Activité d’introduction de la fonction exponentielle

FICHE PROFESSEUR

NB: cette activité a été conçue à partir de réflexions du groupe qui sont expliquées dans un document annexe.

Cette activité a été proposée en classe de première spécialité maths au mois de juin 2021/juin 2022, sur une séance d’une heure dans deux lycées de Haute Savoie.

I. Déroulement de la séance :

Phase 1 : 5 min en collectif. Présentation des modalités de travail et découverte du questionnement :

On se pose la question, à quoi « ressemblerait » une fonction f qui vérifie l’égalité : $f' = f$? Autrement dit, une fonction qui a pour dérivée elle-même.

On demande aux élèves de traduire la question pour s’assurer d’une compréhension suffisante pour aborder cette activité.

Phase 2 : 10 min en groupes de 3 ou 4. Les élèves cherchent des réponses aux questions 1 et 2 de l’activité :

1. *Parmi les fonctions que vous connaissez, y aurait-il des fonctions qui répondent à la question ?*
2. *On ajoute une condition, $f(0) \neq 0$. Celle que vous proposiez sont-elles encore valables ?*

Une trace écrite par groupe est attendue.

Le professeur passe dans les groupes afin de repérer les différentes stratégies. Il est important de ne pas donner d’indices, de décomposer la question à ce stade. Nous verrons que dans nos expérimentations aucun groupe n’est resté sans proposition. Ce premier travail a un intérêt pour nous professeurs, on peut relever quelques conceptions erronées des élèves. (Exemple : la fonction constante est valable, la fonction inverse (des groupes ont pensé que la dérivée est égale à elle-même, la fonction f(x)=x-x n’est pas le fonction identiquement nulle et répond à la question 1.)

Phase 3 : 5 min en collectif. Mise en commun des réponses des différents groupes et discussion.

A partir de là, on peut conclure cette première partie :

Parmi notre répertoire de fonctions, il n’existe aucune fonction qui réponde à ces deux critères :

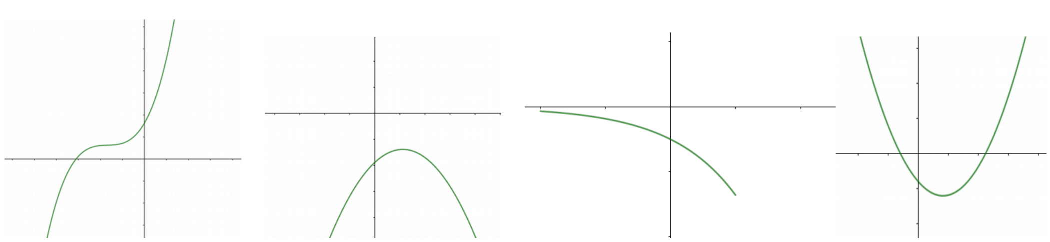
$f' = f$ et $f(0) \neq 0$

Phase 4 : 20 min. Reprise du travail de groupe sous la même forme que la phase 2 pour les questions suivantes :

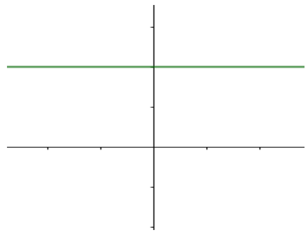
3. *Parmi les courbes représentatives d'une fonction f, suivantes, lesquelles vérifient l’égalité $f' = f$?*

Justifier la réponse.

a) *b)* *c)* *d)*



e)

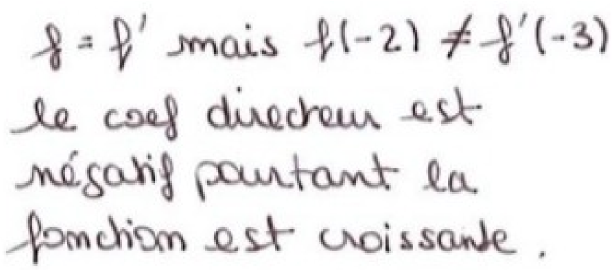


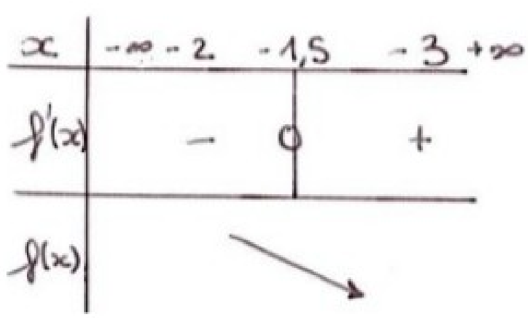
Remarque : il est nécessaire de dire aux élèves que l'on regarde ces courbes uniquement sur la partie visible (pas d'extrapolation de ce qui se passe en dehors).

