suite, nous allons imposer deux contraintes : il faudra que les élèves donnent comme réponse un intervalle plutôt qu'un nombre unique (idée d'incertitude) et qu'ils valident leur méthode sur les modèles réduits. Avant de projeter la consigne de la phase suivante, si possible, faire verbaliser le protocole de test (utilisation des boîtes pour les modèles réduits).

Pour préparer la phase 2, on peut aussi élargir la discussion pour mettre en évidence deux notions clé de la modélisation :

— la difficulté de savoir qui a raison (i.e. **la validité du modèle**),

— est-ce que les réponses sont proches ou non de la réalité (i.e. **l'évaluation du modèle)**.

Phase 2: groupes de 3-4 élèves

Consigne:

Les balles ont un diamètre de 4 cm.
On note N le nombre maximal de balles que peut contenir la salle.
Donner un intervalle de sûreté pour N, c'est-à-dire un intervalle $[a; b]$ dont on est sûr qu'il contient N. Les critères à prendre en compte sont :

— critère de validation du modèle : votre méthode pour trouver un intervalle de sûreté devra être testée avec une boîte et des balles test (et le test devra réussir),

— critère d'évaluation du modèle : $\frac{b-a}{a}$ devra être le plus petit possible.

Rendu : résoudre la question sur une feuille et remplir la colonne du tableau des résultats.

Durée : environ 1h30

— 5' énoncé

— 45'-1h recherche en groupe

— 15'-25' mise en commun (correction et synthèse)

Matériel : boîtes et balles disponibles pour le test.

Afin de faciliter la lecture des sections suivantes et s'approprier l'activité efficacement, nous recommandons aux enseignant.e.s de l'essayer en autonomie avant de se référer à la correction détaillée (annexe 7.1). Plus de recommandations sur la mise en oeuvre des deux phases seront ensuite proposées dans la section 4.

3 Objectifs envisageables

3.1 Objectif principal

Dans la situation "ping-pong", on souhaite mettre en oeuvre une étape de validation expérimentale. Comme il n'est pas possible ni souhaitable de remplir la salle de classe avec des balles de ping-pong pour ensuite les compter, on réalise une expérience sur un modèle réduit – une boîte à chaussures – pour voir si nos prédictions sont cohérentes avec le résultat obtenu pour le modèle réduit.

On fait également ressortir l'aspect évaluation du modèle avec le critère de performance du modèle « $\frac{b-a}{a}$ doit être le plus petit possible ».

Quelques remarques sur la mise en œuvre de cet objectif :

— Il nous semble important que les critères de validité et d'évaluation soient fixés avant la recherche du modèle, car ils permettent de préciser la problématique et donc de guider la construction du modèle. En effet, obtenir un encadrement implique une démarche différente d'un raisonnement approximatif par ordre de grandeur. De plus, chercher un résultat à la fois pour la salle et pour une boîte dont les dimensions ne sont pas encore connues incite à chercher une formule littérale.

— La manipulation concrète lors de l'expérience des boîtes à chaussures nous semble signaler et faire ressentir clairement la sortie du "monde mathématique", le retour au "monde réel", ce qui peut contribuer à aider à distinguer les différentes phases du cycle de modélisation (cf. la présentation d'un cycle de modélisation dans le document cadre sur les parcours de modélisation).

— Cette manipulation peut également permettre de faire penser à mathématiser le cas compact (cf. sections 7.1.2 et 7.1.3).

— La phase 1 ne comporte aucun critère de validation ou d'évaluation. Cela peut être utilisé dans le bilan, en soulignant le contraste avec la suite : à l'issue de la phase 1, différents résultats vont émerger. Qui a raison ? qui a tort ? on ne sait pas répondre en termes de validation. De plus, du point de vue évaluation, ce qui est donné est un ordre de grandeur, beaucoup plus flou qu'un intervalle, et donc de moindre qualité en termes de mesure de performance du modèle.

3.2 Objectifs secondaires

Ils peuvent être soulignés lors du bilan. Certains de ces objectifs ne devront sans doute être soulignés que si les élèves ont mis en évidence un comportement particulier.

— Incertitude et arrondis : pour un jeu d'hypothèses donné, l'application numérique contiendra une certaine incertitude, combinaison de deux types d'erreurs : les erreurs de mesures (des dimensions de la salle et des balles, dans le cas présent), et les arrondis dans la mise en œuvre du calcul. Idéalement le résultat final devrait mentionner ces différentes sources d'erreur et comparer leurs natures et influences sur le résultat final (pour plus de détails voir 6.2).

— Hiérarchisation des hypothèses : au cours ou à la fin de la phase 2, on est amené à raffiner le modèle dans telle ou telle direction en modifiant telle ou telle hypothèse de modélisation. Par exemple, si on a fait l'hypothèse d'un pavé droit et fait un calcul d'empilement cubique sans prendre en compte l'effet de bord, laquelle des voies suivantes est-il préférable de privilégier ?

- prendre en compte les effets de bords sur la salle,
- changer de motif d'empilement pour aller vers un empilement plus compact,
- prendre en compte une forme de salle plus fidèle à la réalité, par exemple en excluant un poteau.

On peut faire travailler les élèves sur cette hiérarchisation en leur demandant d'estimer l'ordre de grandeur de chaque effet (voir la prolongation possible dans la section 6.3).

- Dépendance du modèle construit aux contraintes de ressources :
  - le temps disponible : la première phase très contrainte en temps aboutira à un modèle très fruste, mais qui peut tout de même être validé et évalué,
  - le matériel disponible : une fois qu'un groupe a une boîte à disposition, il peut faire une méthode par proportionnalité, cf. section 7.1.4,
  - les mathématiques disponibles : si on a déjà vu le cas compact 2D, on peut plus facilement se lancer dans le cas compact 3D.
- Le fait qu'il y ait plusieurs procédures possibles, plusieurs modèles validés possibles, donne un autre moyen de contrôle (cf. la "cohérence théorique" dans le document cadre sur les parcours de modélisation).

