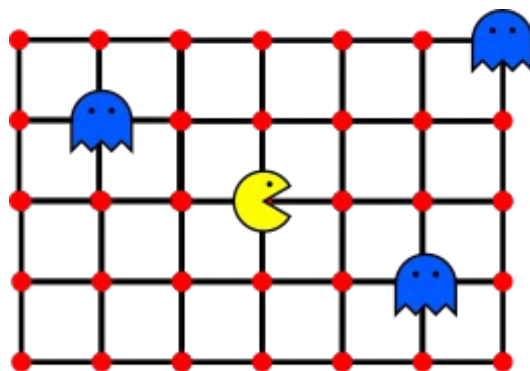


## Jeu de Pac-Man

L'idée de cette activité vient d'un article publié dans le numéro de juillet-août 2016 de La Recherche et intitulé "Pac-Man contre les fantômes". Il s'agit d'un problème d'optimisation et de recherche d'une stratégie gagnante qui peut être proposé à tous les niveaux à partir du collège.

Il est nécessaire que l'enseignant s'approprie la situation pour pouvoir mener l'activité dans de bonnes conditions.

### Problème général



### Règle du jeu

Le jeu de Pac-Man se joue sur une grille à maille régulière. Deux joueurs s'affrontent : le joueur 1 contrôle un certain nombre de fantômes et le joueur 2 contrôle Pac-Man. Les fantômes essaient de capturer Pac-Man et celui-ci tente de leur échapper.

- La partie commence par la mise en place des fantômes et de Pac-Man : le joueur 1 place librement les fantômes sur des sommets de la grille, puis le joueur 2 place Pac-Man sur un sommet de son choix.
- Les fantômes et Pac-Man peuvent se déplacer d'un sommet de la grille à un autre s'ils sont voisins, c'est-à-dire si les deux sommets sont reliés par un segment. Ils ne peuvent avancer que d'un seul sommet à chaque tour.
- Pendant la phase de jeu, les joueurs 1 et 2 jouent à tour de rôle. Le joueur 1 commence. À chaque coup, le joueur 1 peut choisir de déplacer un ou plusieurs de ses fantômes en respectant la règle de déplacement, ou n'en déplacer aucun. De même, le joueur 2 peut choisir de déplacer Pac-Man ou non.
- Quand un des fantômes est sur le même sommet que Pac-Man, la partie est finie et le joueur 1 a gagné. Le joueur 2 gagne si les deux joueurs s'accordent sur le fait que les fantômes ne captureront pas Pac-Man.

### Problème

*Combien faut-il de fantômes au minimum pour capturer Pac-Man ?*

### Matériel pour la situation

Les élèves disposent chacun d'une fiche, fournie dans la mallette. Chaque groupe (quatre élèves au plus) dispose de quatre fantômes, d'un Pac-Man, d'une grande grille (12x18) et de plusieurs caches

rectangulaires. L'enseignant dispose de fantômes supplémentaires, pour les groupes qui souhaiteraient en utiliser davantage.

## Organisation didactique

### Cheminement expérimental

Après quelques essais sur une petite grille, on peut se convaincre que quatre fantômes suffisent à capturer Pac-Man. Par la suite, il peut être utile de considérer des cas particuliers, avec des grilles de taille  $1 \times n$  puis  $2 \times n$ ,  $3 \times n$ ... avant de passer à une grille de taille  $m \times n$  quelconque. Des questions se posent, par exemple : la taille de la grille influe-t-elle sur le nombre minimum de fantômes nécessaire à la capture de Pac-Man ? La position initiale des fantômes joue-t-elle un rôle ?

Une solution consiste en l'énoncé d'une stratégie qui permette aux fantômes de capturer Pac-Man quelle que soit la position initiale attribuée à Pac-Man. Elle contient généralement une position initiale pour les fantômes et un certain nombre d'étapes à suivre pour capturer Pac-Man qui dépendent des déplacements de celui-ci. La validation de cette solution consiste en la preuve que la stratégie conduit à la capture de Pac-Man et qu'utiliser moins de fantômes ne le permet pas.

