

Empilement optimal de jetons

IREM de Grenoble, groupe SiRC

2019

Le problème analysé dans cet article a été étudié par un groupe de recherche de l'IREM de Grenoble, sur une suggestion d'un collègue de l'équipe de recherche Maths-à-Modeler, Hervé Hocquard (université de Bordeaux). Les auteurs de ce travail collectif sont Emmanuel Beffara, Valentin Buat-Ménard, Grégoire Charlot, Monique Decauwert, Denise Grenier, Hervé Hocquard, Rémi Molinier. Il a été expérimenté et analysé à de nombreuses reprises dans des cadres très différents (élèves et étudiants), Fête de la science, formation d'enseignants et présenté dès 2019 à la CORFEM (Beffara & Buat-Ménard, 2019). Nous donnons ici une résolution détaillée incluant les pistes de recherche qui permettent de faire des conjectures durant l'exploration de problème et de trouver des résultats partiels, et une résolution mathématique qui montre toutes les subtilités d'une preuve complète.

Présentation de Maths-à-Modeler et du groupe SiRC

Maths-à-Modeler (équipe de recherche de l'Institut Fourier, université de Grenoble, fondée en 2003) est actuellement composée de chercheurs de différentes communautés scientifiques : mathématiques discrètes, didactique des mathématiques, sciences de l'information et de la communication. Depuis de nombreuses années, le groupe de recherche « Situations de Recherche pour la classe » (SiRC) de l'IREM de Grenoble construit, expérimente et analyse des problèmes dont le principe est de mettre les élèves dans une activité mathématique proche de celle d'un chercheur, avec pour objectif l'apprentissage des savoir-faire fondamentaux de la démarche scientifique : expérimenter, raisonner, conjecturer, prouver, transmettre. Les chercheurs et enseignants proposent des problèmes qui serviront de base aux SiRC. Le modèle SiRC est décrit de manière précise par Grenier et Payan (1998, 2003). Certaines situations ont fait l'objet de travaux de thèse. Les situations que nous avons étudiées ne vérifient pas forcément tous les éléments de caractérisation de notre modèle SiRC, mais celui-ci nous sert de référence épistémologique et didactique. Les caractéristiques et contraintes d'une SiRC impliquent des organisations didactiques spécifiques. Nos équipes de recherche s'attachent depuis des années à l'étude des conditions de transmission de ces situations. D'autres situations sont disponibles dans l'ouvrage (Groupe Logique, Raisonnement et SiRC, 2017), avec leur résolution détaillée et des analyses didactiques de leur fonctionnement en classe.

Références

- Beffara, E., & Buat-Ménard, V. (2019). Empilement de jetons. *Actes du colloque CORFEM 2019. XX-VIème colloque CORFEM pour les professeurs et formateurs de mathématiques*, Strasbourg, France. <https://www.univ-irem.fr/actes-du-colloque-corfem-2019>
- Grenier, D., & Payan, C. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 59-99.
- Grenier, D., & Payan, C. (2003). Situation de recherches « en classe » : Essai de caractérisation et proposition de modélisation. In V. Durand-Guerrier & C. Tisseron (Éds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques : Année 2002* (p. 189-203). IREM, Université Paris VII : A.R.D.M.
- Groupe Logique, Raisonnement et SiRC. (2017). *Situations de recherche pour la classe : Pour le collège et le lycée... et au-delà* (IREM de Grenoble). <https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/themes/raisonnement-logique-situations-de-recherche-pour-la-classe/situations-de-recherche-pour-la-classe-498450.kjsp?RH=413148517470877>

1 Problème

Sur une grille, disons 5×5 , on place une pièce sur chaque case. On peut déplacer une pile de pièces présente sur une case vers une case adjacente si celle-ci contient une pile de taille supérieure (ou égale). Combien de piles peut-on faire au minimum ?