Dans cette question, il est attendu des élèves d'utiliser le théorème fondamental vu dans les chapitres sur la dérivation : Si f'>0 sur un intervalle ouvert, alors f est croissante (ou sa réciproque !) **et** utiliser f'=f qui donne comme information que la courbe de f est celle de f'. Cette double information n'est pas sans difficulté.

Pour les élèves qui restent bloqués, le professeur peut proposer l'aide d'un tableau de signes/variations afin de montrer la contradiction. Le tableau étant un intermédiaire. Ou d'essayer de mettre des valeurs numériques.

Par exemple, des élèves ont proposé :





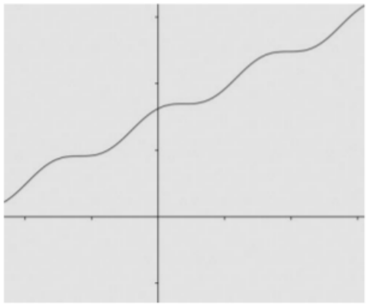
On pourra détailler sur un exemple le raisonnement. Ce qui constituera notre trace écrite.

a) La fonction représentée est croissante. Donc f'>0. Mais comme f'=f, on a que f'<0 sur un intervalle. Ce qui est une contradiction.

On peut l'écrire dans l'autre « sens ». Comme f'=f, on a que f'<0 sur un intervalle. Or, la courbe de f est croissante partout. Ce qui est une contradiction.

La courbe f) a été ajoutée en 2022. En effet, nous avons besoin d'une propriété supplémentaire avec f'=0.

f)



Il peut être judicieux de dessiner une courbe nouvelle (plus de variations en restant positive) pour éviter le registre algébrique souvent utilisé par les élèves. (La courbe ressemble à celle de la fonction cube donc la dérivée aurait pour courbe une parabole, …)

4. *a) Est-il possible que la courbe d'une fonction f telle que f ' = f touche l'axe des abscisses ?*

Dans cette question, la mise en commun est de proposer une preuve. Supposons qu'il existe c tel que la courbe coupe l'axe des abscisses en c, prenons c la plus petite des abscisses. Si la courbe n'est pas une droite horizontale, On peut supposer sans perte de généralité que la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x<c$. Par continuité, elle doit sur une intervalle « descendre » c'est à dire f'<0.

Ce qui contredit f'=f où f > 0.

b) Chercher d'autres courbes qui conviendraient.

Phase 5 : 10 min en collectif. Mise en commun des courbes imaginées pour la dernière question.

A ce stade, nous avons **des courbes** (et uniquement des courbes) qui ne contredisent pas $f' = f$ avec $f(0) \neq 0$. Elle sont assez « semblables ». Autrement dit, nous avons créé des fonctions candidates à partir de leur courbe sur un intervalle « borné ». Il peut être pertinent de montrer aux élèves que « dès que la courbe « monte », les nombres dérivés sont par conséquent de plus en plus grands et la courbe « monte » encore plus fortement ! »

II. Analyse de la séance :

Remarques préalables :

Un biais pour la phase de recherche : les élèves savaient que nous allions travailler le chapitre sur la fonction exponentielle.

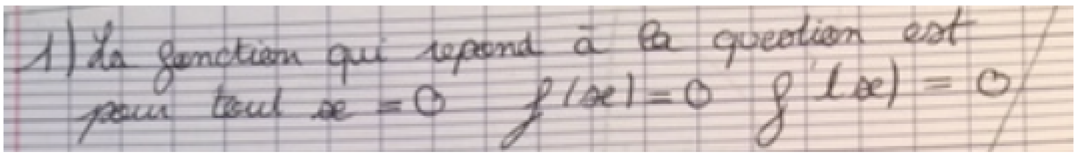
Traces écrites recueillies : Les recherches se sont faites à l'oral et au brouillon dans les groupes, pas de traces relevées de ce moment. La consigne état de rédiger les réponses aux questions posées. Les élèves ont donc rendu un travail commun final et peu étayé par groupe.

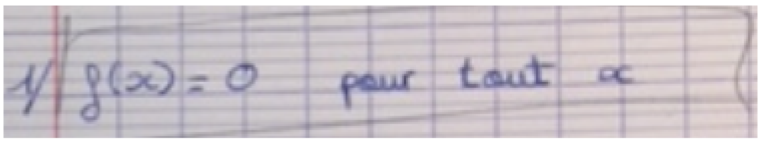
Phase 2 et 3 recherche et mise en commun :

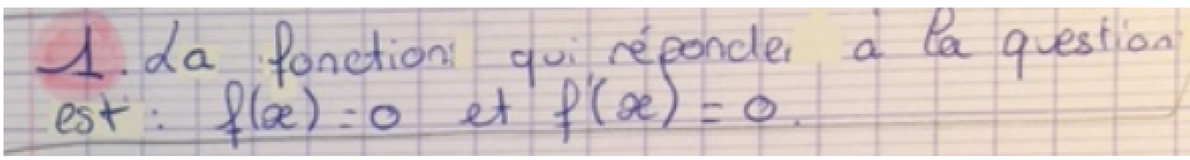
Les élèves ont axé leurs recherches sur des expressions algébriques de fonctions connues. Des groupes dans un des deux lycée ne démarraient pas du tout : coup de pouce de l'enseignant (propose de reprendre fiche résumée de cours sur dérivée + fonctions de références).

