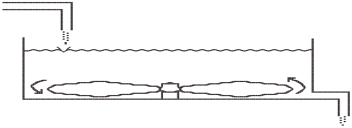
Groupe "Analyse au lycée"

Raphaël Rossignol (Univ. Grenoble Alpes)

Séminaire Irem 3 juillet 2021

Plan

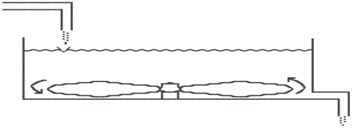
Dilution d'une solution saline



Un bassin contient 100 litres d'eau salée, dans lesquels sont dissous 10 kg de sel. Une arrivée d'eau pure, avec un débit de 10 litres/min, démarre à l'instant 0. En même temps que l'arrivée d'eau pure, une évacuation du mélange contenu dans le bassin est assurée avec un débit de 10 litres/min. L'homogénéisation du contenu du bassin est assurée de façon permanente et instantanée par un mélangeur.

Au bout d'une heure, quelle quantité de sel reste-t-il dans le bassin ?
Travail individuel : 5 min.

Dilution d'une solution saline



Un bassin contient 100 litres d'eau salée, dans lesquels sont dissous 10 kg de sel. Une arrivée d'eau pure, avec un débit de 10 litres/min, démarre à l'instant 0. En même temps que l'arrivée d'eau pure, une évacuation du mélange contenu dans le bassin est assurée avec un débit de 10 litres/min. L'homogénéisation du contenu du bassin est assurée de façon permanente et instantanée par un mélangeur.

Au bout d'une heure, à quelle vitesse diminue la quantité de sel dans le bassin ?

10 kg → 100 L
100 g → 1 L

c_0 = concentration de départ

c_0 = 100 g/L

On cherche c_{60}, on pense que c'est une histoire de concentration

Il y a 10 kg / 100 L
Pour t = 1 on perd 10 L d'eau salée soit 1 kg / 10 L
Il reste alors 9 kg de sel dans 100 L donc c_1 = 90 g/L

- On a ~~...~~ une masse de sel dissout dans 100 L d'eau on lâche 10 L d'eau soit 10 % donc on perd également 10 % de la masse de sel.
À chaque minute il reste ~~...~~ 90 % de masse de sel comparée à la minute précédente.
soit $u_{n+1} = 0,9\, u_n$

$u_{60} = 0,9\, u_{59}$
$= 0,01797010 3$ kg
$\simeq 18$ g

REPERES - IREM. N° 64 - juin 2006

MISE EN EQUATION DIFFERENTIELLE ET MESURE DES GRANDEURS

Un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique

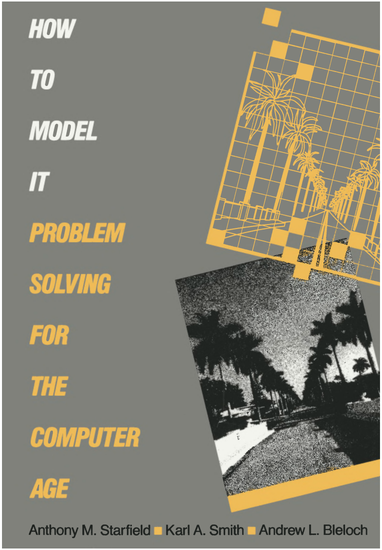
Marc ROGALSKI
Irem de Lille

Résumé : *Les programmes de la terminale scientifique mettent désormais l'accent sur la collaboration entre mathématiques et physique, pour la mise en équation différentielle de phénomènes physiques et, plus marginalement, pour la mesure des grandeurs par une intégrale. Nous comparons d'abord la pratique des physiciens et un point de vue de mathématiciens. On analyse les concepts qui sous-tendent la possibilité d'une intervention spécifique des enseignants de mathématiques dans les classes sur des questions de physique. Nous dégageons ainsi une procédure générale de l'accroissement différentiel, dans ses versions physique et mathématique, susceptible de donner du sens aux pratiques des physiciens et à certaines notions d'analyse : la négligeabilité, des procédures de majoration et d'encadrement. Cette notion de négligeabilité est centrale dans le concept de dérivée, mais les programmes de la terminale la sous-estiment, et en évitent une pratique opérationnelle. Quelques situations de travail pour les élèves sont proposées, qui permettent d'aborder un large éventail des questions qui se posent. Ces situations pourraient s'insérer dans une ingénierie destinée à l'apprentissage de la procédure de l'accroissement différentiel et à l'amélioration de l'enseignement de l'analyse. Quelques pistes pour une telle ingénierie sont avancées. Nous poursuivons ainsi des réflexions déjà entamées par d'autres chercheurs dans un travail interdisciplinaire des années 1980 dans le cadre du CNRS, et concernant la première année d'université.*

Introduction

Le programme mathématique des terminales scientifiques met depuis 2002 l'accent sur les liens entre les mathématiques et la physique. Ce lien est développé de façon très explicite autour des *procédures de mise en équation différentielle de phénomènes physiques* (étude des variations d'une grandeur à taux de variation instantané proportionnel à la grandeur, équations différentielles $y' = ky$).

