A la recherche d'un cadre théorique permettant de prendre en compte la cohérence globale nécessaire pour qu'un élève, une classe, un amphi puisse faire véritablement des mathématiques dans un enseignement mathématique

Groupe ADIREM-INRP de l'IREM de Grenoble

I. L'objet de la recherche

Notre recherche se centre essentiellement sur la question non évidente et non consensuelle :

"Pour un élève, pour un étudiant, qu'est-ce que faire véritablement des mathématiques? "

En effet, chacun de nous ayant rencontré d'une façon ou d'une autre les mathématiques dans sa vie s'est forgé une idée de ce que signifie "faire des mathématiques". En principe donc, cette expression employée par tous identifie une activité considérée comme plus ou moins accessible, mais néanmoins une activité précise et unique en ce sens que bien distincte des autres.

Or, en pratique, il est très difficile de se mettre d'accord dès qu'on cherche à préciser davantage ce que l'on veut signifier *quand on dit que "cet élève ou cet étudiant, ce groupe d'élèves ou d'étudiants fait véritablement ou non des mathématiques en participant de telle ou telle façon à telle ou telle activité scolaire ou universitaire".*

On peut penser que cette difficulté à trouver, même entre spécialistes, une façon commune d'expliciter, de définir ce qui caractérise le propre de "faire des mathématiques", tient en grande partie à la non prise en compte du paradoxe suivant.

Le paradoxe fondamental de l'enseignement des mathématiques :

Puisque ce qui est mathématique est par construction ce qui s'énonce, se montre et se démontre le mieux, les mathématiques sont, d'un côté, ce qui peut et doit par excellence être enseigné à l'école par un maître qui explique, montre et démontre à ses élèves tout ce qu'il n'est pas pensable qu'ils puissent ré-inventer dans le temps court des études.

Mais d'un autre côté précisément, le fait d'être élève, c'est-à-dire le fait d'attendre de l'école qu'elle pose elle-même les questions auxquelles elle répond, qu'elle vous montre comment résoudre les problèmes qu'elle vous soumet, qu'elle certifie que vous avez bien appris dès lors que vous pouvez suffisamment bien reproduire ce qu'on vous a montré, et plus spécifiquement encore pour les mathématiques où l'apprentissage du raisonnement joue un grand rôle, le fait de chercher à mettre sa pensée naturelle en adéquation avec celle d'un maître, de faire taire ses résistances intellectuelles propres si elles sont trop peu conformes à ce que propose ce maître, tous ces faits sont profondément contraires à l'esprit même des mathématiques, lequel réclame pour se développer d'adopter une posture curieuse, têtue, désintéressée et iconoclaste.

En clair, enseigner les mathématiques à un élève, c'est lui faire découvrir que dans certaines circonstances (en particulier celles où les mathématiques sont pertinentes), son adhésion à une idée ou à une thèse peut et doit pouvoir s'appuyer exclusivement sur l'évidence qu'apporte un raisonnement qui s'oblige à être logique : "J'y crois! non par acte de confiance ou de foi, mais parce que je comprends les raisons pour lesquelles ça marche ainsi et/ou celles pour lesquelles ça ne peut être autrement !"

Cette adhésion intellectuelle ne peut donc, sans perdre son caractère mathématique, être le résultat d'un compromis intéressé : "J'ai intérêt à faire comme si j'étais convaincu par ce qu'on me propose car, in fine, c'est cela qu'on me demandera de réciter ou d'appliquer et ce n'est pas de dire ce que je pense réellement".

Cette adhésion intellectuelle ne peut non plus être mathématique si elle est principalement soumission à une autorité morale, intellectuelle ou institutionnelle : le "vu à la télé !" qui devient en classe le "c'est vrai … puisque le professeur le dit!" ou "puisque que c'est écrit dans le livre !" ou "je le fais parce que c'est ce qu'on m'a dit de faire !"

Tenant compte de cette posture paradoxale des acteurs de l'école qui risque à chaque instant de travestir l'action que nous menons en réalité quand nous prétendons "faire des mathématiques ou faire faire des mathématiques en cours de mathématiques", il nous a donc semblé indispensable de chercher à mieux préciser ce qu'on veut signifier quand on dit qu'une personne ou qu'un groupe fait des mathématiques ou n'en fait pas; il nous a donc semblé important de repérer des attitudes, des indices, des critères objectifs sur lesquels on pourrait se baser pour porter ce jugement et pour qu'il soit pertinent.

Cela nous a poussés à essayer de dégager des facteurs qui peuvent introduire la complicité indispensable entre maître et élèves, et entre les élèves, pour qu'ils puissent faire véritablement des mathématiques bien qu'ils soient "à l'école". Inversement, pour éviter de passer à côté de l'essentiel, pour éviter de se laisser aveugler par une analyse trop naïve des comportements externes ("ça marche bien !… ça les a beaucoup intéressés et ils ont tout compris!"), nous avons également cherché à identifier les facteurs qui vont très probablement interdire à la classe, au TD, à l'amphi, de faire réellement des mathématiques bien qu'on soit en cours de mathématiques !

Ce que cette recherche nous a permis de dégager principalement :

Il nous est alors apparu qu'on ne peut, sous peine d'inconsistance ou de contradiction, se poser la question "qu'est-ce que faire des mathématiques?" si on ne s'oblige pas à expliciter ce que l'on vise principalement pour et au delà des mathématiques et de l'école dans les mathématiques que l'on enseigne à l'école.

Nous sommes donc partis de la préoccupation centrale *: Quelles pratiques mathématiques peuvent le plus introduire l'élève à* ***une culture scientifique*** *qui s'approfondisse d'année en année? Quelles sont celles qui vont contribuer le plus sûrement à ce que* ***l'essentiel*** *de ce qui a été rencontré dans l'étude d'une notion* ***continue à "travailler"*** *ailleurs - en mathématiques et hors des mathématiques ?*

L'idée directrice *qui s'est alors dégagée de nos réflexions et expérimentations est la suivante :* ***retenons comme critère fondateur de l'activité mathématique d'un élève, d'une classe ou d'un amphi, tout ce qui tourne autour de l'action <u>d'émettre et de résoudre des conjectures</u>.***

Dans cette activité basée sur une dialectique subtile entre intuition, doute et certitude, le sujet essaye de penser par lui-même! Pour cela, il s'autorise par moments toutes les audaces pour libérer son intuition, avoir une opinion, une idée directrice; pour avancer, il ne s'interdit pas de recourir à un imaginaire débridé, puis, quand il tient une idée, il s'oblige à la mettre sous une forme dans laquelle la dichotomie vrai/faux puisse jouer. In fine, il n'admet comme résultat valide que ce qui a pu se plier d'une façon ou d'une autre au respect scrupuleux des règles strictes de la logique et du calcul.

Cette analyse nous conduit à penser que ***pour faire véritablement des mathématiques, le sujet élève doit pouvoir se placer en position d'auteur : "je pense que…, je soutiens que…,***

j'affirme que…, je montre, je démontre que…" ; il doit pouvoir assumer une forme de responsabilité scientifique vis-à-vis de lui-même et de la communauté de ses pairs.

L'expérience dans les classes et les amphis tend à montrer que pour que le sujet élève puisse occuper cette position d'auteur, il faut que le sujet professeur non seulement l'accepte, le souhaite, le veuille, mais aussi l'organise de façon à ne pas être institutionnellement l'unique auteur de tout ce qui s'énonce mathématiquement en classe, l'unique interlocuteur à qui l'on s'adresse quand on s'inquiète de la vérité et de la pertinence de son propos mathématique, car l'unique responsable de ce qui est mathématiquement vrai et/ou pertinent.

Par suite, nous sommes amenés à postuler que pour que l'on puisse faire véritablement des mathématiques dans une situation d'enseignement/apprentissage, il faut qu'à certains moments au moins, le professeur et ses élèves aient les moyens de concevoir leurs positions didactiques comme très différentes de celles que leur assigne le contrat didactique classique :

- l'élève accepte davantage de prendre le risque (et le bonheur) d'être auteur, assume une plus grande part de responsabilité scientifique ("je suis conscient de ne pas tout connaître, mais cependant… est-ce que… en réfléchissant un peu plus, en confrontant la théorie avec mes expériences, en cherchant à mettre en évidence les contradictions, en raisonnant avec mes arguments propres… est-ce que je ne serais pas capable de débusquer - par moi-même - un grand nombre d'erreurs ou d'impossibilités ? de trouver des solutions intéressantes ?")

- le professeur se voit moins comme le garant du vrai, le rectificateur des positions erronées, le proposeur de "la solution la plus efficace", mais davantage comme le directeur scientifique de ces auteurs, comme celui qui les aide à se construire des critères de vérité et de pertinence scientifique lorsqu'ils pratiquent le jeu mathématique : émettre et résoudre des conjectures.

<u>Nécessité de la recherche d'une cohérence globale</u>

L'expérience du "débat scientifique en cours de mathématiques" montre que pour que ce postulat ne demeure pas un mythe irréalisable dans le réel de l'enseignement (les élèves étant a priori plus sensibles à l'évocation d'un contrôle, d'une épreuve, d'une note, symbole de réussite /échec, de récompense/sanction, d'estime/désamour du professeur, qu'à l'intérêt proprement scientifique d'une démarche), il est indispensable que la classe puisse accéder à une sorte de cohérence globale qui permette à chacun de ses membres (prof et élèves) de se projeter comme membre d'une mini-communauté scientifique (la communauté classe ou amphi).

Cette cohérence globale entre sujet psychique, sujet épistémique et sujet social nous est peu à peu apparue comme nécessaire pour que, parvenant à occuper dignement sa position dans la communauté classe, chaque participant (élève comme professeur) puisse, à certains moments au moins, bénéficier d'un bon équilibre entre les tensions très contradictoires que subissent le sujet élève comme le sujet professeur quand ils veulent faire véritablement des mathématiques dans un enseignement de mathématiques.

En effet, répétons-le, (même lorsqu'il est adulte) l'élève lorsqu'il s'adresse à un maître pour apprendre (c'est le cas a priori dans une classe ou un amphi) se met en situation de dépendance, de docilité, de recherche de conformité avec la pensée du professeur. Pour suivre ce professeur, pour comprendre ce qu'il dit, pour ne pas perdre le fil de son discours, l'élève qui veut apprendre doit momentanément s'assujettir à ce Maître. Il se retrouve donc en quelque sorte institutionnellement désinvesti pendant le cours de toute réelle responsabilité au sujet de la vérité et de la pertinence. Le professeur, lui à l'inverse, surinvesti de la responsabilité de ne pas laisser passer en classe des "choses trop fausses", "trop difficiles à rattraper après coup", se sent sans arrêt tenu de tout dire et de tout corriger. Ainsi, même quand par moments il tend à dévoluer à ses interlocuteurs une responsabilité scientifique pour qu'ils puissent faire des mathématiques, les comprendre, tout le pousse institutionnellement à leur reprendre immédiatement cette responsabilité pour assumer sa position de Maître.

Puisque nous partons du principe que pour faire véritablement des mathématiques l'élève doit pouvoir à certains moments au moins assumer pleinement une position d'auteur, il doit donc pouvoir se libérer momentanément du joug scolaire, s'autoriser à être iconoclaste et désirer se sentir scientifiquement responsable de ce qu'il soutient devant le professeur et devant le groupe de ses pairs, mais aussi vis-à-vis de lui-même. De son côté, le professeur doit non seulement pouvoir accepter cette prise d'indépendance, mais la vouloir ; il doit donc, tout en restant le Maître de la classe, pouvoir dévoluer dans une certaine durée une part de la responsabilité scientifique qui lui est traditionnellement attribuée en exclusivité.

II. Les cadres théoriques sur lesquels nous nous appuyons pour mettre en œuvre ces intentions

La théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998), la dialectique outil-objet et jeux de cadres (Douady, 1984) nous sont apparus comme de bons cadres théoriques pour nous permettre d'analyser dans quelle mesure le sujet épistémique élève va ou non pouvoir assumer sa position d'auteur et de quelle façon l'organisation didactique du professeur permet ou non aux élèves d'une classe de participer à une activité scientifique de type mathématique.

La théorie anthropologique (Chevallard, 1992, 1999) nous permet quant à elle de prendre la mesure des tensions qui s'exercent nécessairement entre cet auteur potentiel, entre ce sujet mathématique qui se doit d'être indépendant et le sujet élève membre d'une institution d'enseignement qui par nécessité le contraint énormément.

Mais tout en nous appuyant sur ces cadres théoriques classiques de la didactique, nous avons été amenés à les aménager ou à les élargir pour prendre en compte des éléments qui nous semblent déterminants pour accéder à la cohérence globale entre mathématiques, apprentissage et vie collective, dont nous venons de parler.

Ces éléments se sont dégagés au fil des années quand nous avons tenté de réaliser sur le mode du "débat scientifique" des enseignements de mathématiques d'une part conformes à l'esprit d'une démarche scientifique, et d'autre part soucieux de contribuer à la construction d'un sujet social qui respecte les valeurs humanistes et démocratiques les plus fondamentales.

Il est de mise aujourd’hui, à chaque fois qu'un problème apparaît dans la société, de demander à l'école de prodiguer un nouvel enseignement ad hoc.

Ainsi en est-il actuellement de l'éducation civique qui devrait pallier les problèmes que chacun rencontre pour s'accepter suffisamment soi-même, accepter l'autre dans sa ressemblance et dans sa différence, afin de pouvoir vivre plus harmonieusement ensemble.

Notre position est que, plutôt que de rajouter toujours plus d'enseignements spéciaux qui ont tendance à rester lettre morte dans l'action, il est peut-être plus honnête, plus profond et plus efficace à long terme d'intégrer ces valeurs à nos enseignements et de voir, par exemple pour ce qui nous concerne, comment elles jouent en faveur/défaveur d'un véritable apprentissage des mathématiques et vice-versa.

La question devient alors : "Comment enseigner les mathématiques en respectant l'esprit de cette discipline et en prenant directement en compte la tension entre deux nécessités : d'un côté celle de donner à chacun la possibilité de se construire, de se reconnaître comme une personne propre, irréductible à une autre, qui ne peut être sacrifiée aux besoins d'un groupe social, et d'un autre côté celle d'accepter (en particulier pour être reconnu par l'autre et par le groupe) de s'assujettir aux règles et coutumes qui permettent aux humains de vivre ensemble en confraternité et en coopération respectueuse de la dignité et des besoins de chacun dans des organisations dont il n'est pas l'auteur principal (il ne s'agit pas, pour le bonheur et l'équilibre de l'élève ou de la classe, de sacrifier la rigueur, de modifier les définitions et les axiomes de base, etc.) ?"