### Gestion et résultats expérimentaux

Comme toute situation de recherche, l'un des points essentiels est de laisser les élèves chercher par eux mêmes. Ils doivent expérimenter en jouant et l'enseignant doit donc leur laisser l'opportunité de s'appropriier la règle du jeu ; c'est l'idée de la première partie de la fiche élève. Les caches permettent de faire varier la taille de la grille. En fonction du niveau de la classe, il n'est pas absolument nécessaire de proposer la petite grille aux élèves, l'enseignant peut alors décider de distribuer les deux pages de la fiche élève en une seule fois.

Les élèves pensent souvent que le nombre de fantômes nécessaires à la capture de Pac-Man augmente avec la taille de la grille. Il faut alors penser à mettre à disposition des fantômes supplémentaires aux groupes qui le demandent. Le passage à une plus grande grille peut provoquer certaines difficultés et des divergences d'opinions au sein des groupes. De plus, certains groupes peuvent se perdre sur une grille trop grande sans élaborer de stratégie. L'enseignant peut alors rappeler aux élèves de suivre l'indication de la fiche, à savoir de chercher en premier lieu une stratégie pour des cas particuliers de grilles ( $1 \times n$ ,  $2 \times n$ ,  $3 \times n$ ...), pour les guider dans leurs réflexions. Cela aide à recentrer les élèves et à leur permettre de dégager de nouvelles stratégies.

Si les élèves finissent par trouver que seulement deux fantômes sont nécessaires à la capture de Pac-Man, l'énoncé clair d'une stratégie est souvent difficile. Couramment, des élèves proposent des justifications du type « c'est évident que les fantômes vont finir par coincer Pac-Man dans un coin », « les fantômes peuvent toujours se rapprocher de Pac-Man » ou encore « on voit bien que Pac-Man ne pourra pas s'échapper ». Celles-ci ne sont bien sûr pas suffisantes et ne constituent pas une stratégie. L'enseignant pourra alors insister sur ce qu'on attend ici d'une stratégie, à savoir, une suite d'instructions précises à suivre pour le déplacement des fantômes en fonction du déplacement de Pac-Man : « si Pac-Man se déplace comme ceci, alors les fantômes se déplacent comme cela ». Tout ceci peut faire l'objet d'une mise en commun.

Les propositions des élèves sont souvent diverses et intéressantes. L'appropriation préalable du jeu par l'enseignant est donc essentielle pour pouvoir y répondre. Aussi, l'enseignant doit garder en tête que la résolution de ce problème est loin d'être unique et que celle proposée ci-après n'en est qu'une parmi beaucoup d'autres.

Enfin démontrer qu'une stratégie aboutit bien à la capture de Pac-Man n'est pas non plus évident. Le point clé est souvent de trouver une quantité entière (aire, distance, ...) qui diminue strictement à chaque étape (voire toutes les deux ou trois étapes). Celle-ci dépend bien évidemment de la stratégie adoptée et peut parfois être difficile à dégager. Une justification de la décroissance ne sera pas forcément attendue, ou demandée, à tout niveau.

A la fin de l'activité de recherche, l'enseignant peut proposer une mise en commun pendant laquelle chaque groupe présente les éléments de stratégie trouvés et en discute avec les autres. La mise en débat des élèves permet de pallier aux différences de progression entre les groupes.

Afin d'apporter une conclusion à cette activité de recherche, l'enseignant peut également présenter la stratégie proposée dans cette fiche, en insistant bien sur le fait que d'autres stratégies existent et sont tout aussi correctes. Celle-ci a simplement l'avantage d'être relativement accessible à tous et facile à justifier. Elle peut ainsi permettre d'apporter une solution au problème pour tous les groupes, quelque soit leur avancement.