Par ailleurs un changement important est intervenu dans la présentation de l'*intégra-*



Un premier bilan

Activité riche :

- modélisation (avec différents modèles accessibles)
- suites géométriques (EP1 ou EP2)
- lien suite-fonction
- fonction d'une variable réelle, points de vue global et local : croissance, taux de variation, dérivée (EDO)
- encadrement : inégalités "physiques", utilité pratique (contrôle de l'erreur)
- prolongements (convexité, modélisation)

Cours sur l'exponentielle : "justifie" l'existence d'une fonction f vérifiant $f' = -\lambda f$, monotonie

Plan

Membres

- Marie Busser (Lycée de Bonneville)
- Damien Jacquemoud (Lycée Frison-Roche à Chamonix)
- Florence Michon (Lycée Frison-Roche à Chamonix)
- Raphaël Rossignol (Univ. Grenoble Alpes)

Motivation du groupe

- Réfléchir à l'introduction des notions centrales d'analyse au lycée
- Depuis sept. 2020, l'exponentielle est introduite en 1ère
- Pour 2020-2021 : choix, adaptation et création de situations d'introduction de l'exponentielle en classe de première

Biblio de départ : brochure de l'IREM de P7 sur l'exponentielle, 2017.

Les programmes de 1967 à l'an 2000

1. puissances fractionnaires
2. dérivée
3. calcul intégral
4. logarithme naturel comme primitive de la fonction inverse s'annulant en 1
5. l'exponentielle comme réciproque du logarithme

Cf. développement historique. Particularité de la base e :
XVIIème-XVIIIème siècle (Florimond de Beaune, Huygens, Leibniz, Euler)

Définir $x \mapsto \exp(x)$

3 voies accessibles au lycée :

- e : seule base b tq la dérivée de $x \mapsto b^x$ en 0 vaille 1. Lié à la résolution de $f(x+y) = f(x)f(y)$ et $f'(0) = 1$ [Puissances]
- exp comme solution de $f' = f$ et $f(0) = 1$ [EDO]
- exp comme réciproque du logarithme naturel [ln]

Rq : [ln] quasi-impossible ; puissances fractionnaires quasi-inexistantes dans les pgms.

Difficultés

Voie [EDO] :

- l'inconnue est une fonction, c'est quelque chose de nouveau,
- démo de l'existence pas vraiment à la portée d'un élève de première.
- la motivation n'est pas évidente a priori : pourquoi s'intéresser à cette équation ?

Difficultés

Voie [Puissances] :

- construction des puissances fractionnaires de nombres réels positifs, aujourd'hui étrangement absent des programmes
- exposants réels : compréhension des nombres réels, approximation par des rationnels, cf. `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/manuscripts/log_exp.pdf`
- pour arriver à l'exponentielle, justifier la base e $\rightarrow$ solution dérivable f de l'équation fonctionnelle vérifiant $f'(0) = 1$ (assez artificiel ?).

Programme

- **Fonction exponentielle**

Contenus

- Définition de la fonction exponentielle, comme unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence et l'unicité sont admises. Notation $\exp(x)$.
- Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ et $\exp(x)\exp(-x) = 1$. Nombre e. Notation e^x.
- Pour tout réel a, la suite (e^{na}) est une suite géométrique.
- Signe, sens de variation et courbe représentative de la fonction exponentielle.

Capacités attendues

- Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.
- Pour une valeur numérique strictement positive de k, représenter graphiquement les fonctions $t \mapsto e^{-kt}$ et $t \mapsto e^{kt}$.
- Modéliser une situation par une croissance, une décroissance exponentielle (par exemple évolution d'un capital à taux fixe, décroissance radioactive).

Exemple d'algorithme

- Construction de l'exponentielle par la méthode d'Euler. Détermination d'une valeur approchée de e à l'aide de la suite $((1+\frac{1}{n})^n)$.