Un élément de modélisation susceptible de nous aider à faire véritablement des mathématiques en cours de mathématiques : savoir externe - savoir interne

Dans le rapport qu'un élève entretient au savoir, et pour ce qui nous concerne dans le rapport aux mathématiques que le professeur souhaite favoriser auprès de ses élèves/étudiants, deux intentions en principe non incompatibles, mais en pratique très souvent contradictoires se présentent :

A) <u>On vise un rapport au savoir qui reste pour l'essentiel externe au sujet qui apprend</u> :

Pour le professeur, il s'agit alors essentiellement de couvrir honnêtement son programme; honnêtement signifie en respectant l'équilibre des différentes parties, sans faire d'entorse majeure à la logique et à la rigueur de la discipline, et dans des termes tels qu'un élève "normal" puisse en principe comprendre et assimiler au fur et à mesure s'il a appris ce qui précède et s'il effectue le travail qui lui est demandé.

Pour l'élève, il s'agit d'apprendre régulièrement ce qu'on lui présente dans différents chapitres, lesquels doivent pouvoir tour à tour s'ouvrir puis se refermer lorsque s'ouvre le chapitre suivant, c'est-à-dire qu'il doit pouvoir faire les exercices d'application une fois que le professeur a expliqué les notions nouvelles, et, s'il apprend son cours, il doit in fine pouvoir traiter les problèmes et répondre aux questions qui sanctionneront les apprentissages de ce chapitre.

Dans cette vision externe du savoir, les différents chapitres d'un cours (comme les différents modules de l'université) sont d'abord regardés comme des groupes de connaissances qui doivent être acquis successivement; ils ont donc tendance à se juxtaposer plus qu'à s'interpénétrer, ils ne sont pas regardés comme diverses façons d'exemplifier, de donner progressivement plus de sens et de consistance à une philosophie globale qui se développerait d'année en année. Il n'appartient donc pas véritablement à l'élève de les confronter pour découvrir les ressemblances/différences, complémentarités/oppositions.

De même, la confrontation aux autres disciplines et avec les différents domaines de la vie où l'on a acquis pragmatiquement une certaine compréhension de "la réalité" n'est pas interdite, mais elle n'est pas considérée comme nécessaire ; en tous cas, si elle a lieu fortuitement, on convient de ne pas s'attarder sur les éventuels conflits qui pourraient engendrer des remises en question (inacceptables dans cette vision du savoir) de la théorie.

Le savoir externe, c'est donc essentiellement pour le professeur ce qu'il faut enseigner (indépendamment de chacun) et pour l'élève ce qu'il faut apprendre (indépendamment de qui on est) ; ***ce savoir externe devient donc par nécessité ce qui est vrai sans discussion !***

Sans discussion par nécessité, car cette discussion ne serait pas fonctionnelle. En effet, puisque ce qu'on enseigne ne vise pas la transformation des personnes, puisque ce qu'on apprend ne vise pas principalement à éclairer notre regard sur le monde et sur nous-même, la confrontation entre théorie et pratique, entre modèle et réalité devient facilement perte de temps et verbiage ! Dans une organisation où le temps est compté, on va donc nécessairement faire l'économie d'une telle discussion!

B) A l'opposé, on peut viser un rapport au savoir essentiellement interne au sujet qui apprend :

Le savoir est alors essentiellement vu comme un outil de transformation de la personne; par l'étude le sujet con-naît, c'est-à-dire naît à un nouveau rapport au monde et à lui-même, il voit ce monde autrement, le pense autrement, il traite les problèmes qu'il rencontre différemment, il se voit lui-même comme une autre personne.

Quelques exemples :

- apprendre à numéroter et à compter, c'est-à-dire à mettre de l'ordre dans le monde et à se doter de moyens pour parvenir à suivre par la pensée les objets qu'on ne peut plus surveiller du regard ou tenir dans sa main,

- découvrir qu'on peut remplacer des objets par des symboles (des nombres par des lettres) et qu'on peut avantageusement opérer sur ces symboles; découvrir la force du calcul algébrique et voir que cela permet d'effectuer des changements de sens, des changements de niveau de vigilance…

- entrer dans la philosophie des cas d'égalité et de similitude des triangles,

- comprendre le principe de la mise en équation qui nous permet de calculer ce qui est (ou au contraire nous permet de mettre en évidence, par l'impossibilité du calcul, ce qui est impossible dans la réalité), alors que cela échappe à la mesure ou à l'expérience directe,

- mettre en évidence la linéarité, c'est-à-dire découvrir que tout ce qui varie ne le fait pas forcément linéairement,

- appréhender les vecteurs, c'est-à-dire découvrir que tout ce qui s'ajoute ne se comporte pas forcement comme le font les nombres,

- découvrir qu'il existe des façons si différentes de devenir très grand ou très petit que ça peut tout changer au niveau de résultats qui, eux, ne sont ni infiniment grands ni infiniment petits,

- aborder l'uniformité, c'est-à-dire découvrir qu'il existe des phénomènes non uniformes,

- construire l'intégrale, c'est-à-dire inventer des moyens d'avoir une évaluation globale de l'importance de grandeurs qui varient constamment dans la durée ou dans l'espace,

- découvrir qu'un détour par l'infini peut être une façon très réaliste et pertinente de traiter les grandeurs finies mais non directement accessibles (la mise en équation différentialo-intégrale représentant une sorte d'aboutissement magistral de la fécondité du mélange entre géométrie, algèbre et analyse, entre intuition, concept et technique).

On peut estimer que chacun de ces savoirs est fondamental en soi, mais en réalité il n'a de valeur que pour ceux qui parviennent à les intérioriser.

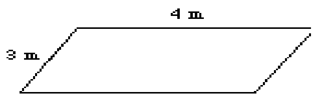
S'ils sont rencontrés comme des savoirs externes (c'est malheureusement très/trop souvent le cas), ils ne peuvent être utilisés ensuite sans déboires que par ceux qui en ont un usage quotidien car ils ne laissent que d'insignifiants souvenirs (le souvenir est essentiellement bon ou mauvais suivant que l'apprentissage s'est conclu par d'excellentes notes ou au contraire de très mauvaises), alors qu'à l'inverse ils transforment profondément les personnes qui les intériorisent, car ils changent en partie leur rapport au monde, et ce même si elles ne les exploitent pas directement en tant que tels dans leur vie quotidienne, mais indirectement comme structures d'interprétation ou comme espaces de métaphore.

De la même façon, on a pu constater ces dernières années que connaître certains éléments de didactique peut ne changer rigoureusement rien aux comportement des professeurs ou des parents d'élèves s'ils ont acquis ces savoirs dans une problématique externe (par exemple parce qu'ils y étaient contraints pour obtenir un diplôme), alors qu'intériorisés, ces savoirs didactiques peuvent changer radicalement le regard que ces adultes professeurs ou parents peuvent poser sur le savoir et sur un jeune en train d'apprendre. Cela peut progressivement les amener à envisager autrement le rapport qu'ils pourraient entretenir avec ce savoir et avec ce jeune ; à terme, cela peut alors radicalement changer la façon dont cet élève va pouvoir apprendre "grâce ou contre" ces adultes.

Pour mieux préciser la portée de ce découpage savoir externe - savoir interne, prenons deux exemples :

Pendant plusieurs années, nous avons posé à l'entrée à l'université la question (impertinente à ce niveau pour des élèves ayant réussi un bac C) :

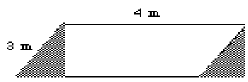
"Quelle est l'aire de ce parallélogramme de côtés 3 m et 4 m ?"



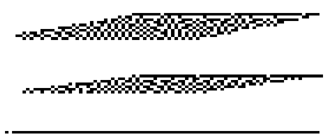
Notre surprise a été grande de constater que régulièrement plus de 50% de ces étudiants en sciences répondent :

$$A = 12 \text{ m}^2 \text{ !!!}$$

Certains donnent "spontanément" une "preuve" :



Rarissimes sont ceux qui mettent en évidence la variable "aplatissement" !

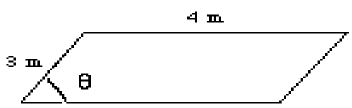


Pourquoi ???

On peut se dire que le niveau baisse ! qu'ils ne savent plus rien ! qu'ils ne réfléchissent plus et font n'importe quoi ! qu'ils ont déjà tout oublié car en terminale ils n'auraient pas répondu cela, etc…

On peut aussi remarquer que si on pose la "même" question :

Quelle est l'aire de ce parallélogramme de côtés 3m et 4m ?



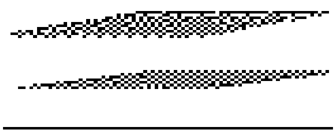
la réponse majoritaire devient : $A = 12.\sin(\theta)$.

Formule exacte qui "dit presque tout" et dont la présence majoritaire tend à montrer qu'ils ont bien appris et retenu quelque chose qu'on peut appeler des mathématiques en cours de mathématiques…

Analyse de ce double constat

La présence majoritaire de cette formule exacte quand l'angle est mis en exergue montre que nos étudiants ont appris quelque chose à propos de l'aire et peuvent le mettre en œuvre si on les interroge dans le registre où ils ont appris ; mais nous aurons tendance à dire que ce qu'ils connaissent n'est encore qu'un savoir externe puisque dans l'action, cela ne leur dit rien sur l'aire réelle de la figure mise en jeu, cela ne leur donne pas la force, la sagesse de résister à la pression de la question "quelle est l'aire?" (sous-entendu dans un contrat didactique classique : il y en a une et on peut la calculer avec les paramètres donnés. Donc ici : aire = L × l).

Une façon de manifester l'intériorisation du savoir serait ici de dire : *"A défaut de connaître l'inclinaison, j'envisage différents cas de figure*



et j'en conclus que je ne dois pas répondre à la question dans les termes où elle est posée car tout est possible entre 0 et 12 m^2 *!!!"*

Ce que m'apporte ici l'éclairage scientifique en terme de connaissance sur le monde, ce n'est pas essentiellement la connaissance d'une formule exacte que je peux mettre en œuvre quand tous les paramètres pertinents sont désignés (enseignement de techniques), c'est la capacité de subodorer qu'ici un paramètre caché (la hauteur ou l'angle) joue un rôle déterminant sur ce qui nous intéresse : l'aire.

Ce que m'apporte globalement l'intériorisation de la démarche scientifique en terme de participation au débat démocratique, c'est la sagesse de savoir qu'il ne faut pas se précipiter sur les solutions évidentes sans les travailler un peu au préalable, sans essayer de les "étirer", de les "déformer" pour voir si elles résistent, et ce malgré et surtout quand l'injonction m'est faite de répondre instantanément par des questions de la forme : "quelle est …?".

L'intériorisation scientifique change mon regard sur le monde en me montrant que le plus souvent, les problèmes en apparence très simples sont mal posés et qu'il convient de les reformuler avant de se précipiter à répondre, car suivant la (re)formulation qu'on effectue, les réponses peuvent différer.

Ici, par exemple, à la question "quelle est l'aire …?", on pourrait rétorquer : "si vous me dites qu'il s'agit d'un parallélogramme semblable à celui que vous représentez, j'aurais envie de répondre qu'il vaut environ entre huit et dix mètres carrés, mais si vous voulez plus de précision il faudra me donner l'angle ou la hauteur. Si par contre vous déclarez que vous laissez cette variable libre (ce qui est la convention du mathématicien, quand il ne dit rien), alors je vous réponds que tout est possible entre 0 et 12 mètres carrés, et que suivant ce que vous voulez faire, cette variabilité de l'aire pourra être exploitée comme un avantage ou au contraire subie comme un handicap, suivant que c'est vous qui contrôlerez cette variable ou quelqu'un d'autre. Sachez enfin que la formule : Aire = 12 sin (θ) , non linéaire en θ, vous dit exactement comment agit cette variable angle sur l'aire de ce type de parallélogramme."

Un des savoirs essentiels que les mathématiques nous apportent en terme de changement de regard sur le monde, c'est précisément la notion de variable ou de paramètre (caché ou non, mais plus ou moins pertinent).

Ici, une fois identifiés les paramètres pertinents (longueur, largeur et angle), savoir mettre en équation ce problème, i.e. savoir établir que l'aire du parallélogramme est proportionnelle à la longueur, à la largeur et au sinus de l'angle, fait partie intégrante des mathématiques, c'est même ce qui leur donne une valeur opératoire pour elles-mêmes et pour les autres disciplines mais, à notre avis, **là n'est pas le savoir principal,** là n'est pas ce qu'il est fondamental que chaque élève intériorise.

En effet, pour le futur citoyen que représente notre élève ou notre étudiant, les chances qu'il ait à utiliser seulement une fois dans sa vie extrascolaire ce résultat (ou tout autre similaire) sont totalement infinitésimales. Par contre, chacun de nous peut, en se référant à sa vie extra-mathématique, s'apercevoir qu'il a constamment intérêt à se poser les questions : Ici, quelles sont les variables pertinentes ? Qu'est-ce qui a réellement de l'importance? Qu'est-ce qui peut tout faire changer suivant que …?

(C'est, par exemple, la question que nous nous posons en permanence dans cette recherche : "quelles sont les variables pertinentes dans l'apprentissage des mathématiques?", question qui nous pousse à mettre en lumière les variables "être auteur", "émettre et résoudre des conjectures", qui sont très souvent des variables cachées de l'apprentissage, donc des variables peu exploitées dans un cours de mathématiques !).

Dans une situation de vie courante il y a presque toujours des variables, mais souvent les plus apparentes ne sont pas pertinentes, alors que celles qui le sont, sont bien cachées. Nous constatons après coup que là où nous nous trompons le plus et le plus douloureusement, c'est bien souvent lorsque, ayant à prendre une décision, nous sommes incapables de pressentir à temps si nous sommes dans une situation totalement bloquée ou non.

Et ce qui nous empêche le plus d'avoir une analyse pertinente de la situation, c'est notre tendance naturelle, notre paresse intellectuelle, notre horreur de l'incertitude qui nous poussent à nous précipiter sur la première formule magique (sur le premier conseil bienveillant) censé nous donner la solution.

Pour aller un peu plus loin prenons un deuxième exemple un peu différent.

Problème de moyenne ou de cycliste :

Supposons que vous ayez effectué un déplacement en veillant à garder une vitesse constante V_1 sur la première partie du parcours et une vitesse constante V_2 sur la deuxième partie.

Pour vérifier si votre compteur de vitesse marche bien, laquelle des deux formules suivantes I) ou II) devez-vous utiliser pour calculer la vitesse moyenne globale V à partir de ces vitesses moyennes partielles V_1 et V_2 ?

I) la moyenne arithmétique : $V = (V_1 + V_2)/2$

II) la moyenne harmonique : $2/V = (1/V_1 + 1/V_2)$.

Si vous avez un peu de patience et que vous ne connaissez pas déjà la "bonne réponse", cherchez à le résoudre tout de suite, en observant du coin de l'œil votre propre démarche.

A priori chacun se précipite sur la moyenne arithmétique (c'est le bon sens!); mais avec un peu d'habitude mathématique on se méfie un peu de ce "bon sens"!

L'intériorisation de la recherche de contre-exemple permet alors de se persuader assez vite que ça ne marche pas !

"C'est donc à ça que sert cette moyenne harmonique !" se dit-on ; "pourquoi donc ne me l'a-t-on pas dit plus tôt ?"