4 Guide pour l'enseignant.e par phase

Phase 1 : Cette phase permet une appropriation du problème par les élèves (compréhension et premières réflexions) et initie la dévolution nécessaire tout au long de l'activité. En même temps, cela demande un travail sur les ordres de grandeur et permet aussi de poser les premières questions de méthode : comment allons-nous pouvoir donner un ordre de grandeur convenable ?

Quelques remarques :

- Une balle par groupe peut-être donnée, mais cela peut produire des nuisances sonores si les élèves jouent avec.
- Il est préférable de laisser les élèves estimer les dimensions de la salle au début pour avoir différentes réponses et mettre en évidence l'importance de la phase 2.
- Si besoin, se mettre d'accord sur certaines simplifications de la situation réelle (par exemple la salle est assimilée à un pavé droit).
- Dans le meilleur des cas, les élèves connaissent ou demandent la formule du volume d'une sphère. Si ce n'est pas le cas, il faudrait faire sentir ce besoin.
- Si possible, observer les premières représentations que les élèves utilisent (balles déformables, négliger l'espace vide, balles inscrites dans des cubes etc.) afin de les verbaliser au moment de la mise en commun.

Phase 2 : Dans cette phase de recherche et test, organisée par groupe, la consigne se précise et demande au professeur de bien rappeler le but de la question : chercher un intervalle de sûreté et non un nombre de balles. Les analyses a posteriori de nos expérimentations en classe ont montré l'importance de décortiquer l'énoncé avec les élèves dès le début.

Pendant la première étape de recherche et avant les tests, le rôle principal de l'enseignant est de tourner entre les groupes (idéalement deux passages dans chaque groupe) pour débloquer et faire avancer les recherches si besoin. Si plus de deux passages sont nécessaires, un point commun sur le calcul de l'intervalle $[a; b]$ peut-être fait pour que les élèves puissent aborder le test avec les idées claires.

Remarques :

— Installer les boîtes et les balles dans un endroit accessible où les élèves peuvent venir les chercher en autonomie une fois la recherche d'intervalle finie.
— Faut-il donner les dimensions des boîtes aux élèves ? Laisser les élèves les mesurer permet de leur faire ressentir les incertitudes de mesures et nous semble préférable, mais cela prend un peu de temps.
— Faire le tableau des résultats sur un tableau caché ou le projeter pour gagner du temps. Dans le tableau on peut utiliser des annotations (* ou #) pour mettre en évidence les réponses avec des balles rangées pour le test ou les bornes inférieures qui prennent en compte les effets de bord.
— Projeter la consigne au tableau et lire/faire lire l'énoncé à voix haute pour s'assurer de la compréhension générale et surtout de la compréhension de la procédure de test.
— Si un groupe est en difficulté (par exemple avec les calculs de volume), lui proposer de manipuler la boîte et des balles avant la phase de test.
— Variante : si ce n'est pas trop perturbant pour vos élèves et si vous voulez les encourager à utiliser des formules littérales, vous pouvez choisir de ne pas donner les dimensions de la salle dans l'énoncé. Si un groupe demande, on peut lui donner les dimensions de la salle et/ou des balles en lui disant : “Es-tu sûr d'en avoir besoin ? Tu peux travailler avec ou sans”.
— Il est possible que les binômes aient trouvé juste une borne de l'intervalle par leur méthode de calcul et qu'ils ne se rendent pas compte de quelle borne il s'agit. Pour les débloquer, on peut leur demander s'il s'agit d'un nombre minimum ou maximum de balles et pourquoi, et leur suggérer de faire un dessin.
— Idéalement, il faudrait stimuler au maximum les dessins (propres). Le fait de demander un rendu et de les inciter à le préparer très tôt peut aider.
— Lors du calcul de la borne inférieure, certains élèves appliquent la partie entière directement au rapport des volumes donc ils ne prennent pas en compte les effets de bord sur chaque dimension. On peut les orienter sur la nécessité de regarder ce qui se passe sur chaque dimension.

A l'issue du test, plusieurs questions apparaissent :

— Pour les binômes dont le test a été réussi (cela ne devrait pas être le cas si les binômes n'ont pas pensé à l'effet de bord car les boîtes sont utilisées pour mettre en évidence cet effet), faites vérifier que les boîtes peuvent se fermer sans forcer. Si le test est quand même validé, on peut les questionner sur le critère d'évaluation.
— Pour les binômes dont le test n'a pas été réussi : quels éléments n'avaient pas été pris en compte qui vous sont apparus lors de la mise à l'épreuve ?
— D'une manière générale : prendre du recul : que pensez-vous de votre réponse et de vos hypothèses ? Comment améliorer votre modèle ? Cf. section 6.

— Certains élèves observent que le nombre de balles trouvées avec les boîtes est plutôt proche de a que de b et cela suggère plutôt d'améliorer la borne supérieure (ce qui est plus difficile d'un point de vue théorique, cf. la question de l'optimalité du cas compact dans la section 6).

Synthèses possibles La phase de synthèse (et la trace écrite associée) consistera à mettre en valeur les objectifs atteints par les élèves, (cf. section 3) et à mettre en évidence le parcours de modélisation réalisé sous la forme d'un cycle (cf. Figure 1).