Approfondissements possibles

- Unicité d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- Pour tous réels x et y, $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$.
- La fonction exponentielle est strictement positive et croissante.

Programme

Préambule :

≪ Compte tenu de son importance en mathématiques et dans de nombreux champs disciplinaires, et de ses interactions avec le concept de dérivée, le programme prévoit l'étude de la fonction exponentielle. On donnera des exemples d'utilisation dans les autres disciplines (calculs d'intérêts, dilution d'une solution, décroissance radioactive). En liaison avec les suites géométriques, c'est aussi l'occasion de proposer des modélisations discrètes ou continues de phénomènes d'évolution. ≫

Question au CSP

Existe-t-il un document présentant de manière cohérente les contenus des nouveaux programmes de mathématiques au lycée et les raisons des choix effectués ?

≪ Il n'existe pas au sein du CSP un document bilan présentant les contenus des nouveaux programmes, chaque préambule de programme présente les objectifs du programme. Concernant les raisons et les choix effectués, ces discussions ont eu lieu au sein des GEPP (groupe d'élaboration des projets de programme) de manière confidentielle. Chaque GEPP a été piloté par un inspecteur général de mathématiques qui a présenté les choix et orientations aux représentants syndicales et aux associations disciplinaires. Vous pouvez peut-être contacter l'APMEP pour obtenir les comptes rendus de ces audiences par exemple. ≫

Site de l'APMEP : CR d'audition du CSP, "Le cœur du programme de 1ère est la dérivation" et "Nouveauté : la fonction exponentielle serait introduite dès la première ! il s'agirait d'enrichir les fonctions de référence, en lien avec la dérivation et les suites géométriques".

Question au CSP

Existe-t-il un document présentant de manière cohérente les contenus des nouveaux programmes de mathématiques au lycée et les raisons des choix effectués ?

≪ Il n'existe pas au sein du CSP un document bilan présentant les contenus des nouveaux programmes, chaque préambule de programme présente les objectifs du programme. Concernant les raisons et les choix effectués, ces discussions ont eu lieu au sein des GEPP (groupe d'élaboration des projets de programme) de manière confidentielle. Chaque GEPP a été piloté par un inspecteur général de mathématiques qui a présenté les choix et orientations aux représentants syndicales et aux associations disciplinaires. Vous pouvez peut-être contacter l'APMEP pour obtenir les comptes rendus de ces audiences par exemple. ≫

Site de l'APMEP : CR d'audition du CSP, "Le cœur du programme de 1ère est la dérivation" et "Nouveauté : la fonction exponentielle serait introduite dès la première ! il s'agirait d'enrichir les fonctions de référence, en lien avec la dérivation et les suites géométriques".

Question au CSP

Existe-t-il un document présentant de manière cohérente les contenus des nouveaux programmes de mathématiques au lycée et les raisons des choix effectués ?

≪ Il n'existe pas au sein du CSP un document bilan présentant les contenus des nouveaux programmes, chaque préambule de programme présente les objectifs du programme. Concernant les raisons et les choix effectués, ces discussions ont eu lieu au sein des GEPP (groupe d'élaboration des projets de programme) de manière confidentielle. Chaque GEPP a été piloté par un inspecteur général de mathématiques qui a présenté les choix et orientations aux représentants syndicales et aux associations disciplinaires. Vous pouvez peut-être contacter l'APMEP pour obtenir les comptes rendus de ces audiences par exemple. ≫

Site de l'APMEP : CR d'audition du CSP, "Le cœur du programme de 1ère est la dérivation" et "Nouveauté : la fonction exponentielle serait introduite dès la première ! il s'agirait d'enrichir les fonctions de référence, en lien avec la dérivation et les suites géométriques".

Plan

[EDO] Dilution saline expérimentée par Florence en Terminale

- Phase 1 : individuelle appropriation du problème : 5-10 min
- Phase 2 : groupes de 4 élèves avec trace écrite de la recherche : 30 minutes. Aide à la discrétisation : deux expériences de pensée envisagées :
  - EP1 : arrêt robinet d'eau pure au début de la min, laisse couler robinet de vidange pendant une minute (concentration en sel constante) puis compléter de façon instantanée avec 10L d'eau pure
  - EP2 : arrêt vidange pendant une minute (quantité de sel constante) puis vidange instantanée.
- Phase 3 : synthèse. Hypothèses de travail (EP1 , EP2) ; modélisation mathématique ; validité du résultat : modèle discret peu réaliste ? Nature continue de la situation ; améliorer le résultat donc passage au continu : 15 min
- Phase 4 : recherche par groupe puis collective. Nouveau modèle continu plus précis : 20 min