En bon élève (de mathématiques) on essaye alors de se persuader que II) convient!

A moins de se tromper dans ses calculs, on peste de plus en plus fort contre sa maladresse à ne pas arriver à éliminer les paramètres temps et distance qui font obstacle à l'établissement d'une formule ne faisant intervenir que les vitesses.

Pour sortir de cette impasse sans abandonner lâchement, il nous faut alors faire un énorme effort d'indépendance mathématicienne pour se dégager du joug de l'injonction "trouvez la bonne formule!" que l'on interprète naturellement comme "ici il y a une vérité et elle est à prendre dans ce qu'on m'a dit de regarder!"

Ce que nous apporte alors l'intériorisation des mathématiques, c'est de se dire "arrêtons de triturer ces formules que nous ne comprenons pas pour leur faire cracher ce qu'on nous demande et cherchons à comprendre la situation réelle".

L'intériorisation du concept d'intégrale peut alors nous aider à voir "dans une illumination" qu'il ne peut y avoir aucune formule universelle liant vitesse moyenne globale à des vitesses moyennes partielles sans faire intervenir la durée ou les distances parcourues.

En effet, de la même façon qu'une vitesse instantanée (grande ou petite) n'a d'incidence sur la moyenne que si elle dure, de même (mais de façon plus sournoise car c'est de vitesses moyennes partielles dont nous parlons, donc de grandeurs qui incorporent déjà l'idée d'une certaine durée) une vitesse moyenne partielle n'a d'influence sur la vitesse moyenne globale qu'en fonction de la durée sur laquelle elle est considérée.

Ce n'est donc qu'une fois connues les durées T_1 et T_2 sur lesquelles sont données V_1 et V_2 que l'on pourra connaître V !

L'intégrale $V = 1/T . \int V(t)dt$ qui intervient ici est simpliste au niveau des calculs puisqu'on a $\int V(t)\, dt = V_1.T_1 + V_2.T_2$, mais au niveau du concept c'est son intériorisation profonde qui peut le plus sûrement nous aider à bien penser cette situation.

On voit bien sur ce dernier exemple que ce qui "nous pousse le plus au crime", c'est tout ce qui en nous relève d'un savoir externe - " il y a des formules, utilisons-les!"- et que ce qui peut nous sauver du désastre et nous éviter soit de dire un énorme bêtise, soit d'abandonner en se lamentant de ne pas être capable de retrouver un résultat simple, c'est la façon dont nous avons intériorisé la philosophie qui se construit à travers l'étude des formalismes et concepts mathématiques que nous avons dû mettre en œuvre ici.

Rapport entre savoir externe / interne et "faire véritablement des mathématiques"

Partant du principe que l'essentiel de nos enseignements de mathématiques s'adresse à tous, i.e. à quelques futurs scientifiques purs et durs bien sûr, mais aussi et surtout à une grande majorité de futurs non spécialistes qui ne feront aucun usage professionnel de nos mathématiques pointues, il nous apparaît alors qu'en dehors des quelques résultats et techniques de base qu'ils auront l'occasion d'utiliser assez régulièrement par la suite, ce qu'aura apporté à ces élèves devenus citoyens le fait d'avoir appris pendant des années les mathématiques à l'école, c'est essentiellement ce qui aura donné lieu à une intériorisation forte, intériorisation dans laquelle ce que l'on apprend une année n'est pas oublié, ou chassé par ce qu'on fait l'année suivante, mais au contraire réactualisé car remis en question, approfondi, affiné par ce qu'on étudie de nouveau.

Nous faisons le pari que le professeur qui est intimement persuadé de cela (qui est obsédé par l'idée que ce qui compte dans les mathématiques qu'il enseigne, c'est ce que l'élève peut intérioriser) peut **puiser dans cette façon de considérer le savoir vis-à-vis de ses interlocuteurs, les forces indispensables pour desserrer l'étau des contraintes** *qui lui interdisent de laisser ses élèves faire véritablement des mathématiques en cours de mathématiques ;* si, par contre, il perd de vue cet objectif d'intériorisation (que tout professeur a spontanément comme ambition en début de carrière mais qui s'estompe peu à peu devant la répétition des échecs), s'il ne le considère plus comme premier (même s'il a souvent des tâches préalables ou d'une certaine façon plus prioritaires momentanément), s'il n'est pas persuadé que ce qu'on apprend en mathématiques sans intériorisation est si vite obsolète que l'action d'apprendre ainsi devient dérisoire, il lui devient de fait impossible de "laisser faire des mathématiques à ses élèves en cours de mathématiques" tant les contraintes secondaires prennent le dessus et rendent du coup l'entreprise "faire véritablement des mathématiques" totalement utopique.

III . *Pour nous, que signifie "faire véritablement des mathématiques en cours de mathématiques" ?*

<u>Pari raisonné</u> : nous partons du principe qu'il est possible de "faire faire véritablement des mathématiques" à nos élèves ou à nos étudiants en cours de mathématiques, mais nous pensons que pour ne pas se laisser impressionner par les apparences *(pour ne pas croire prématurément qu'ils comprennent tout/rien, qu'ils font ou au contraire ne font pas des mathématiques)* ***il nous faut, au préalable, accepter de reconnaître qu'il s'agit là d'une entreprise très paradoxale.***

En effet, contrairement à l'ambition affichée de tout enseignement de mathématiques, il apparaît sur les observations que nous avons effectuées que les moments où un élève de l'école, du collège ou du lycée, ou un étudiant de l'université fait véritablement des mathématiques en cours de mathématiques sont assez rares, voire pratiquement inexistants dans certains enseignements, et que dans d'autres, quand ils se produisent, ils ne sont pas nécessairement perçus comme tels par l'enseignant, ou par un observateur trop attaché à un certain académisme.

Pourquoi un tel malentendu ?

Parce que d'un côté, on peut estimer que pour pouvoir faire des mathématiques il faut que puisse s'installer le couple questionnement/propositions, il faut donc pouvoir donner une place aux essais et tâtonnements, il faut s'autoriser les "mal dit", les erreurs, les rapprochements et

les retours en arrière indispensables à la maturation des concepts et à la transformation de la pensée. D'autre part, on attend aussi de celui qui fait des mathématiques qu'il dise des choses exactes, les présente dans une certaine logique et avec un vocabulaire et une symbolique adaptés.
Or nous sommes dans une école où il existe de longue date une coutume didactique qui tenaille insidieusement les acteurs maître et élèves pour leur rappeler sans cesse que dans un cours "tout doit avancer" et si possible" linéairement !"

Si l'on doit respecter absolument cette coutume, le projet "faire véritablement des mathématiques en cours de mathématiques" devient irréaliste car
- d'un côté le processus "créer du doute pour donner de l'importance à ce qui va peu à peu émerger comme certain" ne peut se gérer dans une avance linéaire (il y a des moments de stagnation, de régression, des ruptures, puis une avancée brusque, et pas forcément au même moment pour tous),
- d'autre part, la conduite paradoxale de la recherche "laisser de l'initiative aux élèves tout en les guidant vers un but précis" ne peut que devenir une supercherie, puisque pour ne pas "perdre de temps" le professeur ne pourra pas laisser émerger les erreurs et les fausses pistes constitutives d'une grande part du sens de ce qui devrait in fine apparaître à tous comme la ou les "bonnes" solutions.

En pratique donc, ces solutions canoniques, qu'on veut toujours faire apparaître très vite dans l'enseignement des sciences car elles nous paraissent constitutives de notre discipline, ne peuvent être acceptées en compréhension par l'élève (ne peuvent être acceptées comme des objets constitutifs des mathématiques par l'élève) que si elles lui apparaissent comme un moyen d'éviter les pièges des "mauvaises solutions", comme un procédé efficace pour surmonter les blocages et contradictions des solutions trop frustres ou trop naïves qu'il avait proposées initialement.
Dans un deuxième temps, mais dans un deuxième temps seulement, ces solutions élégantes pourront apparaître à l'apprenant comme très bonnes et à imiter parce que, ce qu'elles proposent, elles le font dans une économie de pensée, dans un raccourci d'écriture, dans des façons d'offrir un contrôle sur la vérité et sur la pertinence remarquables.
Faire des math c'est, reconnaissons-le, in fine, mais toujours in fine seulement, une façon de faire intervenir l'évidence qui soit de l'ordre de l'esthétique, c'est faire en sorte que chacun puisse à un moment s'émerveiller en trouvant que c'est beau tant c'est simple et lumineusement vrai!

Le passage de la période de recherche et de tâtonnements à un début de théorisation

Si nous revenons donc à la première partie du travail de l'élève, essentielle pour faire des mathématiques (s'approprier le problème, voir de quoi il retourne en faisant des essais, en effectuant des conjectures, en proposant des solutions, etc.), nous constatons que dans le système de contrainte traditionnel de l'école, du lycée ou de l'université, le professeur qui met en place des situations ayant pour but essentiel de provoquer un questionnement, un changement de point de vue, de créer le besoin de quelque chose qu'on ne connaît pas encore, ne peut en vertu du contrat didactique implicite conclure la séance par la seule reconnaissance d'un point d'interrogation, il se doit d'institutionnaliser un savoir estampillé par tous comme tel.
Pressé par le "temps perdu à débattre et à questionner", soucieux de couvrir le programme, attendu comme maître par la classe, surveillé par les parents, les collègues et l'administration, torturé par… sa propre bonne conscience, ce professeur a alors tendance à institutionnaliser un savoir immédiatement présenté sous une forme achevée.

S'il cède à cette pression, on constate que la plupart des élèves décrochent, i.e. abandonnent la responsabilité scientifique qu'ils avaient prise au cours de leur recherche. Comme ça va trop vite et que ça na pas l'air de tenir compte de leurs propositions, ils ne reconnaissent plus (ils ne cherchent plus à reconnaître) dans ce que le professeur institutionnalise en termes mathématiques une forme de réponse aux questions scientifiques que la situation leur avait permis de se poser, ils n'y voient pas une mise en forme très éclairante et rassurante de leurs propres raisonnements. Ils passent brutalement du savoir interne au savoir externe, ils passent de l'état de "voilà ce que je pense, ce que je comprends, ce que je propose !" à "voilà ce qu'il faut dire, voilà ce que le professeur attendra de nous dans une prochaine rédaction!"
Ils cessent de s'intéresser scientifiquement à la question car ils ont l'impression qu'on leur a "volé leur problème !"

Une analyse pessimiste et en partie erronée du fonctionnement des mathématiques chez l'élève/l'étudiant qui ne pousse pas le système d'enseignement à se remettre en question

Il nous semble que si nous ne nous donnons pas des moyens pour voir et soutenir ce qui se passe de profond quand l'élève est en position d'auteur, nous pouvons, même dans les cas les plus favorables, avoir le sentiment que la grande majorité des élèves ou des étudiants qui nous sont confiés dans nos classes et nos amphis, ne sont pas capables (au moins dans les conditions actuelles de l'école) de faire véritablement des mathématiques en cours de mathématiques.
C'est en tout cas l'image qui ressort du fonctionnement dominant de l'école, car dans la plupart des classes des collèges et du lycée que nous avons pu observer, on constate que l'essentiel du cours de mathématiques consiste à faire et à corriger des exercices d'applications qui ne laissent que très peu d'initiative mathématique à l'élève. De même, à l'université, on observe qu'en cours les étudiants copient le plus souvent, et qu'en TD ils font et corrigent des exercices d'applications qui sont soit trop difficiles pour la majorité (qui se contentent alors de recopier une solution qu'ils ne peuvent intérioriser car ils ne sont pas arrivés à amorcer eux-mêmes une ébauche de résolution), soit plus accessibles mais qui ne leur offrent alors pratiquement pas d'occasions de prendre la moindre initiative mathématique !

Ces pratiques qui correspondent à une adaptation à ce qui semble réaliste de proposer aujourd'hui reposent - nous le pensons - en grande partie sur deux visions erronées, l'une des mathématiques et l'autre des capacités d'abstraction de nos élèves ou étudiants.

La vision erronée des mathématiques consiste à penser que lorsqu'on cherche et tâtonne, on ne fait pas encore véritablement des mathématiques car ce qu'on fait "n'est pas encore assez rigoureux!" ; il faut donc s'empresser de rectifier, de corriger, de remplacer ces tâtonnements par "quelque chose de mathématiquement correct" !

La vision erronée sur les capacités d'abstraction de nos élèves/étudiants consiste à penser que conceptuellement la plupart d'entre eux ne peuvent accéder réellement à la théorie et qu'on ne peut par suite éviter le décrochage et la rupture qui se produisent classiquement lorsque, après une période d'expérimentation/essais des élèves sur des cas particuliers, le professeur prend les choses en main pour faire cours. On pense qu'il est bien normal que la plupart des élèves n'arrivent pas à faire de lien étroit entre les idées et propositions de leur recherche initiale et ce que le professeur énonce maintenant sous une forme canoniquement mathématique.
Faire essentiellement des exercices d'applications est alors le palliatif à cet échec (supposé inévitable) de la transmission d'un rapport satisfaisant entre théorie mathématique et idées personnelles.

Cela permet de faire manipuler la théorie par les élèves/étudiants sans qu'ils aient pour cela besoin de la questionner explicitement, sans qu'ils aient à se poser la question du rapport de coopération/conflit entre d'un côté leurs idées et leurs actions propres quand ils pensent par eux-mêmes les situations, et de l'autre côté, les notations et techniques sophistiquées du professeur qui, elles, semblent faites pour "rouler toutes seules" (c'est bien ce qui se produit : la théorie marche sans heurts quand on la fait fonctionner sur les exos-types).

Ce dysfonctionnement dominant nous apparaît comme la conséquence pratique d'un préjugé péjoratif très répandu : "comprendre la théorie, cela n'intéresse pas (ou plus) les élèves d'aujourd'hui, c'est trop abstrait pour eux, d’ailleurs cela ne leur servirait pas à grand chose !"

C'est donc pour ne pas se laisser enfermer dans cette vision très réductrice des mathématiques, et de la capacité et du désir profond de nos élèves/étudiants pour en faire réellement, que nous croyons indispensables d'approfondir les questions cruciales suivantes, questions repoussées par beaucoup de collègues car jugées par eux comme à la fois trop personnelles et trop générales.

Qu'est-ce que faire des mathématiques ? Quels sont les indices de scientificité dans une activité d'apparence mathématique? Quelles activités sont proprement mathématiques ? Quelles sont celles qui ne le sont pas ?

Il est clair que si l'on ne doit pas céder à la démagogie de mettre systématiquement dans la catégorie "faire des mathématiques" toute activité faite en classe de mathématiques, on ne doit pas non plus - nous le pensons – "s'autoriser à penser" et a fortiori à déclarer "ceci n'est pas mathématique!" ou bien "cela n'est pas faire des mathématiques!" sans s'obliger à définir les critères objectifs qui nous poussent à porter ce type de jugement, sans donner les raisons qui nous permettraient d'expliquer à un élève pourquoi on lui dit cela.