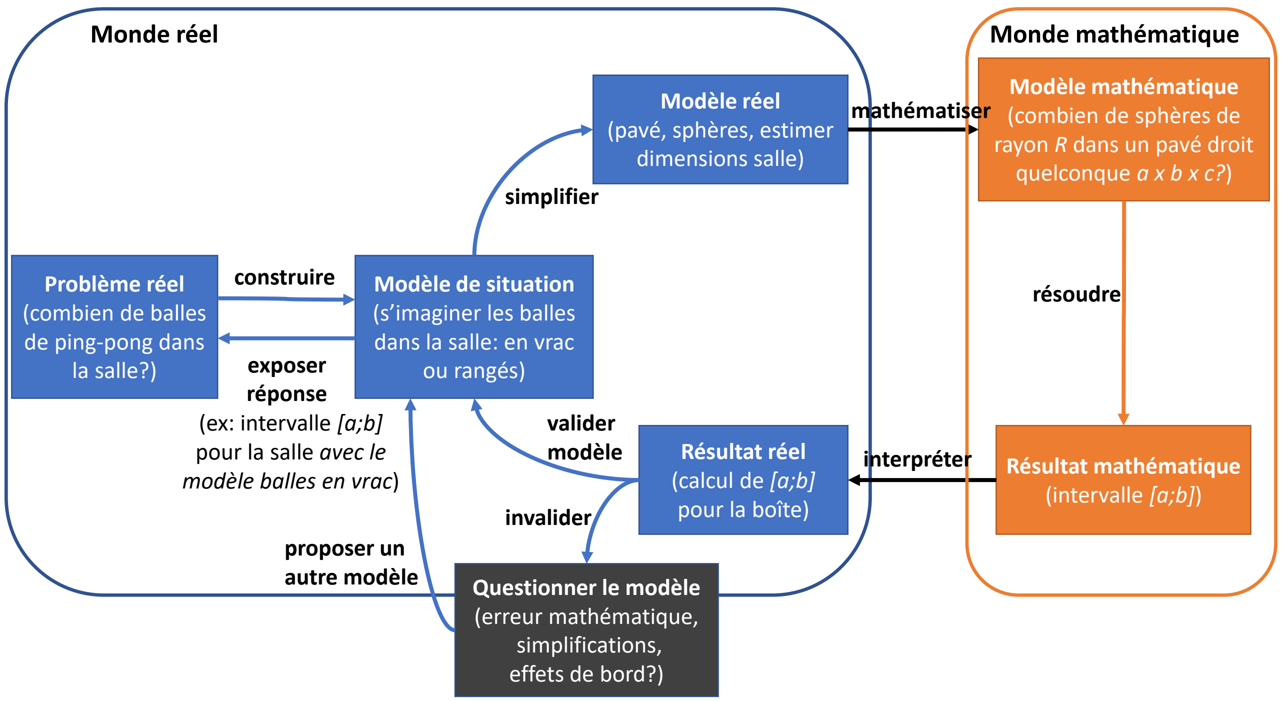

FIGURE 1 – Cycle de modélisation pour la situation ping-pong

On discutera prioritairement des points suivants :

— le cycle de modélisation dans ce cas particulier,

— l'étape de validation qui consiste en une cohérence empirique (cf. la notion de cohérence empirique dans le document cadre) : dans cette activité, les élèves ont testé la cohérence du modèle à l'aide d'une expérience (usage des boîtes) et non pas en le comparant à un autre modèle déjà validé (cohérence théorique),

— le fait que le modèle réduit fait apparaître une difficulté (l'effet de bord) qui semble plus importante pour la boîte que pour le cas qui nous intéresse (la salle),

— l'importance de hiérarchiser les pistes d'amélioration du modèle : prendre en compte l'effet de bord vs. choisir une disposition plus compacte.

5 Observations expérimentales

Les expérimentations ont été conduites à différents niveaux de lycée (classes de seconde, première spécialité maths, terminale maths expertes et maths complémentaires) et en propédeutique scientifique (année de remise à niveau après le BAC) sur des durées parfois différentes. La proposition de timing retenue est celle qui nous a paru la plus adaptée pour une majorité d'apprenants.

Les résultats observés peuvent être assez différents selon le niveau de la classe, et selon les groupes dans chaque classe. En seconde avec 4 groupes de 3, en une heure seul un groupe a pu aborder le test avec les boîtes. En terminale maths complémentaires, avec 8 groupes de 3 ou 4, la moitié des groupes sont arrivés au même point. Les résultats sont similaires en première spécialité maths. En terminale maths expertes, presque tous les groupes ont pu aborder le test et certains se lancent dans un calcul pour une configuration plus compacte. En propédeutique, la durée de l'activité a été allongée à 1h30-1h45 pour que tous les groupes puissent arriver au test et que les résultats du test puissent être discutés pendant un temps de mise en commun.

Nous détaillons par la suite quelques stratégies observées chez les élèves :

— Le quotient entre le volume de la salle et le volume d'une balle ou d'un cube est parmi les premiers calculs réalisés.
— Si les boîtes sont données dès le début, certains groupes ont calculé le nombre de balles dans la salle par une méthode de proportionnalité avec la boîte. C'est une bonne opportunité de discuter des effets de bord.
— Des élèves ont aussi proposé des méthodes plus expérimentales comme l'estimation de l'espace libre autour des balles à vue de nez ou l'estimation du gain vertical en mettant une balle sur une couche de 4 balles horizontales (un cas presque compact).
— D'autres apprenants ont essayé de construire un argument de densité en 2D en dessinant des motifs avec des cercles et en calculant le rapport entre la surface occupée par des cercles et la surface totale du motif.
— Le modèle compact est parfois envisagé après les manipulations mais très rarement formalisé en groupe. Néanmoins, le cas compact 2D est bien suivi lors de la correction de la séance d'après.
— Les effets de bord ne sont pas automatiquement pris en compte avant la manipulation des boîtes. Si ce n'est pas le cas, le moment de mise en commun des résultats des tests est une occasion pour faire sentir l'importance de ces effets.
— Après discussion des résultats des tests, certains apprenants remarquent que les nombres de balles rentrées dans les boîtes sont plus proches de la borne inf que de la borne sup. Cela suggère la nécessité d'améliorer la borne sup principalement. Pour des raisons de complexité, cet aspect n'est pas abordé mais la remarque mérite d'être faite.

