Le facteur (Circuit Eulérien)

Objectifs :

- Découverte de la notion de graphe, son vocabulaire, ses propriétés, notions de circuits et de chemins
- Résolution de problème concret
- Questionnement autour des solutions : existence, unicité, construction, complexité
- Raisonnements algorithmiques et logiques

Modalités : Travail en groupe de 4/5 élèves par essais successifs.

Matériel :

- planche à clous (voir le fichier « Matériel » pour la construction de la planche à clous)
- ficelle
- imprimer pour chaque groupe le fichier « Planches-Euler»

Niveaux : Cycle 3 et Cycle 4.
On adaptera le vocabulaire et le questionnement proposé au niveau des élèves.

Pré-requis : pair et impair

Durée : 1h30. Cette activité peut être traitée en plusieurs fois.

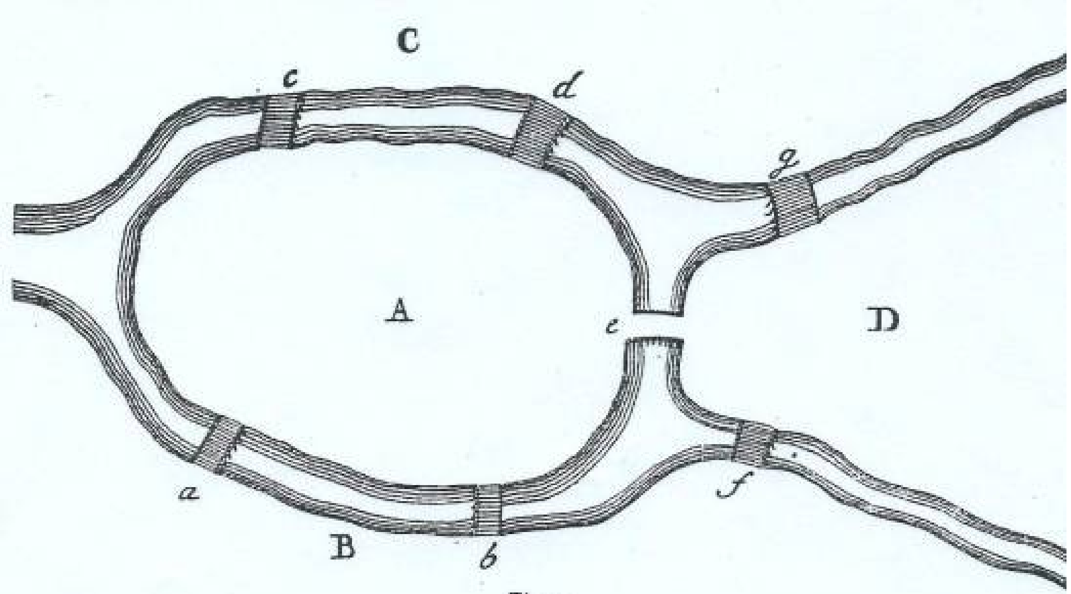
Indica-tion de durée	**Phase**	Activités et consignes	Matériel
5 min	**Introduction de la séance**	Nous allons travailler aujourd'hui sur des problèmes mathématiques qui s'appliquent à la vie courante : Quelles sont les contraintes du facteur lors de sa tournée ? Faire émerger les réponses des élèves... (réponses attendues: passer par toutes les rues ; partir de la poste ; passer une seule fois par chaque rue ; revenir à la poste ou pas . Si cette dernière question n'est pas posée par les élèves, elle sera soulevée plus tard...) Nous allons modéliser la tournée du facteur. (explication autour de la modélisation …)	
3 min	**Présentation de l'activité et appropriation de la problématique**	Voici le tracé des rues d'une ville (représentées par des segments). Les carrefours sont représentés par les points. Le facteur doit partir de la poste, passer une et une seule fois dans chaque rue pour distribuer son courrier et finalement revenir à la poste. (ou pas ?) Sa tournée est modélisée par une ficelle. Au tableau on montre le matériel et on manipule une ou plusieurs fois la ficelle et la planche à clous.	Planche à clous et ficelle
2 min	**Distribution du matériel et constitution des groupes**	Nous distribuons à chaque groupe une planche à clous et un jeu de photocopies de planches et expliquons la manipulation pour placer les planches. Nous constituons des groupes d'élèves homogènes en niveau.	

5 min + 5 min	**Exploration classique :** **La maison**	***On part tous du point en bas à droite de la maison.*** **Questionnement proposé aux élèves :** Est-il possible de trouver un chemin pour le facteur ? La question du retour à la poste devrait se poser à ce moment-là. On repose alors les questions avec cette formulation : Est-il possible de trouver un chemin pour le facteur, sans revenir à la poste ? Et un chemin qui part de la poste et revient à la poste ? Y en a-t-il plusieurs ? Est-ce que c'est facile ? A la fin des 5 min, on organise un temps commun de restitution des réponses aux questions. On note les réponses au tableau sans hiérarchiser et sans donner son avis...	Fiche n°1 : La maison
5 min+ 5 min	**Exploration différenciée:** **La maison**	***On propose comme point de départ le point en haut à droite aux élèves des groupes les plus forts, et en bas à droite aux élèves des groupes dont le niveau est moins fort.*** **Questionnement proposé aux élèves : on rajoute la question suivante :** Est-ce que cela dépend du point de départ ? A la fin des 5 min, on organise un temps commun de restitution des réponses : les élèves ayant commencé par le coin bas ont trouvé une solution, les autres non… conclusion : cela dépend du point de départ… pourquoi ? Faire émerger les propositions des élèves.	Fiche n°1 : La maison