En effet, si (comme on l'observe souvent dans les classes) nous tendons trop rapidement à exclure des mathématiques les propositions, les actions, les débats des élèves qui ne rentrent pas dans le cadre strict de ce que nous acceptons sans aucune réticence comme un exposé ou un écrit mathématique ou comme la construction scientifique d'un modèle mathématique, en clair, si nous écartons tout ce qui nous chagrine à entendre, à lire et a fortiori à écrire au tableau, nous risquons fort de ne prendre en compte que la partie émergée de l'iceberg mathématique de l'élève (nous n'acceptons que ce qu'il fait quand il applique sans trop se tromper les recettes et techniques bien éprouvées que nous lui avons enseignées). Par suite nous prenons le risque de lui envoyer involontairement le mauvais message "vous ne faites pas de "vraies" mathématiques!" au moment précis où en pratique il en fait "le plus authentiquement" !

Pour dépasser ce paradoxe, on a peut-être intérêt à distinguer deux parties constitutives des mathématiques : les mathématiques en train de se faire, en état de construction, et les mathématiques achevées.

Dans la communauté de recherche, il est évident que ces deux étapes font partie des mathématiques et que l'étape "mathématiques en construction" dans laquelle ce que l'on travaille est partiel, en partie faux, en partie incohérent, représente néanmoins l'essentiel de la vie mathématique, car sans cette partie erratique le chercheur ne produirait rien. Cela n'empêche pas la communauté de recherche dans son fonctionnement officiel (les séminaires, les colloques et publications) de tout faire pour oublier, cacher, faire disparaître cet énorme travail erratique afin de ne donner à voir que la partie achevée. (Cette pratique est en partie fonctionnelle - c'est plus simple, "plus clair" et plus rapide - et en partie désastreuse au niveau du partage du sens et des problématiques, notamment avec les non spécialistes de ce qui est exposé. C'est souvent ce qui se passe dans les séminaires où, au delà des apparences, seuls deux ou trois collègues comprennent véritablement ce que l'orateur expose rigoureusement en ne montrant que ce qui marche, alors qu'un autre mode d'exposition faisant davantage ressortir les problèmes rencontrés aurait probablement permis de faire partager à la majorité des participants les grandes idées qui sont cachées derrières des techniques exposées magistralement de façon exhaustive et en toute rigueur, l'ensemble étant très difficilement compréhensible autrement que dans le mot à mot).

Dans l'enseignement, la situation est moins favorable encore, car d'un côté le professeur est (excepté lorsqu'il réfléchit en préparant un enseignement très nouveau pour lui) un peu toujours en train de travailler sur des mathématiques totalement achevées depuis bien longtemps (et qu'en plus il "rabâche" souvent depuis des années), et d'un autre côté il joue lui-même par rapport au savoir un rôle officiel puisqu'il note, classe, exige de ses élèves de pouvoir reproduire ce qu'il leur enseigne.
Il lui est par suite beaucoup plus difficile encore de reconnaître comme mathématique, comme essentiellement mathématique, la partie erratique et maladroite des mathématiques en construction qui va automatiquement réapparaître dans le travail de ses élèves s'il leur donne l'occasion d'être auteurs d'énoncés mathématiques.

D'un côté donc, contrairement à ce qui se passe dans la communauté de recherche, ce qu'on enseigne est par essence déjà totalement construit, et ce que l'élève va proposer dans le désordre - et de façon en partie erronée quand il lui est donné l'occasion de penser par lui-même - ne peut apparaître au professeur comme nécessaire pour obtenir des résultats qu'il connaît déjà sous des formes le plus souvent - mais pas toujours - infiniment plus simples et élégantes ; d'autre part, comme in fine ce qui sera exigé par l'institution c'est que l'élève montre qu'il connaît les mathématiques achevées, tout ce qui n'est qu'en construction apparaît alors au professeur, en terme d'évaluation, plutôt comme une maladresse qu'on peut supporter au début d'un chapitre, mais qu'on doit faire disparaître le plus rapidement possible, une erreur qu'il faut corriger, un manque qu'on doit s'empresser de combler par un enseignement ad hoc!

En un sens, tout professeur qui veut que ses élèves progressent sait que cette partie erratique est indispensable, il l'autorise donc, la suscite, l'organise (même à l'université où les TD ont en principe cette fonction), mais il la voit plus comme une nécessité d'apprenant que comme une activité proprement mathématique, **il ne la pense pas comme constitutive des mathématiques,** c'est pour lui un préalable, un mal nécessaire! Bref, pour lui ce n'est pas encore vraiment des mathématiques et cette impression péjorante peut avoir des effets énormes sur les décisions qu'il va prendre inconsciemment dans l'action de la classe et sur les jugements parfois très violents ("ça ne veut rien dire!", "ça n'a rien à voir!") qui lui échappent lorsqu'il réagit instinctivement aux propositions trop erratiques de ses élèves.

Donner un statut officiel à ce qu'on ne peut faire évoluer sans le nommer

Ainsi, pour ne pas être conduit à péjorer l'activité de ses élèves aux moments où elle est peut-être la plus féconde, pour ne pas être condamné (par les impératifs du contrat didactique) à provoquer une cassure entre les moments où il est donné aux élèves la possibilité de penser par eux-mêmes et ceux où le professeur apporte des éléments théoriques qui devraient les aider à mieux traiter les questions abordées naïvement (le moment où il fait cours, où il doit faire cours!), il nous semble que, puisque le contrat didactique nous fait obligation d'institutionnaliser un savoir à partir de tout travail de la classe, **il nous faut pouvoir identifier quels savoirs scientifiques sont essentiels pour le professionnel et accepter, pour pouvoir les transmettre à nos élèves, qu'ils soient nommés en classe, écrits au**

tableau, bien qu'une partie d'entre eux ne puissent pas toujours s'énoncer, s'écrire, se discuter dans un langage et dans une forme canonique reconnus dans les mathématiques stricto sensu.
Il en est ainsi, pensons-nous, de tous les savoirs méta : "qu'est-ce que je viens de découvrir que je n'avais pas perçu, compris ? quelles sont les intentions, la philosophie, les implicites qui font que cette théorie, cette procédure est praticable ?"
Nous savons bien que pour pouvoir "pratiquer une théorie" il faut en connaître les présupposés, les codes, les conventions, les règles, mais il faut aussi savoir ce qu'on peut sous certaines conditions transgresser, il faut être conscient qu'on peut et doit faire des abus de langage, de notation, non pas naïvement, mais en étant conscient qu'en faisant ces transgressions et ces abus, on n'est plus "protégé" automatiquement.

En d'autres termes, s'il est assez clair que notre mission d'enseignant nous fait obligation de faire passer dans notre temps d'enseignement la mathématique erratique et en construction du début des apprentissages vers une mathématique plus achevée, proche du cours, il faut se donner les moyens pour que cette évolution ne provoque pas de rupture irréversible!

Toutes les expérimentations de débat scientifique en cours de mathématiques tendent à montrer que pour éviter les ruptures, les pertes de sens et l'abandon de l'intérêt scientifique de beaucoup d'élèves, il faut institutionnaliser au fur et à mesure les éléments pertinents de ces mathématiques en construction qui apparaissent dans les propositions maladroites des élèves, il faut arriver à **donner un statut mathématique provisoire** à ces mathématiques non achevées afin que le groupe des élèves se sentant légitimé à les utiliser puisse les faire évoluer (puisse les remettre en question quand dans l'action elles se révèlent trop lourdes, partiellement fausses ou incomplètes).
C'est ainsi, nous le constatons, que beaucoup plus d'élèves ou d'étudiants progressent sans rupture irréversible vers ces mathématiques plus achevées qu'on aimerait bien leur enseigner tout de suite, mais qui s'autodétruisent au niveau du sens dès qu'elles arrivent prématurément.

Ce qui pose problème pour nous, professeurs de mathématiques, c'est que ces savoirs partiels, en construction, méta, qui ne peuvent le plus souvent s'écrire totalement dans un langage mathématique, sont contestables (et à contester dès qu'ils posent problème), qu'ils sont (puisque difficiles à transcrire dans un langage univoque) sujets à beaucoup de malentendus, de contresens : on en dit trop et trop peu et de façon trop vague, l'élève peut alors de bonne foi nous faire dire ce qu'on n'a jamais pensé ; et si on discute de tout cela un peu rapidement avec les collègues, ils risquent de ne pas être d'accord du tout et de trouver que notre interprétation est abusive, dangereuse, que ce n'est pas des maths! Ou que les maths ce n'est pas exactement çà! Ou pas du tout ça ! Et le dialogue devient alors difficile à poursuivre!

Vers l'élaboration d'un modèle

En définitive, puisqu'il s'agit en un certain sens (cette recherche nous a aidés à en prendre conscience) de susciter un travail d'ordre "psychique", pour ne pas dire psychanalytique, permettant à chacun de nous de faire monter en surface ce qui lui est essentiel quand il fait des mathématiques ou qu'il essaye d'en faire faire à d'autres, nous avons tenté de mettre à jour ce qui, d'une certaine façon, nous apparaît aujourd'hui comme essentiel dans l'acte de faire véritablement des mathématiques.

Même si ce que nous avançons est fondé sur notre participation à la communauté de recherche et sur nos expériences d'enseignement à divers niveaux, nous ne prétendons pas avoir plus raison que d'autres en affirmant ceci ou cela, nous espérons seulement que cet acte de dévoilement pourra aider chacun, par effet d'accord et de désaccord, à mieux percevoir ce qui le fait agir, aimer ou détester telle ou telle façon de faire des mathématiques chez un collègue, chez ses élèves ou quand il les pratique pour lui-même. Cela lui donnera peut-être la possibilité d'ouvrir plus largement la porte à ceux, différents de lui, qu'il convie à faire véritablement des mathématiques en cours de mathématiques.

La difficulté de dire ce que signifie "faire véritablement des mathématiques en cours de mathématiques ?"

Si vous rassemblez dix mathématiciens et que vous ne les placez pas en situation de rivalité, vous avez beaucoup de chances pour que, dans l'action, ils soient très souvent d'accord pour juger qu'ici on fait véritablement des mathématiques et que là on n'en fait pas, que telle personne comprend les mathématiques et que telle autre n'y comprend rien ; par contre, si vous leur demandez de dire ce que sont les mathématiques et ce que c'est que d'en faire, vous n'avez pratiquement aucune chance qu'ils puissent écrire un texte commun, car à chaque fois que l'un s'aventurera à définir le propre de son activité, il se fera reprendre par les autres qui lui diront que ce n'est pas que cela, que c'est réducteur ou que ça passe à côté de l'essentiel etc. etc., laissant entendre par là que les mathématiques sont un art et les mathématiciens des artistes bien trop fins et complexes pour se laisser définir avec des phrases ou se laisser saisir avec des mots.
Le problème c'est que cet art est enseigné à tous, alors que tous ceux qui doivent ainsi les apprendre et en tirer profit ne sont pas nés artistes mathématiciens ni obligés de le devenir.

Puisque ici l'objet de la recherche est de se donner des outils pour repérer "quand est-ce que l'élève fait véritablement des mathématiques en cours de mathématiques", nous ne pouvons participer à cette façon de "botter en touche" en déclarant que ça n'a pas de sens de vouloir définir ce qu'est "faire véritablement des mathématiques", car cela reviendrait en quelque sorte au niveau de l'enseignement à dire qu'il faut se résigner à "laisser faire la nature" : apparemment certains professeurs de mathématiques comprennent les maths et les enseignent véritablement, d'autres très peu ou pas du tout, certains élèves apprennent, comprennent et font véritablement des mathématiques, d'autres très peu ou pas du tout, mais tout cela n'étant pas quantifiable de façon objective (pour ne pas dire tout cela étant question d'opinion très subjective), les recherches sur l'enseignement des mathématiques se contentent de dire, par souci de rigueur scientifique (par souci d'objectivité), que les élèves font bien des mathématiques en cours de mathématiques, mais pas forcément les mêmes !

Nous allons donc d'abord essayer de cerner ce qui, pour nous, semble caractériser le plus les activités d'un élève ou d'une classe lorsqu'ils font à notre sens véritablement des mathématiques, en les distinguant d'activités qui, sans être totalement étrangères, nous en paraissent assez éloignées, voire de certaines qui, malgré les apparences, nous semblent être en opposition forte avec l'esprit d'une démarche mathématique.

Les limites du modèle

Ce faisant, nous sommes nécessairement, par effet de modélisation, réducteurs, caricaturaux, non exhaustifs (ce qui permettra à n'importe quel matheux de s'exclamer de plus ou moins bonne foi : "les mathématiques, ce n'est pas du tout ça !"). L'important pour nous n'est pas de réaliser le consensus le plus large possible (car il serait inévitablement totalement mou), mais de construire un modèle assez simple qui prenne en compte les aspects qui nous paraissent les plus fondamentaux de l'activité mathématique vue comme une culture de base que l'école se doit de faire partager à tout futur citoyen dans l'espoir de favoriser le partage des valeurs humanistes et démocratiques (volonté de comprendre les raisons, développement de l'esprit critique, de l'honnêteté intellectuelle, respect de soi et de l'autre, recherche des vérités communes, des points d'accord et des causes de divergence, etc.) dont cette discipline est (avec d'autres, mais différemment) naturellement porteuse.

Ce modèle est donc par essence subjectif, mais c'est un modèle dans la mesure où il tente d'expliciter les présupposés sur lesquels il fonde ses a priori!

Dans la construction de ce modèle nous nous intéressons à tout ce qui peut provoquer de façon assez systématique une attitude scientifique chez l'élève/l'étudiant (ou au contraire y faire obstacle).
Nous ne nions pas que tel ou tel élève peut de façon conjoncturelle "faire véritablement des mathématiques" alors que d'après notre modèle, tout l'incitait à faire autre chose et vice versa, mais si cela reste marginal, nous estimons raisonnable que cela ne remette pas en cause notre modèle (en didactique, comme dans presque toute discipline non mathématique stricto sensu, la notion de contre-exemple isolé n'étant pas significative ne doit pas intervenir dans l'effort de théorisation).

L'utilité première d'un tel modèle pour le formateur, l'inspecteur ou le professeur, est de l'inviter à expliciter ses conceptions personnelles (à son avis ce modèle met trop en avant tel aspect, ne donne pas assez d'importance à tel autre ou est très utopique car il souligne des points jugés importants par tous, mais qui sont systématiquement oubliés dans l'enseignement).
Cette critique, si elle s'exerce de bonne foi, peut alors lui permettre de se construire un modèle personnel, le pousser à se définir des points de repère l'aidant à concevoir, à observer, à analyser une situation d'enseignement, à déterminer si tel ou tel scénario scolaire ou universitaire tend ou non à remplir la fonction de faire partager au plus grand nombre possible d'élèves ou d'étudiants l'éclairage spécifique que les mathématiques peuvent apporter.