## Résolution mathématique

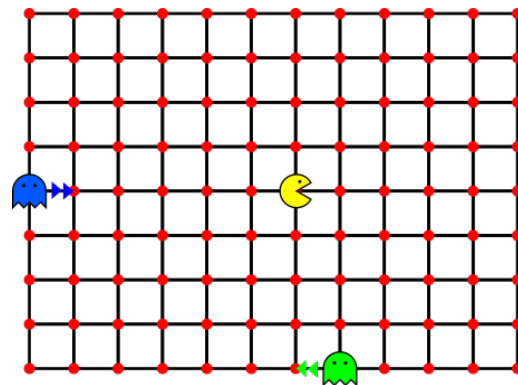
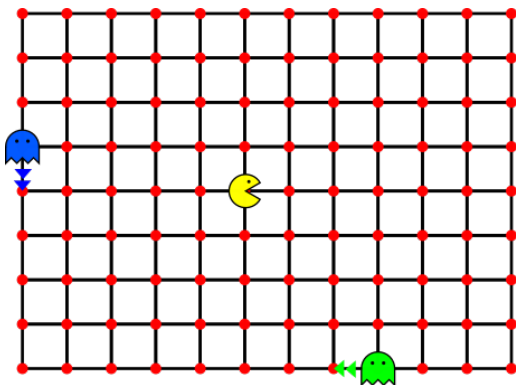
### Une solution (parmi beaucoup d'autres)

Comme précisé dans l'introduction de cette fiche, nous invitons l'enseignant à prendre le temps de se confronter à l'activité de recherche comme le feront les élèves avant de regarder une solution. L'idée de la stratégie qui suit, détaillée dans le document intitulé « Le jeu de Pac-Man », peut être proposée à tous les niveaux de collège et de lycée. On pourra consulter cette référence afin de connaître plus en détail les justifications mathématiques.

On joue sur une grille rectangulaire de taille  $m \times n$ , où  $m$  et  $n$  sont deux entiers positifs non nuls. **Deux fantômes sont nécessaires et suffisants pour capturer Pac-Man.** Après plusieurs parties, on peut constater que la position initiale des fantômes ne détermine pas l'issue du jeu. En effet, on peut atteindre n'importe quelle position sur la grille en un nombre fini de coups. Par ailleurs, on pourra remarquer que certaines positions initiales sont équivalentes pour des raisons de symétrie. À partir de là, si la position initiale choisie ici n'est pas celle des élèves, deux choix s'offrent à l'enseignant : montrer qu'on peut atteindre cette position ou adapter la stratégie proposée.

L'idée est, pour le joueur 1, de coincer Pac-Man dans un rectangle de plus en plus petit, contrôlé par les fantômes. La stratégie est la suivante.

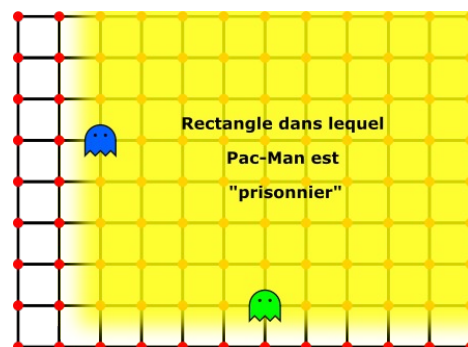
1. Placer un fantôme dans le coin en haut à gauche de la grille et l'autre dans le coin en bas à droite.
2. Aligner le premier fantôme horizontalement avec Pac-Man et le second fantôme verticalement.



3. Conserver les alignements en fonction du mouvement de Pac-Man et approcher progressivement les fantômes. Ici se retrouve l'idée d'enfermer Pac-Man dans un rectangle de plus en plus petit.

4. Capturer Pac-Man !

La difficulté majeure est de prouver que cette stratégie conduit bien à la capture de Pac-Man. En effet, si on considère les différentes étapes proposées ci-dessus



comme un algorithme à suivre, on ne peut être certain que les fantômes captureront Pac-Man en un nombre fini de coups. On se repose sur le fait que la grille est finie pour montrer que, à chaque tour, le rectangle délimité par les fantômes est de plus en plus petit.