5 min+ 5 min	**Exploration classique : la maison avec cave**	***On leur propose de choisir leur point de départ.*** **Questionnement proposé aux élèves :** Est-il possible de trouver un chemin pour le facteur ? Et un chemin qui part de la poste et revient à la poste ? Y en a-t-il plusieurs ? Est-ce que c'est facile ? Est-ce que cela dépend du point de départ ? Lors de la mise en commun, tester les propositions précédentes des élèves et en faire émerger de nouvelles pour répondre aux différentes questions posées.	Fiche n° 2 : la maison avec cave
5 min+ 5 min	**Existence d'au moins une solution :** **la maison à balcon,** **la maison à sablier ,** **la grille**	**Questionnement supplémentaire proposé aux élèves :** A quelles conditions n'y aura-t-il pas de solutions ? ***On laisse les élèves chercher des solutions à ces trois fiches pour essayer de faire émerger les notions suivantes :*** • On introduit la notion de degré d'un nœud d'un graphe • Si tous les sommets sont de degré pair, alors le chemin est possible et le départ et l'arrivée se font au même point. • Si il existe seulement deux sommets impairs, alors le chemin est possible, mais le départ se situe sur l'un des sommets de degré impair et l'arrivée sur l'autre sommet de degré impair. • Sinon, le chemin est impossible. • On peut introduire à ce moment la notion de chemin et de cycle dans un graphe non orienté et étudier la différence de problématique.	Fiche n°3 : la maison à balcon Fiche n°4 : la maison à sablier et Fiche n°5 : la grille

		Définitions Soit G un graphe. • Un chemin **eulérien** de G est une chaîne de G qui contient une fois et une seule chaque arête de G. • Un **cycle eulérien** de G est un chemin eulérien de G qui est un cycle, c'est-à-dire une chaîne eulérienne dont les extrémités sont confondues. • Le graphe G est un **graphe eulérien** si et seulement si il admet un cycle eulérien. • Le graphe G est dit **connexe** lorsqu'il existe une chaîne entre deux sommets quelconques de G. **Théorème 1** Un graphe connexe G admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair. **Théorème 2** Un graphe connexe G admet un chemin eulérien si et seulement si le nombre de sommets de G de degré impair est égal à 2. Dans ce cas, si A et B sont les deux sommets de G de degré impair, alors le graphe G admet un chemin eulérien d'extrémités A et B. Remarque : s'il existe un cycle eulérien, il peut « démarrer » de n'importe quel sommet.	
5 min+ 5 min	**Construction de la solution :la maison avec cave, la ville folle, entrelacés**	**Questionnement proposé aux élèves :** Avez-vous mis en place des stratégies pour réussir votre parcours ? Lesquelles ? La parité des sommets garantit que si la ficelle arrive sur un sommet elle peut repartir (sauf si c'est le début du chemin eulérien). Un premier algorithme consiste à avancer avec la ficelle jusqu'à retomber sur ses pieds. Est-ce que cela marche ?	Fiche n°2 : la maison avec cave Fiche n°7 : la ville folle

		Non pas forcément, on se rend compte qu'on a pu laisser une partie du graphe sans l'avoir parcouru. Dans ce cas, on essaie de parcourir ce sous-graphe. Si cela ne marche pas, que faut-il faire ? L'écriture de l'algorithme final est difficile à écrire avec les élèves, mais il reste simple à illustrer sur la planche à clous, notamment sur la fiche « entrelacés ». Un algorithme final pour un circuit eulérien serait du style : 1) on parcourt un cycle itérativement : tant qu'il existe un nœud voisin accessible par une arête non traversée , alors on va sur un voisin avec la ficelle, on finira obligatoirement au point de départ *(preuve : la parité des sommets garantit le cycle eulérien, donc on revient obligatoirement au point de départ)* 2) le graphe privé de ce cycle (graphe partiel ou sous-graphe) est un graphe dont tous les nœuds sont de degré pair (*preuve : sur les sommets que l'on a parcouru, on a enlevé une arête qui part et une arête qui arrive , donc 2 arêtes, donc ces sommets là sont de nouveau de degré pair, et les sommets de degré pair non parcourus le sont encore.*), mais il n'est peut-être pas connexe 3) appliquons récursivement notre algorithme à chacun des sous-graphes restants, on obtient des petits cycles qui sont tous connectés au cycle initial. 4) il ne reste plus qu'à reprendre notre cycle initial et, à chaque nœud par lequel passe un cycle non encore traversé, parcourir ce cycle puis continuer sur le cycle initial Conclusion : soit un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair. L'exécution de cet algorithme (à partir de n'importe quel sommet) construit un circuit eulérien.	et Fiche n°9 : entrelacés

10 min	**Un peu d'histoire ...plus ou moins rapide suivant les niveaux**	**EULER ET LES PONTS DE KÖNIGSBERG**  Fig. 1. Comment aller d'un bord à l'autre en passant une seule fois sur chaque pont ? Euler, qui vivait dans cette ville, a montré que c'est impossible. (1736).	Fiche scientifique Fiche n°6 : les ponts de Königsberg
5 min	**Bilan**	• La démarche de recherche: on se pose des questions (existence d'une solution, unicité, construction, complexité) et on essaie d'y répondre. • Au mieux, on essaie de faire une démonstration : Si c'est vrai, il faut une démonstration (Nous faisons confiance à Euler), si c'est faux, un contre-exemple suffit. • En partant d'un problème mathématique, on arrive à la construction d'un algorithme (ce qui est traité par l'informatique). • On peut proposer aux élèves de faire seuls chez eux cette activité en faisant un dessin sans lever le crayon, sans repasser sur un tracé.	