Présentation de notre modèle "faire véritablement des mathématiques"

Du point de vue de l'attitude globale, posons qu'adopter une posture mathématique c'est - à l'instar de nombreuses autres démarches - accepter de se poser des questions et oser vouloir résoudre des problèmes, mais de le faire (spécificité des mathématiques) en choisissant de se décaler par rapport aux pratiques courantes de la façon suivante :

- quand on observe la répétition d'un fait, on cherche à étendre son degré de généralité,

- quand une situation remarquable arrive fortuitement, on cherche à voir si elle ne répondrait pas à une nécessité,

- à l'inverse si un fait remarquable semble ne jamais se produire, on cherche à le provoquer et à défaut à montrer qu'il ne se produira jamais.

- Penser un problème en mathématicien, c'est surtout croire qu'en cherchant à mieux comprendre les raisons de ce qui se produit, on peut bien souvent éclairer une situation complexe et la simplifier au point de la rendre évidente, c'est croire qu'en généralisant le particulier, en plaçant le concret dans un cadre abstrait, on peut parfois énormément éclairer, comprendre, simplifier ce trop particulier, ce trop concret qui dans leur simplicité apparente ne montrent pas toujours convenablement les mécanismes qui font que les choses sont comme on les constate, c'est donc accepter que ce qui se voit le mieux n'est pas forcément le plus pertinent et que ce qui paraît sans ambiguïté et évident à première vue peut en réalité cacher bien des surprises (d'où le travail de définition et d'axiomatisation que le mathématicien considère comme nécessaire pour lutter contre ce qui lui semble trop naïvement évident).

Faire véritablement des mathématiques, c'est donc accepter de se lancer délibérément dans une aventure scientifique où s'entrelacent en permanence concepts et techniques, concret et abstrait, particulier et général, langage personnel et représentations informelles à vocation privée, langage codifié et représentations canoniques à vocation universelle, recours à un imaginaire débridé n'hésitant pas à envisager des situations "invraisemblables" et respect d'une logique rigoureuse au niveau des conclusions finales.

Dans cette démarche, l'entrelacement est fondamental car chaque aspect n'est réellement fécond que s'il s'appuie sur l'autre, l'un créant l'autre et, dans l'apprentissage, chacun réclamant paradoxalement pour prendre sens que l'autre soit déjà là (difficulté majeure de l'enseignement de toute science, mais encore plus forte en mathématiques où aucune réalité concrète n'est donnée a priori pour créer de prime abord la trame naturelle du sens).

Outre le fait de toujours chercher à percevoir ce qu'il y a de général ou de généralisable derrière une situation particulière, ce qui d'une certaine façon caractérise l'aspect proprement mathématique d'une démarche scientifique c'est de partir du principe que la plupart des questions qu'on se pose naturellement (hors de l'école) en attendant une réponse de type "vrai/faux" ou "mieux/moins bien", ne sont pas d'emblée mathématiques (elles sont en général formulées de façon beaucoup trop vague et ambiguë pour admettre une réponse certaine de type vrai/faux, oui/non, supérieur, égal ou inférieur, etc.).

Le décalage du mathématicien

Partant de cette prise de conscience qui va d'une certaine façon "contre le bon sens", faire des mathématiques c'est donc accepter de se décaler par rapport aux pratiques quotidiennes en se donnant pour objectif de transformer un questionnement qui intuitivement a du sens, mais qui, à bien y regarder, n'admet pas le plus souvent de réponse certaine, en un autre questionnement qui tout en essayant de garder une part importante du sens initial accepte néanmoins d'en perdre aussi (la réduction des possibles par l'acte de définition) pour pouvoir arriver à formuler un problème plus modeste, mais dont la solution sera beaucoup plus fiable.

En quelque sorte, accepter de faire véritablement des mathématiques c'est savoir qu'en fin de partie on ne se satisfera pas d'une modélisation du questionnement initial qui n'aurait comme conclusion que des réponses du type "oui et non !", "plus ou moins!", "un peu plus que moins mais je ne peux rien vous garantir!". (Les proba-stat., que certains voudraient exclure des mathématiques puisqu'en raison du hasard rien n'y est certain dans les termes où sont initialement posées les questions, rentrent au contraire parfaitement dans cette problématique puisque ce sont des façons de se représenter un réel insaisissable en termes vrai/faux par un modèle sur lequel cette dichotomie fonctionne.)

Par exemple, adopter une attitude mathématique de cette nature c'est se dire qu'il doit y avoir un moyen de comprendre pourquoi quand on lance un caillou de taille inférieure à la maille d'un grillage, il rebondit sur ce grillage beaucoup plus souvent qu'on ne pourrait s'y attendre ! En effet, dans le cas où le diamètre du caillou est environ la moitié de la largeur de la maille du grillage, un certain "bon sens" nous pousse à prévoir qu'il va facilement traverser le grillage puisqu'il a largement la place de passer au travers d'une maille sans toucher les bords, alors qu'une façon probabiliste de penser ce problème nous pousse à penser très différemment : pour que le caillou (supposé sphérique) ne touche pas le fil de la maille (supposée carrée), il faut que le centre du caillou s'écarte du bord de la maille d'au moins le rayon du caillou. Les cas favorables sont donc ceux qui correspondent à un carré central de côté moitié de celui de la maille, et donc d'aire égale au quart de celle de la maille. La probabilité d'être dans ce carré central, et donc la chance de ne pas heurter le grillage est donc de un sur quatre, ce qui explique de façon lumineuse ce que l'expérience ne fait que nous montrer de façon surprenante!

Il y a donc dans l'acte de faire véritablement des mathématiques une sorte de défi intellectuel du sujet qui s'oblige à prendre position de façon non ambiguë, qui s'interdit la facilité du "peut-être bien que oui, peut-être bien que non!" ou du "inutile de se casser la tête puisqu'on ne peut rien dire!"
Dans cet engagement sur la vérité, il y a simultanément une recherche de vérité et d'explication de cette vérité; quand on fait des mathématiques véritablement, on cherche à préciser de quoi on parle, à voir ce qui marche et ce qui ne marche pas, mais aussi et surtout pourquoi ça marche ou ne marche pas! On espère découvrir la raison des choses, le pourquoi ça marche véritablement; et on gagne toujours un peu à ce jeu mais pas toujours complètement. Par exemple, Pythagore confirme notre intuition que la perpendiculaire réalise le plus court chemin et que "plus on s'écarte du pied de la perpendiculaire plus on s'éloigne", toutes les démonstrations de Pythagore plus élégantes ou astucieuses les unes que les autres nous persuadent de l'égalité du carré de l'hypoténuse à la somme des carrés des autres côtés, mais en connaissons-nous une qui rende évident à notre entendement qu'il faut prendre le carré et non autre chose !

Le travail sur les modes de pensée

Enfin, dans une démarche proprement mathématique, même d'apparence très technique (calculer une valeur ou apporter une réponse de type oui/non à une question précise), on se donne aussi la charge de trouver (pas forcément tout de suite mais à terme) quelque chose qui n'est pas seulement ce résultat brut et les raisons de ce résultat, *mais aussi les raisons de la méthode qui nous a conduits au résultat,* car on sait que bien souvent ce que l'on gardera d'essentiel de ce travail proprement mathématique, ce sera moins le résultat (peu signifiant en dehors d'un problème précis) que la façon dont on a débusqué ce qui poussait à "mal penser" la situation, le détour qu'il a fallu imaginer pour dépasser ce qui empêchait de comprendre.

L'intériorisation de la philosophie d'une démarche mathématique est à notre avis ce qui, au niveau de la culture, peut par la suite nous aider à construire d'autres démarches, à aborder plus rationnellement d'autres situations. C'est précisément pour que cette intériorisation de la démarche puisse se produire qu'il faut se garder de donner trop tôt la "bonne solution" car, une fois les difficultés bien sériées et les procédures de résolution bien agencées, il devient très difficile d'imaginer de quelles démarches maladroites et erronées elles nous mettent à l'abri, il devient donc très difficile de donner un sens profond à la solution proposée (ça marche! Point).

Pour l'élève (ou la classe) nous dirons donc qu'il n'y a de possibilité de démarche proprement mathématique que lorsque d'un côté, il y a volonté du professeur de donner à ses interlocuteurs une part bien réelle de responsabilité scientifique et que de l'autre, ces élèves sont dans une position (psychique, psychologique et épistémologique) qui leur permet accepter au moins momentanément d'assumer cette responsabilité que le professeur tend à leur dévoluer.

En particulier il ne doit pas être illégitime (dans le contrat implicite de la classe), pour les élèves comme pour le professeur, qu'un élève puisse s'adresser à ses pairs pour vouloir défendre lui-même une thèse et qu'il le fasse sans chercher la caution du professeur.

La démarche proprement mathématique n'est possible dans un enseignement que si pour des tâches qui réclament une initiative (et non pas seulement pour l'accomplissement de tâches très routinières), c'est l'élève (ou une masse critique d'élèves) qui se lance dans l'aventure scientifique : on a compris qu'il y avait un problème, et on s'en est emparé dans l'intention de le résoudre au moins partiellement, on s'est posé une question et on veut y répondre (indépendamment de toute injonction scolaire ou, plus exactement, en finissant par oublier les raisons scolaires qui nous ont initialement fait entrer dans ce questionnement ou ce problème) et on accepte en entrant dans une telle aventure le risque de ne pas aboutir (au moins dans un temps court, ou sans faire de détours) puisqu'on souhaite garder la direction des affaires.
On sait bien évidemment que le professeur nous aide par sa façon de poser le problème et qu'il nous aidera à repartir si on est totalement bloqué, mais on souhaiterait qu'il nous guide le moins possible et surtout qu'il ne nous téléguide pas au point de nous interdire de fait toute initiative.

Le professeur s'interdit donc de poser une suite de questions très ciblées (il s'interdit, au moins par moments, le recours au fléchage de l'activité de ses élèves très classique en mathématiques : on pose…, calcule ceci…, montre que…, démontre cela…, qu'observes-tu? en déduire que…), direction de la classe très efficace qui conduit "dans un fauteuil" au résultat ceux qui suivent ces conseils, mais les privent ainsi de l'occasion de comprendre les raisons du détour génial qui leur a été "parachuté"; ils ont donc peu de chances d'en comprendre la philosophie et/ou de réaliser la nécessité de ne pas se contenter de raisonnements plus frustres !

Les règles du jeu de l'activité mathématique

Il nous semble alors qu'un élève ou qu'un groupe d'élèves ne peut se lancer dans une telle aventure scientifique et y avancer résolument que s'il partage quelques principes de base du "débat scientifique" lui permettant d'accepter comme ligne de conduite les points suivants :

1) Pour l'essentiel la découverte du résultat n'est pas à attendre du hasard ou d'une consultation encyclopédique (ou pire encore, des indications scolaires), mais de la compréhension des raisons.

2) Pour avoir des idées et pour avancer, on ne s'interdit pas de travailler sur du très particulier, sur du très imagé, puis on "tire sur ce particulier" pour voir ce qu'il a de général ou générique, on code ses images pour les formaliser; on ose enfin imaginer, tenir pour vraisemblables des choses très incertaines, paradoxales, voire d'une certaine façon un peu "folles".

3) Quand on tient une intuition pour sérieuse, on la formule, on la quantifie, on conjecture, i.e. on s'interdit de proposer ses idées sous une forme tellement vague que cela ne vous engage à rien, sous un aspect si consensuel que personne ne puisse le rejeter catégoriquement, mais au contraire on quantifie, on dichotomise ce qui est en jeu et l'on s'engage en conjecturant : "je pense que ceci vaut cela ou que ceci est vrai/faux!"

4) Pour résoudre une conjecture, on cherche à se faire qualitativement une opinion, on s'oblige à prendre parti (on pense qu'elle est plutôt vraie ou plutôt fausse !) ; cette opinion faite, on sait

que rien ne sert le plus souvent de continuer à disserter indéfiniment sur un plan purement qualitatif, il faut "s'y mettre", i.e. calculer, appliquer des techniques reconnues et maîtrisées afin d'élargir la base de données objectives qui vont, si on les choisit bien, confirmer ou infirmer cette opinion.

5) Au niveau de la synthèse et des conclusions définitives, on cherche à faire preuve d'une objectivité totale et d'un réalisme sans failles : on accepte toutes les conséquences du principe de réalité scientifique, i.e. le refus des contradictions (on ne tient pas ses désirs, ses espoirs, ses quasi-certitudes pour "la réalité", on ne cherche pas à faire plaisir, à faire des concessions à quiconque ni à soi-même ni à personne d'autre, et contrairement à l'attitude purement scolaire, on estime que montrer qu'une proposition est fausse est aussi important/intéressant que de montrer que telle autre est vraie !)

Dans notre façon de cerner l'activité proprement mathématique, nous mettons donc en avant l'acceptation délibérée de l'aventure comme source de motivation, l'engagement scientifique du sujet "je pense que … et je pense pouvoir le montrer !" comme source d'énergie lui permettant d'affronter le doute, d'accepter la frustration d'une réponse non immédiate et non assurée.

Deux principes régulateurs

Pour réguler le débat de la classe, pour autoriser toute prise de parole sincère, pour oser une telle aventure en classe ou en amphi et éviter qu'elle ne se transforme en débat polémique ou en un étalage d'opinions de type "café du commerce", ou encore ne se réduise à l'acceptation démagogique par le maître de n'importe quoi pourvu que ce soit vivant, nous érigeons en règles de bonne conduite mathématique les deux principes suivants :

a) Toute opinion ne peut être proposée que si elle est de bonne foi et qu'on s'engage à en exprimer les raisons rationnellement (on refuse donc le principe de "la majorité a raison !" ou les techniques de pouvoir dans lesquelles on fait pression par la peur ou par la dérision).

b) On ne peut sortir du doute ou de l'opposition sur la vérité des propositions qu'en respectant scrupuleusement les règles de la logique basée sur le syllogisme "si A et A B , alors B " qui régit le sens du vrai et du faux des propositions mathématiques.

<u>Ce que nous choisissons par contre de ne pas mettre a priori dans ce modèle</u> : *les moments où l'élève semble faire fonctionner une technique sur commande,* c'est-à-dire sans jamais s'interroger sur le pourquoi ni le comment et sur ce que représentent les résultats ainsi produits.

Explication sur cette restriction dans nos choix de modélisation :

Nous savons tous que dans de nombreuses phases d'une activité proprement mathématique, ce n'est pas uniquement sur un schéma aventureux que nous fonctionnons : dans la plupart des phases techniques, c'est précisément parce qu'il n'y a pas de doute sur le chemin à suivre et sur son aboutissement, c'est parce qu'on n'a pas à chercher les raisons profondes de ce qu'on entreprend que l'on est efficace, et même dans les phases très conceptuelles ce n'est que lorsqu'on peut s'appuyer sur des automatismes que notre esprit est assez libre pour penser à autre chose, pour pouvoir imaginer, généraliser, abstraire, etc.
Si nous choisissons donc de ne pas mettre a priori comme caractéristique de l'activité proprement mathématique le fait de faire fonctionner une technique de façon très

automatique, c'est parce que même si ce fonctionnement automatique est nécessaire à certains moments pour conduire une activité proprement mathématique, il est, suivant ce qui l'accompagne, en harmonie avec la philosophie propre des mathématiques ou à l'inverse contraire au sens même de cette activité.