5.1 Évaluation des comptes rendus

Une manière d'évaluer les compte-rendus consiste à noter plusieurs critères. Par exemple, lors d'une évaluation en année propédeutique à l'UGA, avec 11 groupes de 4 étudiants, les critères suivants ont été utilisés :

— **Intervalles (sur 3 pts) :** est-ce que la contrainte de trouver une borne supérieure b et une borne inférieure a a été respectée ? Est-ce que la raison pour laquelle ce sont des bornes inférieures ou supérieures semble comprise ?
— **Effet de bord (sur 2 pts) :** est-ce que l'effet de bord est pris en compte dans les calculs ?
— **Test (sur 2 pts) :** est-ce que le test avec la boîte est effectué et restitué ? Est-ce qu'une conclusion est tirée ?
— **Rédaction (sur 2 pts) :** est-ce que le raisonnement est détaillé ? Est-ce qu'une conclusion globale est tirée ?

Les résultats sont résumés dans le tableau 1.

Groupe	Intervalles (sur 3)	Effet de bord (sur 2)	Test (sur 2)	Rédaction (sur 2)
1	1	0	0	1
2	1	0	0	0
3	3	0	1	1
4	3	0	0	1
5	3	2	1	1
6	3	0	2	1
7	2	0	0	0
8	1	1	0	1
9	3	0	0	1
10	2	0	0	1
11	1	0	0.5	1
moyenne	70%	14%	20%	41%

TABLE 1 – Évaluation des compte-rendus (expérimentation à l'UGA, année propédeutique)

La notion d'intervalle semble plutôt bien acquise à ce stade. Cela peut s'expliquer par le fait d'avoir travaillé auparavant sur l'encadrement de la surface d'une île et sur des empilements de pavés lors de la situation sur le déménagement. Le petit score sur l'effet de bord peut s'expliquer par le fait que les élèves font d'abord le calcul pour la salle (effet négligeable) et n'ont pas forcément le temps de modifier leur compte rendu après les tests avec la boîte. Il se peut donc que l'effet de bord soit pris en compte sans que cela ne figure dans le rendu.

Certaines difficultés observées et quelques pistes de réponse sont listées dans le tableau 2.

Difficulté	Proposition de remédiation
Calcul de la borne inférieure en utilisant le volume d'un cube circonscris	Encourager à faire un dessin même en 2D.
Associer les calculs par quotient de volume à la borne sup ou à la borne inf	Poser des questions de type : peut-on mettre plus de balles que cela ? peut-on mettre au moins tant de balles ?
Manque de dessins ou dessins trop brouillon	Encourager à utiliser un compas ou faire un dessin approximatif en 3D. / Donner quelques balles sans les boîtes.
Le test n'est pas bien fait (empilement cubique pour vérifier leur calcul à la place d'une optimisation rangée ou en vrac)	Laisser faire la vérification et rebondir éventuellement sur les effets de bord. Ensuite, rappeler la consigne initiale (nombre maximal de balles) et questionner autour de la notion d'intervalle : quel intérêt ? comment tester la validité l'intervalle ?
Pour les apprenants les plus en difficulté, il peut y avoir des confusions entre aire et volume ou des calculs faux à cause des conversions d'unités, surtout si la tâche sur le déménagement n'a pas été faite.	S'assurer que tout le monde connaît les formules des aires (cercle) et des volumes (sphère, pavé droit). En travaillant en groupe, ces erreurs sont corrigées par les élèves mais cela peut prendre du temps.
Manque de calcul littéral	Encourager dès le début à le faire et le rappeler avant le passage au test où les balles et les boîtes ont des dimensions différentes de celles utilisées jusqu'à là.

TABLE 2 – Difficultés observées

6 Prolongements possibles

6.1 Cas compact

Si le temps le permet et si le cas compact n'a pas été traité dans le temps imparti, l'enseignant peut engager la classe dans la recherche du cas compact, en partant du cas à deux dimensions (cf. section 7.1).

Les objectifs principaux de cette prolongation sont de travailler sur la partie mathématique du cas compact et de revenir à la question de la hiérarchisation des hypothèses de modélisation (cf. section 6.3).

L'idée est de traiter mathématiquement le cas compact pour calculer précisément quel facteur volumique on va gagner par rapport au cas cubique : le volume rempli par les balles dans le cas compact est (en négligeant les effets de bord) $\sqrt{2}$ fois le volume rempli dans le cas cubique. Si on manque de temps pour arriver au cas 3D, on peut se contenter du cas "compact 2D translaté" (i.e. en empilant verticalement des couches 2D compactes) qui augmente le volume couvert d'un facteur $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

6.2 Incertitude et arrondis.

L'objectif serait de faire prendre conscience aux élèves d'incertitude dans les mesures, et d'erreurs d'arrondis d'une part, et de leur propagation dans les calculs d'autre part.

Considérons tout d'abord l'effet des incertitudes de mesure. Les formules utilisées pour la borne inf ou la borne sup sont similaires dans le cas du réseau cubique et dans le cas compact : elles sont toutes de la forme $C \times \frac{l \times L \times h}{d^3}$, où C est une constante (pour l'analyse qui suit on néglige les effets de bord). Supposons que ε_a décrive l'incertitude relative pour la grandeur a, au sens où une mesure a signifie que la "vraie grandeur" est comprise entre $a(1-\varepsilon_a)$ et $a(1+\varepsilon_a)$. On obtient alors que :

$$\frac{l \times L \times h}{d^3} \frac{(1-\varepsilon_l)(1-\varepsilon_L)(1-\varepsilon_h)}{(1+\varepsilon_d)^3} \leq \frac{l \times L \times h}{d^3} \leq \frac{l \times L \times h}{d^3} \frac{(1+\varepsilon_l)(1+\varepsilon_L)(1+\varepsilon_h)}{(1-\varepsilon_d)^3}$$