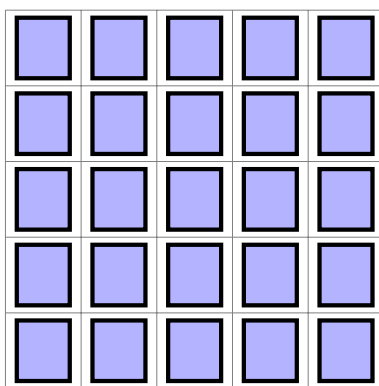


FIGURE 1 – Grille 5×5 recouverte par 25 pièces bleues

2 Étapes de recherche - Atelier

2.1 Matériel

Pour 2 à 5 participants, nous avons besoin :

- d'une grille (damier) de taille au moins 5×5 (jusqu'à 7×7 ou 8×8 maximum, ou même 6×8),
- de jetons ou pions empilables qui entrent dans les cases,
- d'un cahier ou d'une feuille pour prendre des notes.

2.2 Mise en place

Présentation du problème et distribution du matériel. Explication des termes si besoin (deux cases sont voisines si elles ont un bord en commun).

2.3 Découverte des règles de déplacement

Afin de se familiariser avec les contraintes de déplacement des piles de pièces on demande aux élèves le nombre minimum de tours qu'ils obtiennent sur une grille 5×5 . Rapidement les élèves obtiennent quatre tours puis trois. Pour chaque groupe il faut s'assurer qu'il savent obtenir le nombre de tours annoncé.

Il faut titiller la curiosité du public en leur demandant si on peut faire mieux que trois tours...en leur faisant remarquer pour certains qu'ils ont eu du mal à passer de quatre tours à trois tours. Ce n'est donc pas facile de passer de trois tours à deux tours ou moins.

On fera remarquer aux élèves que faute de mieux, nous avons pour l'instant l'encadrement suivant :

$$1 \leq \text{nombre de tours} \leq 3$$

Ce à quoi les élèves répondront en cœur que le nombre cherché est 2...

2.4 Les petites grilles

Afin de simplifier le problème initial on décide de réduire la taille des grilles.

Que se passe-t-il sur des petites grilles carrées 2×2 , 3×3 , 4×4 ?

En cherchant un peu, on arrive à faire une seule pile pour ces trois types de grilles.

Ceci renforce le questionnement de la grille 5×5 et tous les groupes sont convaincus « qu'on peut le faire en deux tours ».