En effet, lorsqu'un élève utilise une technique de façon quasi automatique, deux attitudes d'esprit diamétralement opposées peuvent guider et sous-tendre son activité :

- ou bien, comme le mathématicien, il s'interroge : avant, sur le choix de la technique à prendre ou sur l'adéquation de celle qu'on lui propose, ensuite, dès que tout ne se passe pas comme d'habitude : "pourquoi cette différence ou ce problème ?", enfin, quand il obtient un résultat : "que cela signifie-t-il par rapport au reste du problème? Cela confirme-t-il, infirme-t-il ce que j'espérais, ce que je conjecturais ? etc."; et dans tous ces moments méta qui l'amènent éventuellement à changer de technique, ces réflexions qu'il ne verbalise pas forcément, qu'il ne rédige pour ainsi dire jamais (sauf peut-être dans une narration de recherche), nous estimons qu'il fait proprement des mathématiques;
- ou bien l'élève met en œuvre sur commande des routines sans en connaître les raisons profondes ni réfléchir à leur adéquation, mais seulement en vertu du contrat didactique "si le professeur pose une question ou un problème, je dois y répondre en exploitant ce qu'il vient de nous apprendre !" et si on l'interroge sur le pourquoi de ce qu'il fait, il ne peut répondre qu'en termes de droit ou de devoir, de règles à appliquer, "parce que c'est comme ça qu'on fait d'habitude!". Nous dirons alors qu'il adopte une posture totalement scolaire et dans ce cas nous proposons de dire qu'il ne fait pas véritablement des mathématiques, mais plutôt de "l'anti-mathématique".

Si enfin, l'élève retravaille une technique dans le but de se l'approprier ou d'augmenter son caractère d'automatisme, il peut bien sûr le faire en espérant qu'à force de répéter il saura faire le jour du contrôle (il est alors hors du champ mathématique), mais il peut aussi le réaliser de façon réflexive : tout en faisant de la musculation, il développe parallèlement une réflexion méta pour identifier les gestes qu'il maîtrise effectivement, il repère les cas où certains de ces gestes sont plus opérationnels que d'autres et les cas où ils sont très inadaptés ou peu performants.
Quand il agit ainsi, l'élève adopte une posture qui n'est pas contradictoire avec ce que nous avons classé comme proprement mathématique, nous aurons néanmoins tendance à classer ce qu'il fait là comme essentiellement didactique plutôt qu'essentiellement mathématique.

Les raisons profondes de ce choix de modélisation

Si pour ne pas péjorer les techniques nous acceptions sans conditions dans notre modèle les phases purement automatiques, nous aurions le sentiment non pas de trahir l'activité propre du mathématicien qui, même lorsqu'il exploite quasi mécaniquement les techniques dont il dispose, ne s'y aliène pas (contrairement à la tendance naturelle d'un apprenti, il maintient instinctivement un "léger" contrôle de vérité et de pertinence, une sorte de veille technologique sur ce qu'il connaît bien, mais qu'il sait pouvoir lui jouer des tours s'il n'exerce plus aucun contrôle) ; non, ce que nous aurions le sentiment de trahir (en appelant proprement mathématiques ces phases quasi automatiques), ce serait l'acte éducatif démocratique qui consiste à "vouloir faire faire véritablement des mathématiques à tous, c'est-à-dire à la majorité de ceux et celles qui ne deviendront probablement jamais des mathématiciens".

En effet, il nous semble que la portée essentielle de cet acte éducatif démocratique consiste à chercher à apprendre à tout futur citoyen non pas à faire fonctionner sans contrôle de sens ou de pertinence les automatismes qu'on lui propose, à appliquer aveuglément les règles et consignes qu'on lui donne, mais plutôt à lui apprendre à repérer dans les situations ce qui est contraint, ce qui va avoir tendance à se faire automatiquement dès qu'on aura pris certaines options, et à le distinguer de ce qui relève d'un choix, de ce sur quoi il existe une certaine marge de manœuvre, de façon à ce que dans sa vie ordinaire il puisse s'investir lui-même de la responsabilité de faire, là où c'est possible, des choix pertinents. (Cela lui permettra alors de mieux contrôler, maîtriser ce qui, sinon, se ferait inexorablement pour ou contre lui, dans un sentiment d'impuissance totale face à l'injustice des hommes ou du sort, s'il n'a pas imaginé qu'il pouvait, en anticipant ces choix, les infléchir).

Pour bien préciser le sens que nous cherchons à donner à notre modélisation dans laquelle l'activité mathématique propre apparaît comme une initiation à l'analyse et à la conduite des situations éclairées par les raisons, modélisation qui exclut de ce fait les phases purement automatiques où l'élève agit mécaniquement sans réflexion sur le sens ni contrôle de vérité et de pertinence, regardons deux situations opposées où il est possible d'appliquer une technique sans savoir tout sur les raisons : dans un cas, c'est tout à fait compatible avec ce que nous avons envie de nommer une activité proprement mathématique, et dans l'autre, totalement opposé.

Deux exemples similaires sur la forme, mais opposés sur le fond

Premier exemple :

Si devant l'écriture $15\ x = 4$, l'élève écrit "donc $x = 4/15$ ", mais qu'il ne peut expliquer pourquoi, nous pensons qu'il ne fait pas des mathématiques (il n'est alors que purement "scolaire") car son attitude est à l'opposé même de la compréhension et de la maîtrise des grandeurs que confère l'écriture algébrique : si on place le symbole " = " entre deux quantités, c'est qu'elles sont de même nature et de même valeur, et si la multiplication/division a un sens, ces deux quantités se modifient de la même façon quand on les multiplie ou les divise par un même nombre, on aura **donc** encore l'égalité après division par 15 !

Si le sujet élève a un rapport à l'écriture algébrique qui ne lui laisse pas envisager qu'il peut par lui-même et pour lui-même effectuer ce raisonnement pour s'expliquer pourquoi il a raison de diviser 4 par 15 quand il veut "supprimer le 15 devant x ", c'est qu'il est pieds et poings liés par un formalisme et par une technique dont le sens lui échappe à un point tel qu'on ne voit pas après coup comment il pourrait encore penser ce qu'il peut faire avec ce résultat $x = 4/15$! (un tel résultat n'a que la valeur de "bonne réponse d'élève").
La technique mathématique (les règles du calcul algébrique) qu'il applique ici aveuglément le prive de tout sens et de toute possibilité de contrôle sur ce qu'il pourrait faire du résultat.
Cette activité pseudo-mathématique étant plus aliénante que responsabilisante, on ne la placera pas dans notre modèle de "faire véritablement des mathématiques", on devrait même pour être cohérent la placer dans le modèle de l'anti-mathématique.

Deuxième exemple :

Si par contre devant l'équation $x^2 + 3 = 4\ x$ un élève répond " donc $x = 3$ ou $x = 1$" , en se référant à la formule classique $x = -b \pm \sqrt{\ldots}$, mais ne sait pas (ou plus) comment rétablir cette formule, nous ne sommes pas du tout dans la même situation que précédemment car ici l'obtention de la formule ne découle pas directement de la bonne compréhension de ce qu'on cherche à obtenir.
Si on se pose naïvement la question "comment trouver les valeurs de x pour lesquelles

$x^2 + 3$ est égal à $4x$?", on se rend compte en réfléchissant que ce n'est pas simple puisqu'on ne peut isoler x de x^2, mais à part la reconnaissance de la complexité de la situation, la réflexion sur le sens de ce qu'on cherche à faire n'apporte aucune indication immédiate sur l'existence et la nature du chemin détourné qu'il va falloir emprunter pour aboutir à l'algorithme de résolution que représente la formule classique.

Dans notre modèle de démarche mathématique, où se situe la rigueur ?

Ce que nous voulons préciser en mettant en opposition ces deux situations, c'est que pour nous, apprendre à faire véritablement des mathématiques ne consiste pas à entrer dans l'exigence intellectuelle tatillonne de tout connaître de ce qu'on utilise ou de pouvoir établir la preuve de tout ce qu'on avance (on peut utiliser très scientifiquement des algorithmes, des formules, des théorèmes comme des boîtes noires en tant que telles : on sait que ce sont des boîtes noires, i.e. on sait qu'on ne connaît pas toutes les raisons et qu'on doit par suite, pour s'en servir, faire confiance aux possibilités et limites données par ceux qui ont eu accès à ces raisons).
Par contre, nous pensons qu'entrer dans une attitude proprement mathématique, c'est s'interdire de faire l'économie des raisons et des preuves des techniques qu'on utilise quand ces raisons et ces preuves sont accessibles et constitutives du sens même de ce que sont ces algorithmes et ces techniques.

C'est certainement un des aspects les plus délicats et les plus cruciaux des choix didactiques du professeur : quelles sont les démonstrations dont on peut et doit faire le deuil car elles n'apportent pas grand chose au niveau du sens au regard du temps qu'elles réclament et du découragement qu'elles risquent d'engendrer, quelles sont celles par contre dont on ne peut faire l'économie car elles sont trop essentielles au sens même de ce qu'on fait *? Et parmi ces preuves constitutives du sens, quelles sont celles que le professeur devrait s'interdire d'effectuer lui-même ?* Ces démonstrations assez simples et naturelles que la plupart des professeurs font néanmoins eux-mêmes, mais à toute vitesse en disant que c'est évident ou trivial (ce qui est vrai pour eux mais très irritant, angoissant, méprisant pour les élèves qui n'ont pas le temps de se représenter ce qu'on cherche à prouver avant que la démonstration ne soit déjà terminée), ces démonstrations donc, le professeur ne les ferait pas, mais il inciterait très fortement ses élèves à les faire (seuls ou en petit groupes). Il leur demanderait cet effort car il estimerait qu'un "élève ou un étudiant standard" est capable de les trouver par lui-même s'il a compris de quoi on parle, et que c'est précisément en cherchant à les établir par soi-même qu'on a le plus de chances d'arriver à donner du sens aux concepts ou théories sur lesquelles on est en train de travailler.

Culturellement donc, être instruit à faire véritablement des mathématiques devrait induire le comportement social suivant : *dans une situation complexe (surtout si elle est organisée en partie par d'autres), ne lâchons rien sur les raisons du pourquoi ni du comment tant qu'on a le sentiment que c'est par là que l'on va comprendre exactement ce qui est en jeu et/ou entrevoir ce qui risque de se décider* (ne laissons pas aux autres le soin de comprendre et de décider à notre place quand l'essentiel peut se concevoir par soi-même en réfléchissant un peu et en obtenant des précisions sur les données du problème).
Par contre, quand l'essentiel est clair, ou au contraire pour arriver à apercevoir où se situe l'essentiel, n'ayons pas peur de laisser filer des détails, osons faire confiance à des techniques que nous ne maîtrisons pas de bout en bout mais garanties fiables par des personnes de confiance, afin de ne pas nous épuiser sur un aspect marginal du problème. Osons renoncer à "tout" comprendre immédiatement, si nous avons le sentiment que vouloir s'accrocher à tout

dans le détail risque finalement de masquer ce qui est fondamentalement en jeu, risque de nous interdire de déceler la trame générale, de nous empêcher de voir où sont les variables pertinentes, où sont les véritables dangers, où sont les choix cruciaux, etc.

En définitive, nous décidons donc de mettre dans notre modèle "faire proprement des mathématiques en cours de mathématiques" ce qui dans l'ensemble des activités d'un élève ou d'une classe de mathématiques semble pouvoir ***donner l'habitude de chercher à acquérir une sorte d'autonomie intellectuelle raisonnable :***

- dans une situation où je ne contrôle pas tout (en particulier celles organisées par d'autres) j'essaye de me dégager du particularisme du point de départ pour distinguer le nécessaire du contingent, pour me rendre compte qu'une question initiale apparemment très claire et très simple est éventuellement très ambiguë ou trop générale pour engendrer des réponses précises de type oui /non;

- face à une argumentation a priori convaincante, je regarde si elle repose logiquement sur des faits vérifiables ou si au contraire elle présente des cercles vicieux ou encore s'appuie essentiellement sans le dire sur ce qu'on ignore;

- enfin je sais que le meilleur moyen de comprendre ce que d'autres proposent en matière de solution et d'en tester la solidité, c'est de m'y mettre moi-même : imaginer ma propre solution et/ou reprendre la solution proposée par d'autres en la faisant fonctionner dans des cas difficiles (je sais que si ça résiste dans des cas cruciaux, ce n'est pas gagné, mais c'est un premier gage de sérieux et un test, que bon nombre d'idées lumineuses a priori ne franchissent pas victorieusement).

Prenons un dernier exemple montrant vers quoi nous tendons quand nous proposons à nos élèves de "faire véritablement des mathématiques".

Le paradoxe : en changeant de vitesse, on gagne plus difficilement du temps qu'on en perd!

Un ami constate que sur son parcours habituel, quand il va 10km/h plus vite, il gagne 20' et quand il va 10km/h moins vite, il en perd 45. Est-ce bien normal ?

Si l'on voit ce problème uniquement comme un problème scolaire, on ne s'embarrasse pas de la question "Est-ce bien normal ?", car on sait que c'est la technique de mise en équation qui est attendue.
Si on possède bien cette technique, on repère alors qu'il y a ici trois inconnues, la distance D parcourue, la vitesse V habituelle et le temps T habituel.
Il faut donc écrire trois équations indépendantes pour résoudre ce problème.

On en a déjà une universelle : $D = V.T$; il faut en trouver deux autres.

On peut prendre celle du parcours le plus rapide :

$$D = (T-\Delta T).(V+\Delta V)$$

Puis celle du moins rapide :

$$D = (T + \Delta T').(V-\Delta V) .$$

Si on ne s'y prend pas trop mal, on peut alors résoudre aveuglément ce système et trouver qu'une seule distance $D = 200$km et une seule vitesse $V = 50$km/h permettent de constater un tel fait.
A notre sens, si ce faisant on n'a vu ici aucun paradoxe et si on ne s'est posé aucune question, on a répondu par une technique mathématique à un problème scolaire, mais on n'a pas fait proprement des mathématiques.

En effet, ici la première réaction du mathématicien est : "cet ami doit se tromper dans ses évaluations car en faisant le même écart de vitesse on devrait obtenir le même écart de temps !"
Ensuite, si on a un peu de sens pratique ou si l'on perçoit bien la distance parcourue comme l'intégrale de la vitesse suivant le temps, on peut se dire que lorsqu'on va plus vite sur un parcours donné, on profite moins longtemps de son écart positif de vitesse, alors que celui qui va plus lentement "profite" plus longtemps négativement de ce même écart; par suite le paradoxe s'estompe, il n'est pas anormal qu'on gagne moins de temps en allant plus vite qu'on en perd en allant plus lentement.
Le mathématicien rassuré par ce raisonnement qualitatif qui réduit le paradoxe se pose alors la question : "ce phénomène peut-il se produire sur plusieurs parcours à plusieurs vitesses ou détermine-t-il totalement la distance, la vitesse et le temps ?"
Il sait alors que la technique de mise en équation va lui permettre de répondre à cette question.
Il écrit donc ses trois équations et les résout ; il obtient alors la réponse : il n'y a qu'un triplé de paramètres qui satisfasse aux conditions proposées.
Normalement, quand il n'a que ce résultat, le mathématicien n'est qu'à moitié satisfait : il a la preuve que le paradoxe était un faux paradoxe, il sait qu'il y a une solution et une seule et il connaît les valeurs, mais sa méthode de résolution aveugle ne lui a pas vraiment expliqué pourquoi un même écart de vitesse en plus ou en moins ne produit pas un même écart de temps en moins ou en plus.