Lorsque les élèves on vu la dérivée (à partir de spé mathématiques de première), on peut leur parler d'approximation en premier ordre : lorsque les incertitudes relatives sont petites devant 1, en faisant une approximation au premier ordre on obtient :

$$\frac{(1+\varepsilon_l)(1+\varepsilon_L)(1+\varepsilon_h)}{(1-\varepsilon_d)^3} \simeq 1+\varepsilon_l+\varepsilon_L+\varepsilon_h+3\varepsilon_d \text{ et } \frac{(1-\varepsilon_l)(1-\varepsilon_L)(1-\varepsilon_h)}{(1+\varepsilon_d)^3} \simeq 1-\varepsilon_l-\varepsilon_L-\varepsilon_h-3\varepsilon_d\,.$$

et on a donc une incertitude relative d'environ $\varepsilon_l+\varepsilon_L+\varepsilon_h+3\varepsilon_d$. La tolérance ε_d est de l'ordre de $7,5\%$ [1]. Pour les mesures de la salle, cela dépend bien sûr du soin et du protocole apporté lors de la mesure. On peut imaginer avoir une erreur relative de mesure de l'ordre de 2% pour chaque dimension de la salle, ce qui donnerait après propagation une erreur relative de $28,5\%$, ce qui devient

1. Selon ce document de l'ITTF datant de 2017 https://www.ittf.com/2017/03/17/ittf-president-thomas-weikert-ensures-work-improve-quality-balls/. En fait, les nouvelles balles plastique devaient alors avoir un diamètre compris entre 40 mm et 40,6 mm, ce qui donne un diamètre moyen plus grand que celui indiqué dans l'énoncé.

très important, comparable à l'écart entre borne sup et borne inf dans le cas compact. Il devient donc aussi important de réduire l'écart entre a et b que de réduire les erreurs de mesure. La majeure partie de cette erreur de mesure, dans les hypothèses ci-dessus, provient de l'erreur sur le diamètre de la balle.

Concernant les arrondis, on peut faire prendre conscience aux élèves que les calculatrices et ordinateurs, lorsqu'ils travaillent en calcul approché avec des flottants, effectuent des arrondis à chaque opération. L'ordre de grandeur de cette erreur d'arrondi est dicté par le nombre bits utilisés pour coder les flottants, et ces erreurs, comme les erreurs de mesure ci-dessus, se propagent lorsqu'on effectue des calculs successifs. Les précisions des machines utilisées par les élèves et les formules très simples manipulées font que les erreurs d'arrondis et leurs propagations sont dans le cadre de cette activité complètement négligeables par rapport aux erreurs de mesure. En effet, l'erreur relative d'arrondi est typiquement de l'ordre de 10^{-16} [2] et les opérations effectuées multiplieront cette erreur par 6 au plus, comme le montre l'analyse ci-dessus.

6.3 Hiérarchisation des hypothèses.

L'objectif serait de faire prendre conscience aux élèves de la possibilité de faire des calculs grossiers permettant de hiérarchiser l'influence des hypothèses sur le résultat. Par exemple, prendre conscience :

1. de l'ordre de grandeur de l'effet des incertitudes de mesure, cf. section 6.2,
2. de l'ordre de grandeur de l'effet des erreurs d'arrondi, cf. section 6.2,
3. de l'ordre de grandeur de l'effet de l'hypothèse de rectitude des angles de la salle : si le parallélépipède n'est pas tout à fait "droit", comment cela impact-t-il le volume ?
4. de l'ordre de grandeur des effets de bord,
5. de l'ordre de grandeur de l'effet de la prise en compte ou non d'un poteau de diamètre D dans la salle, ou d'un bureau etc. Pour chaque élément, on pourra commencer par estimer son volume et le diviser par le volume de la salle,
6. du gain procuré par le cas compact par rapport au cas cubique.

A l'aide de ces calculs, on pourra hiérarchiser les hypothèses, et une fois le cycle accompli une première fois, préciser quelles seraient les hypothèses à affiner en premier. On pourra également se poser la question : aurait-on pu prévoir que telle voie serait meilleure avant de s'y engager ? On pourra souligner que ce genre de question se pose dans toute modélisation.

6.4 Autres idées de prolongations

— La démonstration rigoureuse de l'optimalité de l'empilement "compact" (appelée "conjecture de Kepler") dans le cas non borné a été un problème ouvert pendant très longtemps (Thomas Hales en 1998), et la preuve actuelle utilise une assistance par ordinateur. Le cas compact 2D (toujours dans le cas non borné) est beaucoup plus accessible [3]. Cela peut être l'occasion de montrer que des problèmes assez simples à "toucher" peuvent être difficiles à résoudre rigoureusement. Il est intéressant de constater, et c'est assez facile avec des boîtes et des balles sous la main, que lorsqu'il y a un bord, et notamment lorsque la boîte est assez petite

2. Cf. https://fr.wikipedia.org/wiki/Epsilon_d%27une_machine
3. Cf. https://arxiv.org/abs/1009.4322

par rapport aux balles, le "cas compact" peut être non optimal (penser par exemple au cas où la boîte serait un cube de côté $2d$, la configuration optimale étant la configuration cubique, avec 8 balles).

— Si certains ont utilisé une méthode proportionnelle à partir d'un empilement compact dans une des boîtes, on pourra comparer le résultat obtenu à celui du cas compact, et comprendre d'où vient l'écart. Deux effets de bords sont alors en jeu : un effet de bord correspondant au pavage de la salle par des boîtes, et un effet de bord à l'intérieur de chaque boîte. L'effet de bord à l'intérieur de chaque boîte va être multiplié par le nombre de boîtes, qui est de l'ordre du quotient entre le volume de la salle et le volume de la boîte, et sera en général plutôt grand, quasiment volumique si la boîte est petite. L'effet de bord correspondant au pavage de la salle par des boîtes serait lui, plutôt surfacique si la boîte est assez petite.

7 Annexes

7.1 Solutions envisageables

7.1.1 Empilement cubique avec effets de bord sur la salle

Phase 1 : : on imagine les balles empilées selon un réseau cubique. On estime combien de balles peuvent être empilées "en hauteur" (n_h), "en largeur" (n_l) et "en longueur" (n_L). On en déduit qu'on peut mettre environ $n_h \times n_l \times n_L$ balles dans la salle.

Phase 2 : On note h la hauteur de la salle, l sa largeur, L sa longueur et r le rayon de la balle de ping-pong ($2\,cm$ ou $0,02\,m$).