[EDO] Dilution saline expérimentée par Florence en Terminale

- phase 2 : 5 groupes de 4 ou 3 élèves.
  - 2 groupes ont utilisé EP1
  - 1 groupe a utilisé EP1 et EP2 (l'élève a eu du mal à faire partager son point de vue)
  - 2 groupes voulaient trouver la fonction de type exponentielle mais se sont finalement résignés à utiliser une discrétisation du type EP1.
  - Intervention pour faire verbaliser le type de modèle : EP1 ou EP2 et proposition de l'autre modèle.
  - Tous les groupes ont voulu passer à la seconde pour diminuer l'erreur.
- Phase 3 : Des élèves se seraient contentés de l'approximation à la seconde, d'autres se disent qu'une fonction ce serait mieux.
- Phase 4 : Travail collectif (où ils ont peu participé) . . . continuité et dérivabilité passée sous silence. Elèves étonnés de la simplicité de l'équation différentielle trouvée.

Ccl de Florence : très bon problème après les équations différentielles et avant le calcul intégral. Phase 4 à améliorer dans sa mise en œuvre

[EDO] Dilution saline expérimentée par Florence en Terminale

- phase 2 : 5 groupes de 4 ou 3 élèves.
  - 2 groupes ont utilisé EP1
  - 1 groupe a utilisé EP1 et EP2 (l'élève a eu du mal à faire partager son point de vue)
  - 2 groupes voulaient trouver la fonction de type exponentielle mais se sont finalement résignés à utiliser une discrétisation du type EP1.
  - Intervention pour faire verbaliser le type de modèle : EP1 ou EP2 et proposition de l'autre modèle.
  - Tous les groupes ont voulu passer à la seconde pour diminuer l'erreur.
- Phase 3 : Des élèves se seraient contentés de l'approximation à la seconde, d'autres se disent qu'une fonction ce serait mieux.
- Phase 4 : Travail collectif (où ils ont peu participé) ... continuité et dérivabilité passée sous silence. Elèves étonnés de la simplicité de l'équation différentielle trouvée.

Ccl de Florence : très bon problème après les équations différentielles et avant le calcul intégral. Phase 4 à améliorer dans sa mise en œuvre

[EDO] Dilution saline expérimentée par Florence en Terminale

- phase 2 : 5 groupes de 4 ou 3 élèves.
  - 2 groupes ont utilisé EP1
  - 1 groupe a utilisé EP1 et EP2 (l'élève a eu du mal à faire partager son point de vue)
  - 2 groupes voulaient trouver la fonction de type exponentielle mais se sont finalement résignés à utiliser une discrétisation du type EP1.
  - Intervention pour faire verbaliser le type de modèle : EP1 ou EP2 et proposition de l'autre modèle.
  - Tous les groupes ont voulu passer à la seconde pour diminuer l'erreur.
- Phase 3 : Des élèves se seraient contentés de l'approximation à la seconde, d'autres se disent qu'une fonction ce serait mieux.
- Phase 4 : Travail collectif (où ils ont peu participé) . . . continuité et dérivabilité passée sous silence. Elèves étonnés de la simplicité de l'équation différentielle trouvée.

Ccl de Florence : très bon problème après les équations différentielles et avant le calcul intégral. Phase 4 à améliorer dans sa mise en œuvre

[EDO] Dilution saline expérimentée par Florence en Terminale

- phase 2 : 5 groupes de 4 ou 3 élèves.
  - 2 groupes ont utilisé EP1
  - 1 groupe a utilisé EP1 et EP2 (l'élève a eu du mal à faire partager son point de vue)
  - 2 groupes voulaient trouver la fonction de type exponentielle mais se sont finalement résignés à utiliser une discrétisation du type EP1.
  - Intervention pour faire verbaliser le type de modèle : EP1 ou EP2 et proposition de l'autre modèle.
  - Tous les groupes ont voulu passer à la seconde pour diminuer l'erreur.
- Phase 3 : Des élèves se seraient contentés de l'approximation à la seconde, d'autres se disent qu'une fonction ce serait mieux.
- Phase 4 : Travail collectif (où ils ont peu participé) . . . continuité et dérivabilité passée sous silence. Elèves étonnés de la simplicité de l'équation différentielle trouvée.