S'il veut vraiment comprendre cela, il sait qu'il peut y arriver non pas en se laissant guider par la technique mais en la guidant lui-même; pour cela il faut qu'il arrive à exprimer ce qui dans cette situation est nécessairement "le même" et ce qui est nécessairement différent et pourquoi !

Pour voir ce qui est le même mais qui n'est pas évident a priori, dissocions les trois types de parcours : le rapide, le normal et le lent, et prenons le point de vue de celui qui roule à la vitesse normale V .
Pendant son temps T de parcours, il effectue $T . \Delta V$ plus de chemin que le plus lent et $T . \Delta V$ moins de chemin que le plus rapide (si celui-ci avait continué à rouler jusqu'au temps T), c'est-à-dire que pendant son temps de parcours T le normal gagne par rapport à l'un exactement ce qu'il perd par rapport à l'autre.

Or ce même chemin pour le "normal" va être effectué en moins de temps par le plus rapide (peu de temps gagné puisqu'il va plus vite) et en plus de temps par le plus lent (plus de temps perdu puisqu'il va moins vite), d'où l'explication certaine de la nécessité que le temps gagné soit plus faible que le temps perdu.
Si nous écrivons ce que nous venons de dire en nous mettant dans le registre du plus rapide et dans celui du plus lent, on obtient que :
- le plus rapide évitera de faire ce parcours gagné sur le normal en ne roulant pas pendant un temps ΔT à une vitesse ($V + \Delta V$) ,
- le plus lent fera ce parcours gagné sur lui par le normal en roulant pendant un temps supplémentaire $\Delta T'$ à une vitesse ($V - \Delta V$) .

Traduisons maintenant cette "mêmeté" qui nous est apparue :

$\Delta T. (V + \Delta V) = \Delta T'. (V - \Delta V)$.

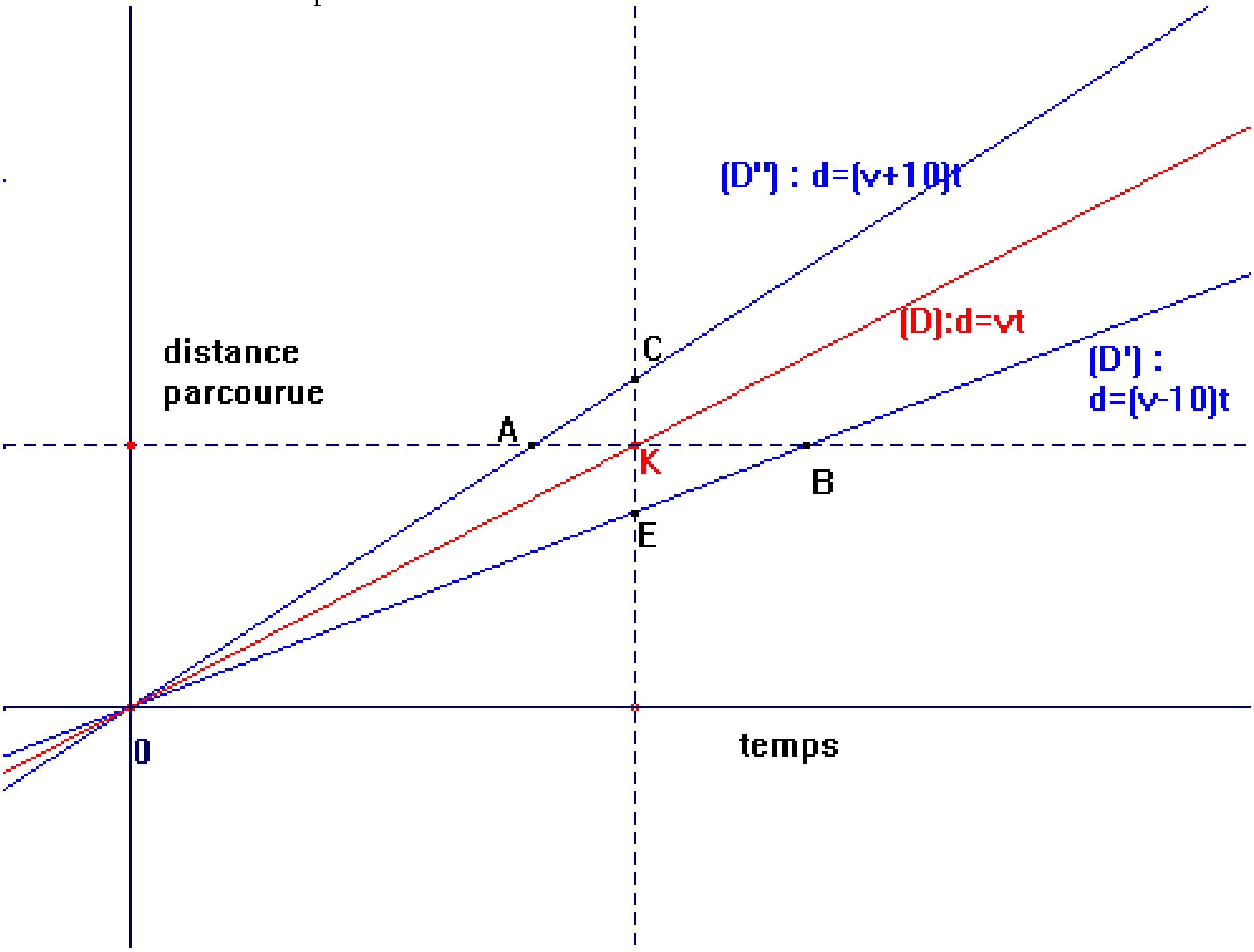
On obtient ainsi l'égalité fondamentale qui explique tout (et permet en outre de calculer directement V dès que les paramètres ΔT , $\Delta T'$ et ΔV sont fixés).

En regardant bien cette équation, il saute aux yeux que sur un parcours donné, on gagnera toujours moins de temps ΔT en allant ΔV plus vite qu'on en perdra $\Delta T'$ en allant ΔV moins vite, puisque $(V+\Delta V)$ est toujours plus grand que $(V - \Delta V)$. En outre on remarque que plus ΔV se rapproche de V , plus l'écart de temps doit devenir "fou" pour garder cette "mêmeté".

A la lecture de ce texte une collègue nous a proposé la solution géométrique ci-après; solution qui dit tout, montre tout et bien plus, mais… quelle culture mathématique faut-il avoir pour l'interpréter et a fortiori la construire !

Problème : *Si un ami constate que sur son parcours habituel, quand il fait 10Km/h de plus, il met 20’ de moins, et s’il fait 10km/h de moins, il met 45mn de plus, et vous pose la question « est-ce normal ? », la réponse sera "non !" si on a l’intuition qu'à une même variation de vitesse doit correspondre une même variation de temps.*

Mais on peut aussi faire le dessin ci-dessous : on a CK = KE. Si on avait AK = KB, alors les droites D’ et D’’ seraient parallèles.



Notre hypothèse ici est que si, bien entendu, il ne faut pas exclure ce dernier type de solution qu'on peut considérer comme l'exemple même de la simplicité que les mathématiques peuvent apporter sur les problèmes (c'est une très jolie façon de conclure ou de revenir après coup sur

l'ensemble des propositions des uns et des autres), il ne faut pas non plus la donner trop vite ou chercher systématiquement à la faire découvrir.
En effet, si on veut arriver à coup sûr à la faire construire par les élèves, comme c'est à la fois très conceptuel et technique, on va être contraint à les téléguider totalement, et si on propose immédiatement toute faite cette façon très élégante de montrer le vrai, cela peut apparaître à l'élève comme tellement magique qu'au lieu de l'inviter à faire plus de mathématiques, cela peut au contraire le lui interdire car ça lui fait sentir que ce n'est pas pour lui : "c'est beau, mais pas pour moi car je n'y aurais jamais pensé!" .
Si cette opération se répète très souvent (c'est le cas dans de nombreux beaux cours de math), cela tend à renforcer le manque de confiance en soi qui inhibe les facultés intellectuelles d'un grand nombre d'élèves. (Combien d'adultes, après avoir fait des math à l'école, se déclarent capables et désireux d'en faire à nouveau ! Combien ont acquis à l'école les raisons d'espérer être un jour l'auteur d'une quelconque véritable preuve mathématique ?).
Or, à notre sens, dans une certaine vision de la démocratie, apprendre à faire des mathématiques c'est apprendre que sans être un petit Einstein on peut, si on s'en donne la peine, être auteur de productions montrant de façon très acceptable un vrai de nature mathématique.

Pour conclure sur cet exemple, nous ne disons pas que faire des mathématiques réclame d'aller systématiquement chercher ces différentes façons de traiter le problème (en particulier les deux dernières), mais nous pensons intéressant de mettre en exergue dans notre modèle "faire véritablement des mathématiques" tout ce qui pourrait pousser l'élève ou la classe à découvrir l'intérêt qu'on a bien souvent à ne pas se contenter d'un seul niveau d'explication ou de preuve, et nous justifions ce choix par des raisons épistémologiques internes (c'est quand il pousse les choses jusqu'au bout de l'explication que le mathématicien avance), mais surtout par des raisons épistémologiques externes.

En pratique, nous constatons que personne ou presque n'exploite pour résoudre ses problèmes dans la vie quotidienne les mises en équation qui lui ont été enseignées à l'école; ***par contre, nous pensons que tout ce qui donne des habitudes et des méthodes, d'abord pour s'étonner de ce qui pourrait passer inaperçu, puis pour "remonter objectivement dans les raisons" de ce qui s'est révélé surprenant ou particulièrement intéressant à reproduire, et surtout tout ce qui contribue à donner à l'individu le sentiment qu'il peut et doit à chaque fois que c'est possible devenir co-auteur de ce qu'il pense et de ce à quoi il adhère est éminemment utile non seulement au chercheur ou à l'ingénieur, mais également à tout citoyen qui souhaite conduire sa vie et comprendre le monde qui l'entoure.***

C'est donc cela qui à nos yeux, comme nous l'avons déjà souligné, justifie le projet démocratique de l'école de vouloir "faire faire véritablement des mathématiques à tous les élèves en cours de mathématiques".

IV. Conclusion

En terme de culture, on pourrait dire qu'avoir "fait des mathématiques à l'école" c'est essentiellement s'être initié à une **méthode de pensée qui permet de poser les problèmes un peu autrement qu'à l'ordinaire** de façon à mieux savoir de quoi on parle, de façon à trouver un plus grand accord avec les autres sur ce qu'on prétend être universellement vrai ou faux :

- Parle-t-on de la même chose ? Si oui, arrive-t-on aux mêmes conclusions sur un projet précis? Sinon, précisons, définissons, construisons un modèle de ce dont nous voulons parler.

- Dans ce modèle n'a-t-on pas représenté la situation d'une telle façon qu'on puisse encore avoir une chose et son contraire ? Dans ce cas, ne peut-on pas resserrer encore un peu notre propos pour éliminer les incertitudes et les contradictions ?

- Finalement, quand tout semble clair et précis, n'est-on pas en train de dire que ceci est impossible ou au contraire que cela est certain parce que nous n'avons pas eu l'audace d'imaginer l'invraisemblable ? De chercher à voir ce qui ne saute pas aux yeux ?

Un décalage qui nous paraît culturellement essentiel

Ce qui caractérise le travail des mathématiques sur nos idées "spontanées" c'est ***que, contrairement au réflexe de rejet que nous adoptons le plus souvent dans la vie quotidienne face à une difficulté, on découvre par les mathématiques que la rencontre d'ambiguïtés ou de contradictions n'est pas à prendre systématiquement de façon négative,*** *ne signifie pas qu'on perd son temps et qu'on n'avance pas, n'indique pas qu'il faille abandonner cette piste.*

En mathématiques, on découvre bien souvent au contraire que ces "ennuis" sont ***l'indice qu'il y a quelque chose d'important à comprendre mais qu'on n'a pas encore compris,*** quelque chose d'essentiel sur lequel on ne pourra probablement pas avancer avec plus de certitudes si on se contente du "bon sens". Il faudra probablement inventer des mots, des signes, des symboles, établir des principes, rôder des techniques pour dépasser les obstacles rencontrés et faire disparaître les ambiguïtés et contradictions.

Dans sa façon de mener à bout un projet, le mathématicien s'interdit les compromis classiques qui permettent souvent de réduire les tensions sans résoudre les problèmes ("la langue de bois" bien sûr, mais aussi les "peut-être bien que oui, peut-être bien que non" ou "le tout est possible, on ne peut être sûr de rien!" ou encore "tentons l'expérience et si ça marche, cela prouvera qu'on a raison !").
C'est donc, à notre avis, lorsque l'élève, la classe, l'amphi fait des essais, puis des propositions et apprend à défricher ses plus ou moins mauvaises solutions issues d'idées de génie, mais néanmoins le plus souvent idées "à corriger" qu'il fait le plus certainement des mathématiques, et c'est très probablement ce travail en profondeur sur les productions contradictoires ou erratiques des uns et des autres qui laissera à chacun le plus de traces dans la culture scientifique utile, utilisable par le futur citoyen.

Ce défrichage se fait par confrontation à l'expérience matérielle quand c'est possible, mais aussi et surtout par la mise en commun des expériences intellectuelles de chacun : "si on fait ça, dans tel cas particulier ça va donner cela qui est conforme ou non avec nos prévisions !"
Cette mise en commun des expériences de pensée de chacun débouche soit sur des contre-exemples qui nous font obligation de modifier nos affirmations initiales, soit au contraire sur l'impossibilité de construire de véritables contre-exemples (à chaque fois que quelqu'un propose un soi-disant contre-exemple, c'est en fait soit un exemple soit un hors-sujet), ce qui force le groupe à chercher une démonstration du pourquoi cela marche toujours, pourquoi c'est impossible de contrecarrer mathématiquement l'affirmation initiale; cela aboutit (souvent avec l'aide de la communauté mathématique - ici le professeur) à une preuve qui est alors hautement significative car réponse à un questionnement, une preuve dont on oubliera probablement le détail mais dans laquelle la démarche est susceptible d'intériorisation.