— **Calcul d'une borne supérieure b sur le nombre de balles :** Si n est un nombre de balles que l'on met dans la salle de classe, le volume occupé par les balles est inférieur au volume total de la salle, V_S. En notant V_B le volume d'une balle, $nV_B \leq V_S$, d'où $n \leq \frac{V_S}{V_B}$. On obtient ainsi une borne supérieure pour notre "intervalle de sûreté" : $b := \dfrac{V_S}{V_B} = \dfrac{3h \times l \times L}{4\pi r^3}$ où r est le rayon de la balle.

  Application numérique avec $h = 2,5m$, $l = 6m$ et $L = 9m$: $b \approx 4\,028\,609$.

  Application numérique pour une boîte à chaussures avec $h = 0,15m$, $l = 0,25m$ et $L = 0,35m$: $b \approx 391$.

— **Calcul d'une borne inférieure a du nombre de balles sans tenir compte des effets de bord :** on peut empiler les balles les unes sur les autres en les disposant régulièrement selon un réseau cubique. En négligeant les effets de bord, on obtient $a = \dfrac{V_S}{V_C} = \dfrac{h \times l \times L}{(2r)^3}$.

  Application numérique avec $h = 2,5m$, $l = 6m$ et $L = 9m$: $a \approx 2\,109\,375$.

  Application numérique pour une boîte à chaussures avec $h = 0,15m$, $l = 0,25m$ et $L = 0,35m$: $a \approx 205$.

— **Calcul d'une borne inférieure a_{bord} du nombre de balles en tenant compte des effets de bord :** $a_{bord} = \left\lfloor \dfrac{h}{2r} \right\rfloor \times \left\lfloor \dfrac{l}{2r} \right\rfloor \times \left\lfloor \dfrac{L}{2r} \right\rfloor$.

  Application numérique avec $h = 2,5m$, $l = 6m$ et $L = 9m$: $a_{bord} = 62 \times 150 \times 225 = 2\,092\,500$.

  Application numérique pour une boite à chaussures avec $h = 0,15m$, $l = 0,25m$ et $L = 0,35m$: $a_{bord} = 3 \times 6 \times 8 = 144$.

7.1.2 Empilement hexagonal pour les couches horizontales

On peut disposer chaque couche horizontale de manière plus compacte, de sorte qu'une balle touche six autres balles horizontalement. Les centres des balles forment un réseau hexagonal dans un plan horizontal (cf. Figure 2). Le triangle ABC est équilatéral. Par conséquent,

$$\frac{BD}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

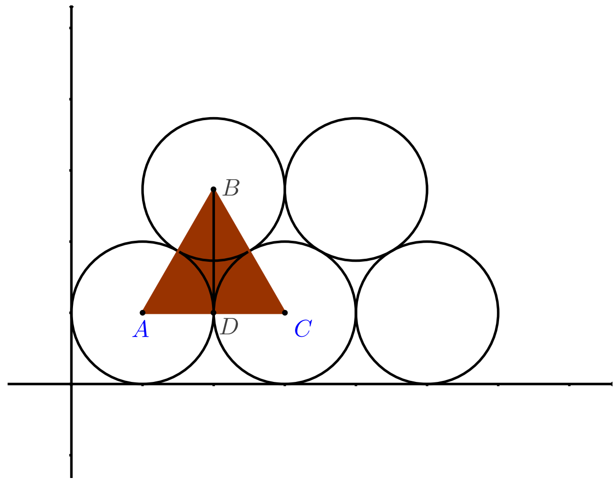

FIGURE 2 – Empilement selon un réseau hexagonal en deux dimensions.

donc

$$BD = 2r\frac{\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3}$$

BD représente la distance entre deux lignes de balles dans le plan (cf. Figure 2). Supposons pour l'instant qu'on empile des lignes de balles "horizontales" et qu'il y ait une limite en ordonnée, mais pas en abscisse. Notons L l'ordonnée à ne pas dépasser sur la Figure 2, et appelons-la la "longueur" de la boîte. La première ligne de balle va déjà occuper une longueur $2r$. Lorsqu'on ajoute une ligne de balles, ces deux lignes occupent alors une longueur $2r + BD$. Si on empile i lignes de balles, celles-ci occupent donc une longueur $2r + (i-1)BD$: $2r$ pour le première ligne, puis BD pour chacune des lignes suivantes. Ainsi, sur une longueur L, on peut faire rentrer i lignes de balles tant que

$$2r + (i-1)BD \leq L,$$

ce qui équivaut à

$$i \leq \frac{L-2r}{BD} + 1$$

Donc on pourra faire rentrer $\left\lfloor \frac{L-2r}{BD} \right\rfloor + 1$ lignes. Notons I ce nombre :

$$I = \left\lfloor \frac{L-2r}{r\sqrt{3}} \right\rfloor + 1$$

Remarquons que

$$\frac{L}{r\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} \leq I \leq \frac{L}{r\sqrt{3}} .$$

Lorsque L est grand devant r, on voit que I est de l'ordre de $\frac{L}{r\sqrt{3}}$ et on arrivera à faire rentrer dans une couche horizontale environ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ fois plus de balles que lorsque les centres des balles sont disposés selon un réseau carré. Si on veut avoir une borne exacte, remarquons qu'en largeur, on ne peut pas toujours mettre autant de balles sur chaque ligne. En effet, sur la première ligne, on pourra mettre j balles tant que

$$2rj \leq l$$

et sur la deuxième ligne, on pourra mettre k balles tant que

$$r + 2rk \leq l,$$

car la deuxième ligne est décalée de r "vers la droite" (cf. Figure 2). En notant J le plus grand j tel que $2rj \leq l$, et K le plus grand k tel que $r + 2rk \leq l$, on obtient

$$J = \left\lfloor \frac{l}{2r} \right\rfloor \quad \text{et } K = \left\lfloor \frac{l-r}{2r} \right\rfloor .$$

Ces deux nombres sont égaux si et seulement si $\left\lfloor \frac{l}{r} \right\rfloor$ est paire.