Ccl de Florence : très bon problème après les équations différentielles et avant le calcul intégral. Phase 4 à améliorer dans sa mise en œuvre

[EDO] Dilution saline expérimentée par Florence en Terminale

Collègues :

- un matheux va direct à l'accroissement différentiel
- un physicien fait EP1 à la minute et s'en satisfait
- un physicien : on s'embête beaucoup et ce n'est pas de la physique

[EDO] Une intro multi-registres

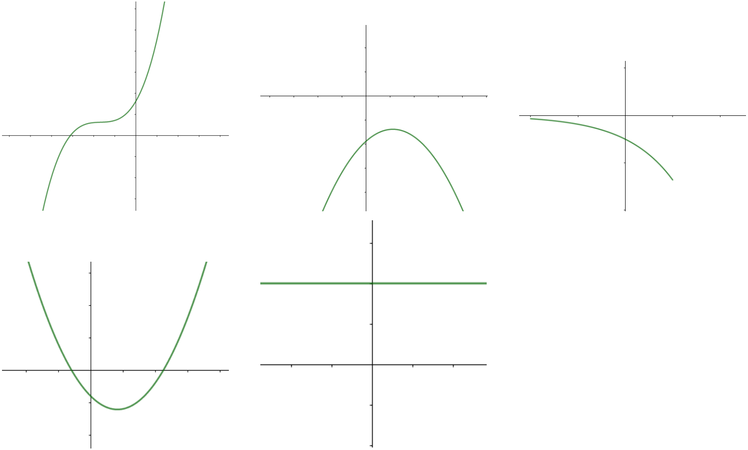
On se pose la question, à quoi "ressemblerait" une fonction f qui vérifie l'égalité : $f' = f$? Autrement dit, une fonction qui a pour dérivée elle-même.

1. Parmi les fonctions que vous connaissez, y aurait-il des fonctions qui répondent à la question ?
2. On ajoute une condition, $f(0) \neq 0$. Celle que vous proposiez sont-elles encore valables ?

[EDO] Une intro multi-registres

Deuxième temps :

3. Parmi les courbes représentatives suivantes d'une fonction f, lesquelles vérifient que $f' = f$? Justifier la réponse.



[EDO] Une intro multi-registres

Principales vertus a priori :

- variation de points de vues sur les fonctions
- variation de registres
- approche qualitative insuffisante ($f' = f^2$)

[EDO] Une intro multi-registres, premier bilan (Marie)

Positif :

- Elèves actifs, enthousiastes de chercher une nouvelle fonction
- Travail sur l'objet fonction en tant que tel + approche par sa représentation graphique d'une fonction inconnue
- Réinvestissement de l'aspect algébrique et graphique de la notion de dérivée
- Discussion sur ensemble de définition, CN ou CS (f et f' de même signe donc $f = f'$), quantification

[EDO] Une intro multi-registres, premier bilan (Marie)

Négatif :

- Peu de prises d'initiatives de la part de élèves. Csq : trop de guidage de l'enseignant. Cause : manque de temps et d'habitude ?
- Pas de traces de recherches des élèves
- Apports théoriques post séance trop abruptes (relation fonctionnelle + notation puissance)

Surprenant : aucun élève ne s'est demandé pourquoi on cherchait une telle fonction !

[Puissances] Croissance d'une population de bactéries

Mariza Grand'henry-Krysinska et Maggy Schneider-Gilot (Petit x n° 105 – 2017), cf. aussi Rezard (Repères-IREM, 1994)

1. Une population de bactéries double toutes les heures. Comment peut-elle évoluer pendant chacune de ces heures ? Proposer un graphique possible de cette évolution.
2. On ajoute l'hypothèse suivante : le doublement du nombre de bactéries d'heure en heure a lieu peu importe le début de l'heure. Les graphiques que vous avez proposés décrivent-ils un tel phénomène de croissance ?
3. On ajoute l'hypothèse supplémentaire selon laquelle la population de bactéries augmente chaque fois dans un même rapport sur des intervalles de temps de même durée. Les graphiques proposés par vous décrivent-ils un tel phénomène de croissance ? Pourquoi ?
4. Dans quel rapport augmenterait cette population de bactéries de demi-heure en demi-heure, de quart d'heure en quart d'heure, de $n^{ème}$ d'heure en $n^{ème}$ d'heure ? Augmente-t-elle chaque fois dans un même rapport sur des intervalles de temps de même durée ?