Un problème d'équilibre pédagogique pour le professeur

Pour que tout cela puisse se dérouler dans le quotidien de l'enseignement, il faut que le professeur parvienne à trouver **un équilibre entre les deux attitudes extrêmes** :

- d'un côté**, se croire obligé de laisser les élèves totalement seuls face à la difficulté** , de **ne jamais les guider, de ne pas leur imposer son point de vue,** de laisser le cours s'infléchir automatiquement à la demande de certains …

- à l'inverse, devant l'échec quasiment programmé de cette position trop ambitieuse au niveau épistémologique et trop laxiste au niveau conduite d'un groupe, **se croire obligé de tout conduire par le menu en ne laissant d'initiatives à ses élèves que sur les détails**, de ne jamais se laisser détourner de son objectif initial, de vouloir toujours arriver au bout de son explication, de n'accepter que les formulations orthodoxes et/ou de faire disparaître subrepticement tout ce qui n'est pas canonique.

Ces deux attitudes extrêmes, dans lesquelles on se laisse si facilement entraîner, sont toutes deux, nous semble-t-il, très inefficaces (bien qu'elles soient jugées différemment par les élèves, les parents et l'administration, l'attitude dirigiste étant en général mieux acceptée si elle se fait avec diplomatie) pour permettre à l'élève de faire des mathématiques et d'intérioriser les mathématiques qu'on lui enseigne.

Pour trouver un équilibre entre ces extrêmes, nous pensons que le professeur doit pouvoir adopter deux comportements complémentaires bien que d'apparence contradictoire.

D'un côté, il doit vouloir tenir bon sur ce qu'il veut enseigner : une fois qu'il a trié entre ce qu'il considère comme essentiel et ce qui est plus secondaire, il doit absolument ne pas céder sur cet essentiel devant la première résistance.

D'autre part, il doit contradictoirement être capable de "lâcher prise" pour s'adapter aux interventions des auteurs qui se manifestent spontanément, et ne pas considérer leurs propositions orthogonales comme des propositions gênantes qu'il lui faut systématiquement écarter. En effet, toutes nos expériences montrent que, bien intégrés dans le cours, ces mal dits, ces contresens, ces remarques non pertinentes - en apparence - donc trop facilement perçues comme un obstacle à l'avancement du cours, peuvent en réalité être de formidables occasions d'approfondir et de comprendre.

Deux procédés didactiques complémentaires

Pour arriver à tenir en équilibre ces tensions très contradictoires, outre une formation mathématique consistante donnant le recul nécessaire, deux procédés didactiques complémentaires peuvent être au service de cette ambition.

En premier lieu, le travail de l'analyse a priori que favorisent les théories didactiques classiques : le professeur se définit une problématique d'enseignement, envisage un savoir principal et construit une situation ad hoc pour l'enseigner, puis prend du recul pour imaginer quelle va pouvoir être l'attitude de ses élèves face à ce qu'il leur propose.
Par exemple, il est clair que dès qu'on est trop ambitieux dans le mélange du conceptuel et du technique (on veut dans un temps raisonnable faire un beau problème qui conduise à un beau résultat, et dans lequel la solution va inévitablement nécessiter de recourir à des techniques très spécifiques), l'analyse a priori peut nous montrer que, quelle que soit notre gestion de la classe, on va probablement se couper de toute possibilité de placer nos élèves en position d'auteur sur ce qui est important.
En effet, dès que le conceptuel ne peut avancer sans une technique très adaptée, si on ne guide pas les élèves par le menu, ils ne peuvent avancer seuls, et si on les guide par le menu en ne leur laissant en réalité que l'initiative de finir les phrases qu'on a commencées pour eux, on perd tout espoir qu'ils puissent développer une réflexion globale leur permettant de

comprendre le sens de ce qu'ils font (ou plus exactement le sens de ce qu'on leur donne l'illusion de croire qu'ils font eux-mêmes par le jeu des injonctions "calcule, observe, montre, démontre, etc.!").
L'expérience montre qu'un professeur qui a anticipé sur les difficultés et les choix possibles et qui est conscient des contraintes épistémologiques (en particulier passage obligé par trop de technique s'il adopte tel ou tel point de vue) et des contraintes institutionnelles (en particulier le temps et la nécessité qu'on avance) qui pèsent sur ses choix et sur ceux de ses élèves, parvient souvent à laisser beaucoup de liberté à ses élèves tout en contrôlant la classe.

En second lieu, l'enseignement /apprentissage "in live !"

L'expérience - souvent malheureuse - des ingénieries didactiques montre toutefois que **la façon de procéder a priori que nous venons de prôner a ses limites**!
En effet, on observe souvent que dans l'action de la classe s'ouvrent ou se ferment des possibles, pour des raisons plus conjoncturelles que scientifiquement prévisibles, et qu'alors une trop grande confiance du professeur en cette construction rationnelle a priori du déroulement de sa classe peut introduire une certaine rigidité, un certain aveuglement, une certaine surdité de sa part parce qu'il désire trop atteindre son objectif initial, qu'il veut trop fortement voir arriver ce qui était programmé.
Dans ce cas le professeur risque de ne pas pouvoir saisir l'opportunité d'un enseignement qui s'impose à ce moment dans l'action de ce groupe d'élèves, qui se révèle logiquement ou psychologiquement nécessaire, comme un préalable à celui qui était initialement prévu.
Il peut alors se trouver dans l'incapacité de changer de perspective pour s'emparer de la situation qui se crée "in live" et qui pourrait être l'occasion d'un autre enseignement / apprentissage idéal.
Refuser un tel "enseignement / apprentissage spontané" pour faire coûte que coûte ce qui était prévu peut être, nous le pensons, une erreur didactique majeure, car l'expérience montre que lorsque, dans ce type de situation, le professeur parvient sur le champ à s'adapter aux propositions des élèves pour les contrôler et les diriger, il est le plus souvent très efficace. En effet, l'expérience montre que ce que le professeur réorganise et tente de structurer en abandonnant son projet initial pour suivre l'impulsion de quelques élèves est alors le plus souvent très pertinent et prend beaucoup de sens, car cela répond au bon moment (c'est très rarement le cas dans l'enseignement) à un besoin profond d'une grande partie des élèves et pas seulement des quelques-uns qui se sont manifestés initialement.

Il nous semble alors que la recherche de cohérence globale dont nous avons parlé précédemment est non pas la méthode miracle pour s'adapter à tout, mais **le bon cadre** qui peut aider le professeur à progresser sur deux aspects au moins : d'abord **apprendre à s'adapter à l'imprévisible**, apprendre à ne pas être sourd aux propositions "invraisemblables" des élèves, à leurs recherches intempestives de sens qui, bien que très mathématiques, lui apparaissent souvent d'autant plus "absurdes" qu'elles vont à contre sens de ce qu'il avait prévu; ensuite (au lieu de se scléroser au fil du temps par la répétition de l'enseignement d'un savoir identique d'une année sur l'autre) **apprendre à s'enrichir** chaque année **de tous ces imprévus** porteurs de signification mathématique qui surgissent lorsqu'on invite les élèves à faire véritablement des mathématiques.

Par exemple, nous avons eu cette année avec les étudiants de licence de math un long débat sur "la pertinence en mathématiques", débat qui s'est mis en route "spontanément".

Il s'agissait initialement pour les étudiants de proposer des conjectures permettant de comparer le module des composantes d'un vecteur et la norme de ce vecteur dans un espace de dimension finie munie d'une base.
L'un d'entre eux propose la conjecture suivante : " $-|xi| \leq ||x||$ ", conjecture que le professeur a d'abord écrite au tableau : C1) " $|xi| \leq ||x||$ " car honnêtement "il n'avait pas entendu" le signe moins devant $|xi|$.
En fait ce professeur ne pouvait supposer qu'un étudiant de licence considérerait comme une conjecture pertinente le fait de proclamer à propos du module des composantes d'un vecteur dans un espace de dimension finie "qu'un nombre négatif est toujours inférieur à un positif !".
Mais comme cet étudiant insistait sur son moins, le professeur a fini par écrire la conjecture : C1) " $-|xi| \leq ||x||$ ", alors que d'autres étudiants proposaient la conjecture : C2) " $|xi| \leq ||x||$ " que le professeur avait cru initialement entendre.
Au bout de quelques minutes un étudiant a réclamé le droit de protester contre la présence de cette conjecture C1 au tableau. Comme beaucoup d'étudiants ne comprenaient pas sa proposition de rejet, le débat s'est engagé : pour certains étudiants cette conjecture était parfaitement légitime puisque vraie et pertinente (elle est vraie et elle relie bien le module des composantes à la norme du vecteur comme il leur avait été demandé); pour quelques étudiants (très rares au début, d'autres les rejoignant au cours du débat) cette conjecture était non pertinente car bien que vraie on ne pouvait rien faire d'intéressant avec.
Contrairement à ce qu'on pourrait attendre, ce deuxième point de vue n'était pas du tout majoritaire, le débat était par moments très intense. De nombreux étudiants découvrant subitement qu'ils ne s'étaient jamais posé la question de la pertinence en math pressaient implicitement le professeur (qui ne s'impliquait pas sur le fond dans ce débat) d'en donner une définition.

On peut donc constater ici que ce professeur a choisi par référence à la composante épistémologique bien sûr, mais aussi pour des raisons socioculturelles et éthiques de laisser ce débat sur la pertinence prendre le pas momentanément sur le savoir principal qui était visé initialement et qui apparaît derrière la conjecture C2) " $|xi| \leq ||x||$ ".
Cette conjecture pertinente C2 que les étudiants proposent toujours et que la plupart d'entre eux considèrent comme vraie, met en évidence la conception fausse "quand des forces s'ajoutent pour coopérer, on est plus fort". En fait il n'en est rien même dans une base normée, puisque les composantes d'un vecteur peuvent (si la base est trop oblique) être beaucoup plus grandes que le vecteur lui-même.

Le professeur a donc momentanément abandonné ce savoir principal parce que les premières interventions des étudiants sur la pertinence d'un énoncé conjectural lui ont fait comprendre que le savoir "pertinence", si fondamental pour un mathématicien (nous savons tous que si dans une explication quelqu'un met en avant plusieurs propositions exactes qui ne servent à rien, il a très peu de chances d'aller au bout de sa démonstration), n'était en réalité partagé que par très peu d'étudiants.

Le professeur a ensuite institutionnalisé ce débat non pas en donnant une définition de la pertinence en mathématiques, définition qui n'existe pas et ne peut exister, mais en essayant de partager avec ses étudiants ce que son expérience de mathématicien lui avait permis de comprendre à propos de la pertinence dans la recherche de la clarté et de la vérité :
"même si en principe, une démonstration mathématique consiste à tout ramener à des évidences immédiates, il semble néanmoins que le matheux a horreur des tautologies du type "un cheval blanc est blanc". En effet toute la rigueur, la clarté et l'esthétique du discours mathématique consistent à mettre en exergue ce qui est vrai et indispensable pour soutenir le propos (cet indispensable pouvant varier avec le niveau de complexité de ce qu'on traite et la complicité sur le sujet des personnes à qui on s'adresse) et à l'opposé, à taire ce qui ne sert à

rien ou est "trivial". La pertinence en math est donc ce filtre (en partie subjectif mais pas totalement) permettant de choisir parmi ce qui est vrai et en rapport avec ce dont on parle, ce qu'on va mettre en exergue parce que c'est important et au contraire ce qu'on va volontairement taire car le dire "ferait du bruit", empêcherait de porter son attention sur l'important ! (tout dire n'est ni éclairant ni un gage de rigueur)."

Pour conclure sur cet exemple, nous ne prétendons pas que dans une situation analogue il faille absolument effectuer le choix qui a été fait ici, ni que l'explication proposée ici par ce professeur soit totalement satisfaisante ou n'ait pas engendré elle-même des malentendus et des contresens.
Nous pensons néanmoins qu'une telle situation est riche d'enseignement pour l'élève comme pour le professeur et que prendre le temps de la traiter aide par la suite à "faire véritablement des mathématiques ensemble".
En fait, nous ne voyons pas comment on peut aujourd'hui vouloir démocratiser le savoir mathématique et désirer que beaucoup en tirent un réel profit sans accepter de payer par moments un prix important pour arriver à partager ce qu'on pourrait laisser à un niveau beaucoup plus implicite si tous baignaient déjà dans une culture scientifique.

En définitive, la première force d'un professeur est bien évidemment de pouvoir mener en professionnel les situations robustes qui habituellement se passent bien, mais nous savons tous que les meilleures situations peuvent toujours déraper puisqu'elles sont, au moins pour une part (pour pouvoir faire des maths), assez ouvertes.
Pour qu'un professeur puisse accepter l'imprévu sans stress épuisant, pour qu'il ose dans la durée faire vivre le doute et l'incertitude nécessaires au "faire véritablement des mathématiques", il semble donc indispensable qu'il acquière peu à peu une réelle confiance dans sa propre capacité à bien réagir en tant que maître face à l'imprévisible de la classe.

Nous soutenons ici la thèse que les ambitions épistémologiques que nous mettons en avant dans "faire véritablement des maths" (ambitions qu'on peut considérer comme très utopiques dans une description ordinaire de la classe), associées aux valeurs démocratiques et humanistes que nous proposons de mettre en filigrane, en ligne d'horizon dans la gestion du sujet mathématique comme de la communauté scientifique classe ou amphi, sont ces fils conducteurs qui, en situation chaotique, permettent au professeur de repenser instantanément les situations, d'envisager de les réorganiser sur le champ pour conduire à nouveau la classe vers un savoir qu'il peut raisonnablement considérer comme suffisamment important pour justifier à ses yeux et à ceux de la classe ce changement de cap.

Ce sont ces fils conducteurs qui permettent au professeur, nous le pensons, de s'adapter aux propositions des élèves, de leur laisser la responsabilité scientifique dont ils s'emparent quand on leur en donne la possibilité, tout en gardant toujours la direction des affaires au niveau de la gestion didactique de la classe et du contrôle épistémologique.
Tout ce qui dans nos propositions indique l'impérieuse nécessité de laisser plus de responsabilité aux élèves/étudiants ne revient pas à prôner un laxisme consistant à laisser la classe, le TD ou l'amphi aller n'importe comment, n'importe où, car on n'enseigne rien de sérieux de cette façon. Mais une chose est de tout vouloir contrôler par le menu pour qu'au moins les apparences soient sauves, une autre, à notre sens beaucoup plus difficile mais plus conforme à l'esprit des mathématiques, de la démocratie et de l'humanisme, est de faire en sorte qu'à chaque instant le plus possible d'élèves et d'étudiants pensent et agissent dans une certaine indépendance de pensée afin d'augmenter ainsi les chances d'atteindre, par moments au moins, une cohésion non factice au niveau du sens principal.

Références

Brousseau G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage. Grenoble.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 12/1, 77-111.

Douady R. (1984). *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse d'Etat. Université Paris 7.

Gandit M. & Masse-Demongeot M.C. (nov.2001). *Le vrai et le faux en mathématiques au collège et au lycée*. Publication de l'IREM de Grenoble.

Legrand M. (mars 1992). *Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse.* Revue Repères IREM. Topiques Editions n° 10, janvier 93

Legrand M. (avril 2001). *Science, Enseignement, Démocratie et Humanisme*. Actes du XXVIIe colloque Inter-IREM de la COPIRELEM, Publication de l'IREM de Grenoble.