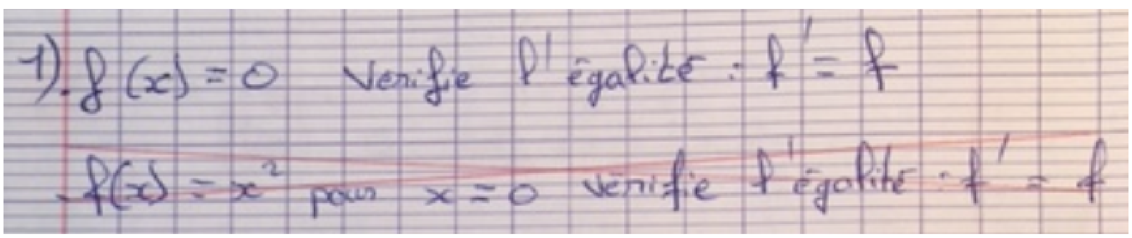
Voici les procédures de recherches d'élèves :

- $f(x)=ax$ $\quad f'(x)=a$ ok pour $x=1$
- $f(x)=x^2$ $\quad f'(x)=2$ ok pour $x=0$
- $f(x)=a$ $\quad f'(x)=0$ $\quad$ donc ok pour $a=0$
- *f(x)=x-x (des élèves pensent qu'elle est distincte de f(x)=0 pour tout x)*


1) La fonction qui repond à la question est pour tout x = 0 $f(x) = 0$ $f'(x) = 0$


1/ $f(x) = 0$ pour tout x


1. La fonction qui réponde à la question est : $f(x) = 0$ et $f'(x) = 0$.


1). $f(x) = 0$ Verifie l'égalité : $f' = f$

~~- $f(x) = x^2$ pour $x = 0$ verifie l'égalité : $f' = f$~~

Productions finales : Confusion entre la notion de fonction (*f*) et de nombre image (*f(x)*), toutes sortes de notations apparaissent → discussion sur la signification de $f'=f$ ou $f(x)=f'(x)$ pour tout x.

Bilan collectif : On ne connaît pas de telles fonctions dans le registre de nos fonctions de références, sauf celle identiquement nulle. Pas d'idée sur comment faire si on ajoute la contrainte $f(0) \neq 0$ alors → étayage du professeur : on va essayer d'en chercher une représentation graphique. Réactivation de l'aspect graphique de la dérivée. : les élèves cherchent à se rappeler + bilan.

Phases 4 et 5:

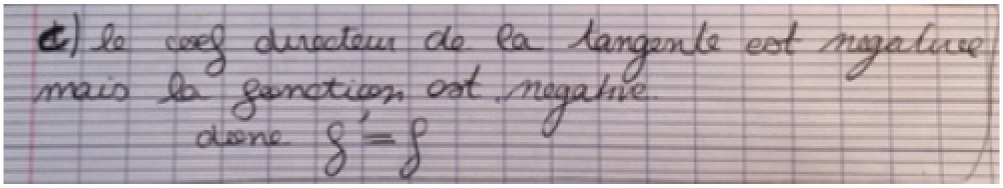
Question 3 : Travail et échanges dans les groupes

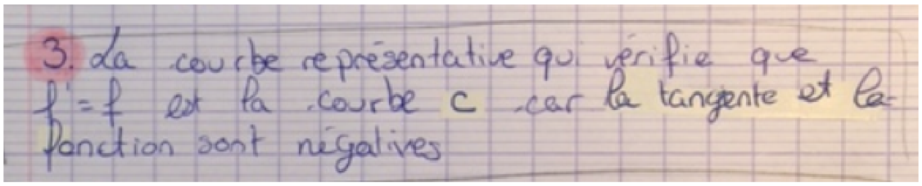
Une fonction croissante et négative souvent exclu donc a) et b) sont rejetées.