Finalement, le nombre de balles sur une couche horizontale dépendra de la parité de I :

— si I est pair, ce sera :

$$n_H := \frac{I}{2}(K + J)$$

— si I est impair, ce sera :

$$n_H := \frac{I-1}{2}K + \frac{I+1}{2}J$$

Et le nombre total de balles en empilant des couches horizontales identiques sera

$$n_H \left\lfloor \frac{h}{2r} \right\rfloor .$$

Lorsque L est grand devant r, on gagne un facteur $\frac{2}{\sqrt{3}}$ par rapport au réseau carré. Remarquons enfin qu'on aurait pu aussi intervertir le rôle des coordonnées x et y, et faire plutôt des "colonnes" de balles, cela échangerait le rôle de I et J ci-dessus, et – selon les dimensions exactes de la boîte – peut faire varier l'effet de bord.

Examinons maintenant comment améliorer la borne inférieure.

7.1.3 Empilement compact en trois dimensions

L'empilement précédent en hauteur n'est pas très naturel : on a envie de mettre les balles de la deuxième couche horizontale dans les "creux" de la première couche (et la gravité a tendance à forcer les balles à le faire).

Si on regarde les deux couches d'au-dessus, on obtient quelque chose comme sur la figure 3.

Le polyèdre $BFCH$ est alors un tétraèdre régulier (cf. Figure 4 pour une vue en 3D).

Sur la Figure 5 la distance entre deux couches horizontales est alors HG. G est le centre de gravité du triangle équilatéral BCF, donc $IG = IF/3$. De plus le triangle HGI est rectangle en G et les triangles FBC et HBC sont équilatéraux. Donc :

$$\frac{HI}{HB} = \frac{HI}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

D'où

$$HI = FI = r\sqrt{3} .$$

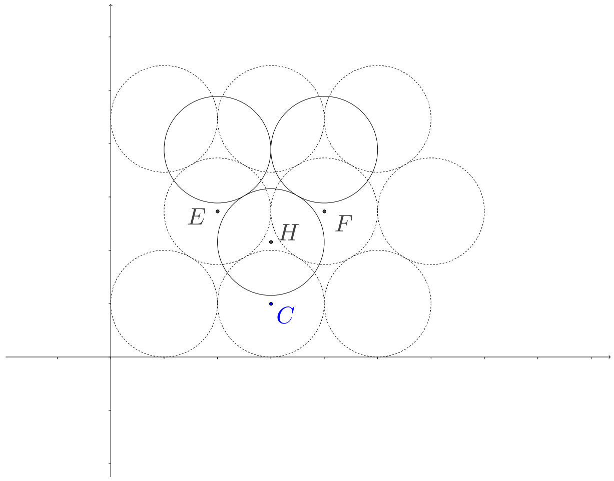

FIGURE 3 – Empilement compact en trois dimensions : la couche basse est en pointillés.

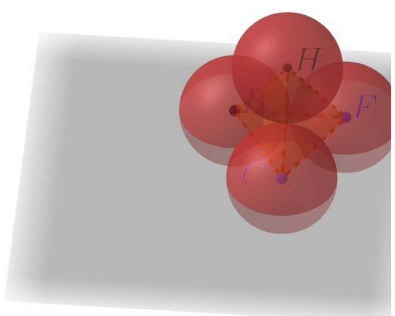

FIGURE 4 – Empilement compact en trois dimensions : les centres de quatre balles adjacentes forment un tétraèdre régulier.

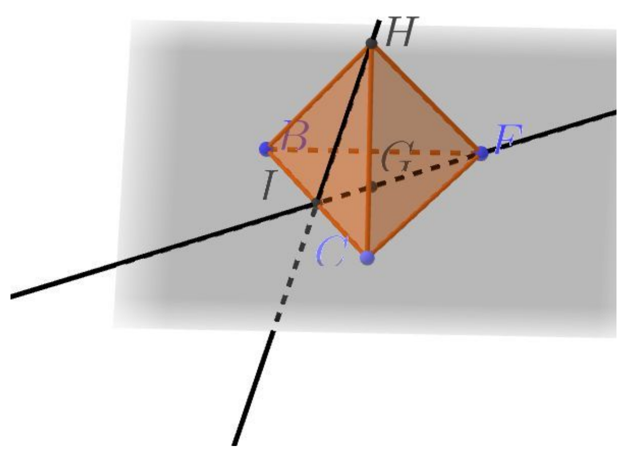

FIGURE 5 – Hauteur d'un tétraèdre et distance entre deux couches d'un empilement compact.

D'autre part,
$$HG^2 + IG^2 = HI^2 \ .$$

Donc :
$$HG = \sqrt{HI^2 - \frac{FI^2}{9}} = FI\sqrt{\frac{8}{9}} = 2r\frac{\sqrt{6}}{3} \ .$$

Par rapport à un empilement des couches "balle sur balle, en colonne", il y a donc un gain de $\frac{\sqrt{6}}{3}$, soit une hauteur environ 18% plus petite. En cumulant les deux facteurs de gain, et lorsque les dimensions de la boîte sont assez grandes par rapport au rayon des balles pour pouvoir négliger les effets de bord, on pourra mettre $\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{3}{\sqrt{6}} = \sqrt{2}$ fois plus de balles.

Prise en compte des effets de bord. Pour prendre en compte les effets de bord, numérotons les couches horizontales selon leur hauteur en partant du bas, la plus basse étant la couche 1. On voit sur la figure 3 que la deuxième couche va être décalée dans la direction y sur une longueur GC. Or G est le barycentre de BFC, donc GC est égal aux deux tiers de la hauteur de ce triangle équilatéral, d'où :
$$GC = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}2r = r\frac{2\sqrt{3}}{3} \ .$$
Ainsi le nombre de balles que l'on pourra mettre sur une couche "paire" sera obtenu comme précédemment, mais en remplaçant L par $L - GC$. Notons n'_H ce nombre. Enfin, on va pouvoir faire entrer $M := \lfloor (h-2r)/HG \rfloor + 1$ couches horizontales dans la boîte. Ensuite,

— si M est pair, le nombre total de boules dans la boîte sera :
$$n := \frac{M}{2}(n_H + n'_H) \ ,$$

— si M est impair, ce sera :
$$n := \frac{M+1}{2}n_H + \frac{M-1}{2}n'_H \ .$$

Encore une fois, il est possible de permuter les rôles des largeurs, longueurs et hauteurs.