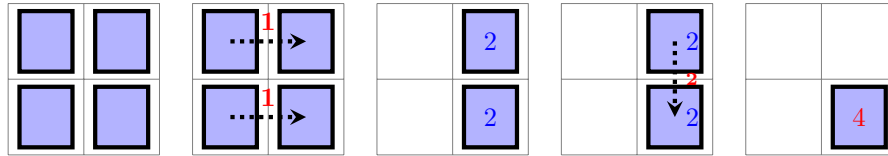


FIGURE 2 – Grille 2×2

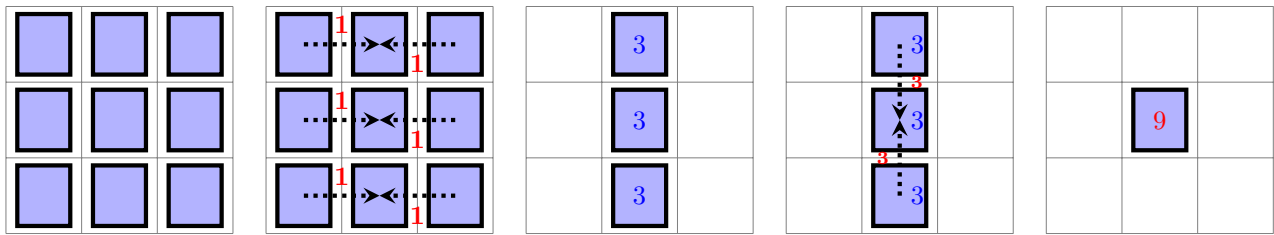


FIGURE 3 – Grille 3×3

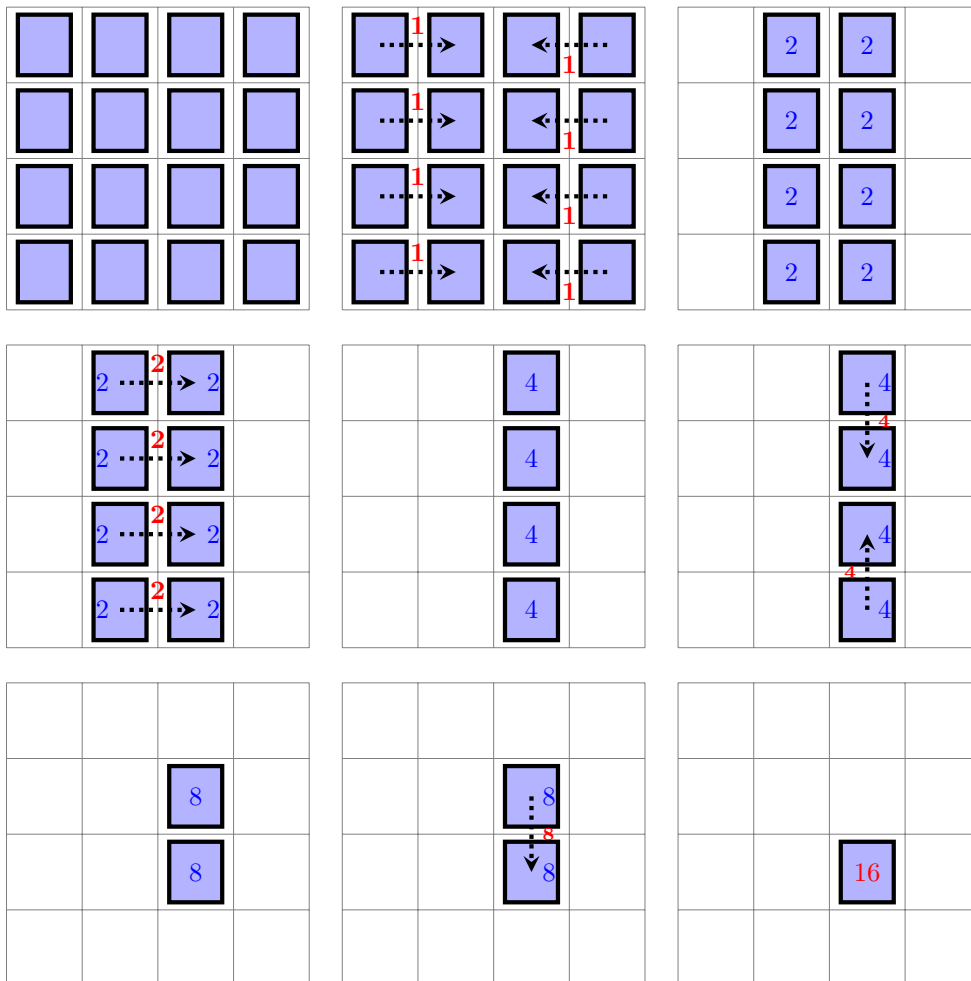


FIGURE 4 – Grille 4×4

Est-ce que certains utilisent le résultat des grilles 2×2 pour faire la grille 4×4 ? (argument de « pavage » par des grilles qu'on sait résoudre)

2.5 Les grilles $1 \times n$: les rubans

Que se passe-t-il sur des rubans de taille n (*i.e.* grilles $1 \times n$) en supposant que chaque case contient exactement 1 jeton ? On remarque très rapidement qu'une pile est possible pour les rubans jusqu'à une longueur 4, sinon il faut plusieurs piles.

2.5.1 Borne supérieure

On peut leur faire chercher le nombre minimum de piles pour des rubans de taille 2 jusqu'à 13 ou 14, en rajoutant une case à la fin de chaque tentative. On pourra inciter les élèves à relever leurs résultats dans un tableau.

Suivant l'âge des élèves, on trouvera que le nombre « minimum » de tours est d'au plus $\lceil n/4 \rceil$ ou plus simplement on utilisera la division euclidienne par 4. En effet, si le reste de cette division est nul alors le nombre de tours sera égal au quotient de cette division euclidienne sinon il sera égal au quotient+1.

Quels sont les arguments utilisés pour convaincre qu'on ne peut pas faire moins de piles ?

2.5.2 Taille de la plus grande tour sur un ruban

On remarque que chaque case du ruban a au plus deux voisins, seules les extrémités n'ont qu'un seul voisin.