[Puissances] Croissance d'une population de bactéries

Mariza Grand'henry-Krysinska et Maggy Schneider-Gilot (Petit x n° 105 – 2017), cf. aussi Rezard (Repères-IREM, 1994)

1. Une population de bactéries double toutes les heures. Comment peut-elle évoluer pendant chacune de ces heures ? Proposer un graphique possible de cette évolution.
2. On ajoute l'hypothèse suivante : le doublement du nombre de bactéries d'heure en heure a lieu peu importe le début de l'heure. Les graphiques que vous avez proposés décrivent-ils un tel phénomène de croissance ?
3. On ajoute l'hypothèse supplémentaire selon laquelle la population de bactéries augmente chaque fois dans un même rapport sur des intervalles de temps de même durée. Les graphiques proposés par vous décrivent-ils un tel phénomène de croissance ? Pourquoi ?
4. Dans quel rapport augmenterait cette population de bactéries de demi-heure en demi-heure, de quart d'heure en quart d'heure ? De $n^{\text{ème}}$ d'heure en $n^{\text{ème}}$ d'heure ? Augmente-t-elle dans un même rapport sur des intervalles de temps de même durée ?

[Puissances] Croissance d'une population de bactéries

Mariza Grand'henry-Krysinska et Maggy Schneider-Gilot (Petit x n° 105 – 2017), cf. aussi Rezard (Repères-IREM, 1994)

1. Une population de bactéries double toutes les heures. Comment peut-elle évoluer pendant chacune de ces heures ? Proposer un graphique possible de cette évolution.
2. On ajoute l'hypothèse suivante : le doublement du nombre de bactéries d'heure en heure a lieu peu importe le début de l'heure. Les graphiques que vous avez proposés décrivent-ils un tel phénomène de croissance ?
3. On ajoute l'hypothèse supplémentaire selon laquelle la population de bactéries augmente chaque fois dans un même rapport sur des intervalles de temps de même durée. Les graphiques proposés par vous décrivent-ils un tel phénomène de croissance ? Pourquoi ?
4. Dans quel rapport augmenterait cette population de bactéries de demi-heure en demi-heure, de quart d'heure en quart d'heure ? De $n^{\text{ème}}$ d'heure en $n^{\text{ème}}$ d'heure ? Augmente-t-elle dans un même rapport sur des intervalles de temps de même durée ?

[Puissances] Croissance d'une population de bactéries

Mariza Grand'henry-Krysinska et Maggy Schneider-Gilot (Petit x n° 105 – 2017), cf. aussi Rezard (Repères-IREM, 1994)

1. Une population de bactéries double toutes les heures. Comment peut-elle évoluer pendant chacune de ces heures ? Proposer un graphique possible de cette évolution.
2. On ajoute l'hypothèse suivante : le doublement du nombre de bactéries d'heure en heure a lieu peu importe le début de l'heure. Les graphiques que vous avez proposés décrivent-ils un tel phénomène de croissance ?
3. On ajoute l'hypothèse supplémentaire selon laquelle la population de bactéries augmente chaque fois dans un même rapport sur des intervalles de temps de même durée. Les graphiques proposés par vous décrivent-ils un tel phénomène de croissance ? Pourquoi ?
4. Dans quel rapport augmenterait cette population de bactéries de demi-heure en demi-heure, de quart d'heure en quart d'heure ? De $n^{\text{ème}}$ d'heure en $n^{\text{ème}}$ d'heure ? Augmente-t-elle dans un même rapport sur des intervalles de temps de même durée ?

[Puissances] Croissance d'une population de bactéries

Remarques a priori :

- orienté puissances fractionnaires et équation fonctionnelle.
- A compléter pour des exposants réels
- Prolongation : irrationalité de $\ln 3 / \ln 2$, autres bases

Plan

À distance ...

- Moodle (Caseine) : dépôt d'articles (Perusall), de CR ... vitrine ? `https://moodle.caseine.org/course/view.php?id=657`
- Richesse des publications IREM, travail d'adaptation. Diffusion ? Prépas Capes/Agreg ? Echange sur la toile ? Forum type stack exchange ? `https://matheducators.stackexchange.com/`
- Travail solitaire en lycée. Labomaths ?
- Manuels décevants (versions élève). Manuel collaboratif ?

Objectifs 2021-2022

- Experimentations exponentielle, prolongements (modélisation, calcul de e, choix de la discrétisation pour une tolérance donnée, temps négatifs)
- Puissances fractionnaires
- Contexte lié aux fonctions abstraites (vs registre algébrique)
- Modélisation en analyse
- Cohérence sur le lycée
- Recrutement ?