Les groupes ont souvent gardé e)

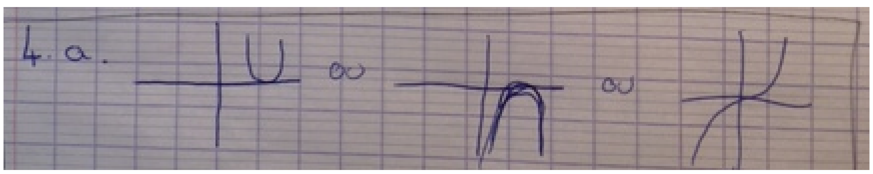
Confusions fréquentes :

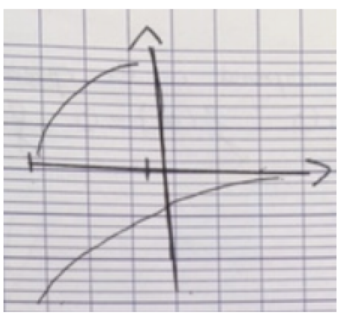
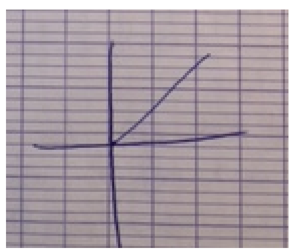
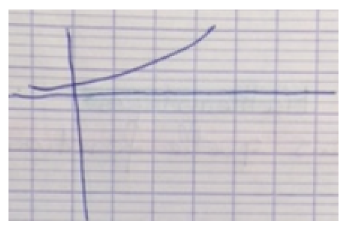
- sur le signe du coefficient directeur : « la tangente est négative »
- *f* et *f'* de même signe donc *f'=f*

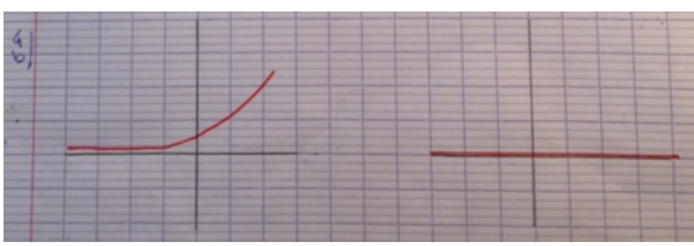
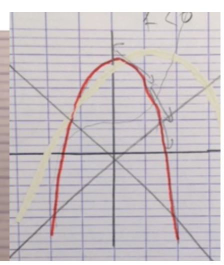




Question 4 : a) Pas possible sauf si *x=0*   sauf si *f=0*   oui si *x=0*



b)   

Discussion sur le concept de fonction (une seule image) et le domaine de définition (intervalles de IR ou IR tout entier)

Mise en commun des idées de chaque groupe

Apport descendant du professeur : définition + étude de la fonction exponentielle

III. Bilan :

Positif :

- Élèves actifs, enthousiastes de chercher une nouvelle fonction (dévolution) / on peut parler d'un besoin de fonction à créer, vous êtes des « créateurs » comme Newton à son époque !

- Travail sur l’objet fonction en tant que tel + approche par sa représentation graphique d’une fonction inconnue
- Réinvestissement de l’aspect algébrique et graphique de la notion de dérivée

Négatif :

- Peu de prises d’initiatives de la part de élèves → conséquence : trop de guidage de l’enseignant, cause : manque de temps et d’habitude. Ce qui nous amène à recommencer ce type d’activité plus ouverte.
- Pas de traces de recherches des élèves ramassées pas l’enseignant, les raisonnements sont surtout oraux dans les groupes et les élèves ne ressentent pas le besoin de l’écrire. Une attente à mieux expliciter. Donner de l’importance à l’écrit par nos conclusions aux questions et notre trace écrite.
- Apports théoriques post séance trop abruptes (relation fonctionnelle + notation puissance) : pas utile.

Surprenant :

Aucun élève ne s’est demandé pourquoi ont cherchait une telle fonction ! En effet, nous pensions que les élèves auraient besoin d’une motivation autre comme à travers une modélisation. Mais pour rappel, notre choix a été de ne pas surcharger un contexte qui pourrait être un obstacle aux raisonnements.

IV. Perspectives

Un premier travail qui a permis de débroussailler une approche de la fonction exponentielle.

Pistes de travail pour la suite :

Recherche des élèves :

- Laisser plus de temps pour les recherches par groupes
- Réfléchir à comment mieux accompagner les élèves à se questionner, à réfléchir et à donner des coups de pouce pertinents sans les guider
- Prendre plus d’informations, traces écrites des recherches
- Travailler la précision des traces écrites finales avec les élèves
- Intégrer l’oral pour la présentation par les groupes de leur travail (réfutation des représentation graphiques, …) afin d’améliorer et de préciser l’argumentation et la discussion.

Contenu du cours :

- Réfléchir au lien et au sens donné avec les apports théoriques qui ont suivis la définition et l’étude de la fonction exponentielle. (Relation fonctionnelle + notation puissance)
- Réfléchir à des modélisations possibles