Un code est donné en section 7.2.

7.1.4 Méthode proportionnelle.

Lorsqu'on a un "modèle réduit" à disposition (ex : une boîte à chaussures), de dimensions $L_r \times l_r \times h_r$, on peut procéder différemment pour obtenir une borne inférieure.

— Première idée : on essaie de remplir au maximum le modèle réduit. On note n_r le nombre total de balles dans le modèle réduit, puis on estime le nombre total de boules dans la salle en postulant que le nombre de boules est proportionnel au volume de la boîte (ce qui implique de négliger les effets de bord). On obtient comme nouvelle proposition
$$n_r\frac{Llh}{L_r l_r h_r} \ .$$
Il y a un inconvénient : il est difficile de contrôler l'erreur commise.

— Deuxième idée : on prend en compte les effets de bord lorsqu'on remplit le grand volume avec des copies du modèle réduit. On obtient ainsi une borne inférieure :

$$n_r \left\lfloor \frac{L}{L_r} \right\rfloor \left\lfloor \frac{l}{l_r} \right\rfloor \left\lfloor \frac{h}{h_r} \right\rfloor .$$

Dans les deux cas, les effets de bord du modèle réduit vont être multipliés par un facteur de l'ordre de $\frac{Llh}{L_r l_r h_r}$, c'est à dire du quotient du volume de la salle sur celui du modèle réduit.

7.2 Codes pour calculer les différentes bornes

7.2.1 En python

```
import math
from itertools import permutations

def bornea0(L, l, h, d):
    """
    Donne la borne inférieure obtenue en effectuant les calculs de l'empilement compact.
    Un ordre est imposé : L > l > h.
    """
    HG = d * math.sqrt(6) / 3
    GC = d * math.sqrt(3) / 3
    BD = d / 2 * math.sqrt(3)

    I = math.floor((L - d) / BD) + 1
    J = math.floor(l / d)
    K = math.floor((l - d / 2) / d)

    if I % 2 == 0:
        nH = (I // 2) * (K + J)
    else:
        nH = ((I - 1) // 2) * K + ((I + 1) // 2) * J

    Ip = math.floor((L - GC - d) / BD) + 1
    if Ip % 2 == 0:
        nHp = (Ip // 2) * (K + J)
    else:
        nHp = ((Ip - 1) // 2) * K + ((Ip + 1) // 2) * J

    M = math.floor((h - d) / HG) + 1
    if M % 2 == 0:
        n = (M // 2) * (nH + nHp)
    else:
        n = ((M + 1) // 2) * nH + ((M - 1) // 2) * nHp

    return n
```

```python
def bornea(L, l, h, d):
    """
    Donne la borne inférieure obtenue par empilement compact,
    en testant toutes les permutations possibles des dimensions.
    """
    return max(bornea0(*perm, d) for perm in permutations([L, l, h]))

def borneacubssbord(L, l, h, d):
    """
    Borne inférieure par un raisonnement volumique global (cube exinscrit).
    Sans prendre en compte les effets de bord.
    """
    return math.floor(L * l * h / d**3)

def borneacub(L, l, h, d):
    """
    Borne inférieure par empilement cubique en tenant compte des effets de bord.
    """
    return math.floor(L / d) * math.floor(l / d) * math.floor(h / d)

def borneb(L, l, h, d):
    """
    Borne supérieure par volume : le volume total divisé par le volume d'une sphère.
    """
    volume_sphere = (4 / 3) * math.pi * (d / 2) ** 3
    return math.floor(L * l * h / volume_sphere)

##
```

7.2.2 En R

```r
bornea0 <- function(L,l,h,d){
    ## Donne la borne inférieure obtenue en effectuant les calculs de
    ## l'empilement compact expliqué dans l'annexe.
    ## Un ordre est imposé, cf. annexe.
    HG=d*sqrt(6)/3
    GC=d*sqrt(3)/3
    BD=d/2*sqrt(3)
    I=floor((L-d)/BD)+1
    J=floor(l/d)
    K=floor((l-d/2)/(d))
    if(I %% 2==0){nH=I/2*(K+J)} else {nH=(I-1)/2*K+(I+1)/2*J}
    Ip=floor((L-GC-d)/BD)+1
    if(Ip %% 2==0){nHp=Ip/2*(K+J)} else {nHp=(Ip-1)/2*K+(Ip+1)/2*J}
    M=floor((h-d)/HG)+1
```

```
    if(M %% 2==0) {n=M/2*(nH+nHp)} else {n=(M+1)/2*nH+(M-1)/2*nHp}
    return(n)
}
library(combinat)
bornea<- function(L,l,h,d){
    ## Donne la borne inférieure obtenue par empilement compact, en cherchant le
    ## meilleur ordre possible pour les dimensions.
    a=0
    for(i in permn(c(L,l,h))){a=max(a,bornea0(i[1],i[2],i[3],d))}
    return(a)
}
borneacubssbord<- function(L,l,h,d){
    ## Donne la borne inférieure obtenue en effectuant un raisonnement volumique
    ## global, sans prendre en compte les effets de bord, et en supposant qu'une
    ## balle occupe un cube exinscrit.
    floor(L*l*h/d^3)}


borneacub<- function(L,l,h,d){
    ## Donne la borne inférieure obtenue en considérant un empilement cubique,
    ## en tenant compte des effets de bord.
    return(floor(L/d)*floor(l/d)*floor(h/d))
}
borneb <- function(L,l,h,d){
    ## Donne la borne supérieure obtenue par un simple argument de volume:
    ## le volume de la salle est inférieure au volume occupé par les balles
    ## qu'elle contient.
    floor(L*l*h/(4/3*pi*(d/2)^3))}
```