Avec un seul fantôme, il est aisé de justifier que Pac-Man peut toujours s'échapper. On peut tester simplement sur un carré (une grille  $2 \times 2$ ) : Pac-Man a toujours une échappatoire, quel que soit le mouvement du fantôme. Si Pac-Man et le fantôme restent immobiles chacun dans un coin opposé du carré, la partie ne finit pas. Il faut donc deux fantômes au minimum pour capturer Pac-Man.

## Connaissances et compétences

### Connaissances

- Optimisation
- Symétrie
- Condition nécessaire, condition suffisante
- Stratégie gagnante

### Compétences

- Chercher : expérimenter à tâtons, étudier exhaustivement sur des petites grilles, conjecturer, manipuler.
- Raisonner : démontrer, démarche algorithmique, mener collectivement une investigation.
- Communiquer : expliquer et décrire précisément une stratégie, confronter des idées et des argumentations.

## Bibliographie

*Le jeu de Pac-Man*, disponible sur le site internet de l'IREM de Grenoble dans la rubrique « Raisonnement, logique, Situations de recherche pour la classe »

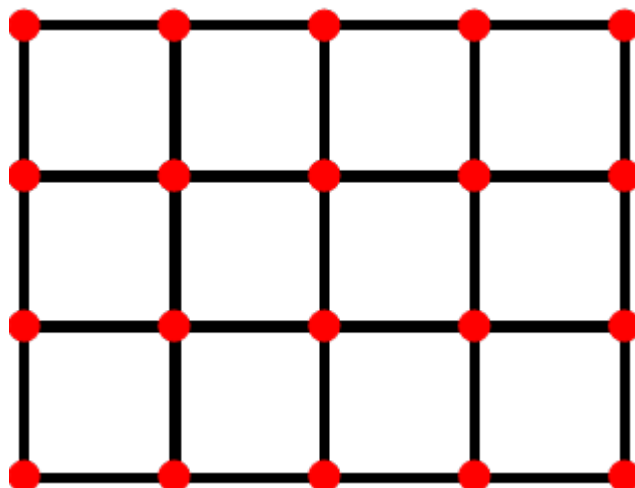
## Jeu de Pac-Man

**Le jeu.** On dispose d'une grille sur laquelle deux joueurs s'affrontent. Le joueur 1 contrôle un certain nombre de fantômes et le joueur 2 contrôle Pac-Man. Les fantômes essaient de capturer Pac-Man et Pac-Man tente de leur échapper.

### Règle du jeu

1. La partie commence par la mise en place de Pac-Man et des fantômes : le joueur 1 place librement les fantômes sur des sommets de la grille, puis le joueur 2 place Pac-Man sur un sommet de son choix.
2. Les fantômes et Pac-Man peuvent se déplacer d'un sommet de la grille à un autre sommet si ceux-ci sont reliés par un segment. Ils ne peuvent avancer que d'un seul sommet à chaque tour.
3. Les joueurs 1 et 2 jouent à tour de rôle. Le joueur 1 commence. À chaque coup, le joueur 1 peut choisir de déplacer un ou plusieurs de ses fantômes en respectant la règle de déplacement, ou n'en déplacer aucun. De même, le joueur 2 peut choisir de déplacer Pac-Man ou non.
4. Quand un des fantômes est sur le même sommet que Pac-Man, la partie est finie et le joueur 1 a gagné. Le joueur 2 gagne si les deux joueurs s'accordent sur le fait que les fantômes ne captureront pas Pac-Man.

*Dans un premier temps, vous disposez de quatre fantômes, d'un Pac-Man et de la grille suivante. Jouez plusieurs parties en échangeant les rôles. Qu'observez-vous ?*



À présent, on se pose la question :

*sur une grille rectangulaire de taille quelconque, combien faut-il de fantômes au minimum pour être sûr de capturer Pac-Man à chaque partie ?*

Décidez du nombre de fantômes que vous souhaitez utiliser puis, si besoin, allez vous servir auprès de l'enseignant. Vous utilisez désormais la grille fournie avec les différents caches. Vous pouvez étudier les cas particuliers suivants : 1 ligne, 2 lignes, 3 lignes...