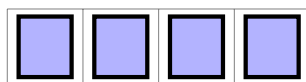


FIGURE 5 – Ruban de longueur 4

Si on essaie de construire notre tour de taille maximum sur une des extrémités alors on obtiendra deux tours de taille 2. En effet, si on construit une tour sur une extrémité alors on déconnecte le ruban.

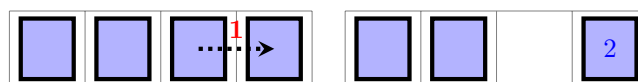


FIGURE 6 – Ruban de longueur 4...mauvaise stratégie

Par contre, on peut construire nos tours sur une case qui a deux voisins, soit sur la deuxième case soit sur la troisième case.



FIGURE 7 – Ruban de longueur 4...bonne stratégie

On remarque sur la Figure 8 ci-dessous que la hauteur maximum d'une tour sur un ruban de taille n ($n \geq 4$) est de 4. En effet, si on essaie de maximiser la taille de la tour sur la case rouge alors cette case a ses deux voisins donc elle est de taille 1. Ensuite, d'après les règles de déplacement, une des deux cases voisine est de taille 1. L'autre est de taille au plus 2. On déplacera le jeton sur la tour rouge et la deuxième tour de taille au plus 2 sur cette nouvelle tour de taille 2. On obtient alors une tour de taille au plus 4. Puisqu'on arrive à construire une tour de taille 4 (Cf. Figure 7), alors la tour de taille maximum est d'au moins 4. En conclusion, la taille maximum d'une tour sur un ruban de taille n ($n \geq 4$) est 4.

Que nous apprend ce résultat ?

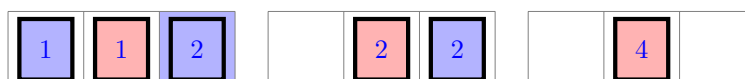


FIGURE 8 – Taille de la plus grande tour sur un ruban

2.5.3 Borne inférieure

On vient de prouver que la taille maximum d'une tour est de 4 ce qui implique que le nombre minimum de tours qu'on obtiendra sur un ruban de taille n ($n \geq 4$) est d'au moins $\lceil \frac{n}{4} \rceil$.

2.5.4 Conclusion

Le nombre minimum de tours qu'on obtiendra sur un ruban de taille n ($n \geq 4$) est égal à $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$.

On pourra obtenir ce résultat en utilisant l'argument de la division euclidienne par 4. Le reste de la division euclidienne nous donne la taille de la tour qui n'est pas de taille 4.

2.5.5 Remarques

On peut obtenir le même résultat en appliquant ce raisonnement sur des rubans de longueur n mais cette fois-ci en supposant que chaque case contient le même nombre de jetons k avec $1 \leq k \leq 4$. Le nombre minimum de tours qu'on obtiendra sur un ruban de taille n ($n \geq 4$) dont chaque case contient exactement k jetons est égal à $\left\lceil \frac{n}{4} \right\rceil$. La taille maximum de la tour qu'on peut obtenir est 16 (Cf. Figure 4).

On pourra discuter de la borne supérieure de k . Une fois encore par les mêmes arguments du nombre de voisins on ne peut pas avoir $k > 4$.

2.6 Taille de la plus grande tour quelle que soit la taille de la grille

Dans cette partie on s'intéresse au nombre maximum de jetons pouvant être empilés sur une même case. On utilisera le même argument que pour les rubans.

Pour ne pas que les élèves se focalisent sur la grille de taille 5×5 on leur dira qu'on considère une grille de taille 1000×1000 ...la taille maximum d'une tour est la même pour toutes les grilles à partir d'une grille 4×4 .

On cherche à maximiser la taille de la tour située sur la case rouge (Cf. Figure 9). Pour ceux qui n'ont pas compris le raisonnement utilisé pour les rubans, il faut leur rappeler que le nombre de voisins a une influence.

Comment les jetons arrivent sur la case cible rouge?

Il y a 1 jeton au départ sur la case cible. Le premier voisin qui donne ses jetons en donne au maximum 1 (il y en a donc 2 sur la case cible), le deuxième en donne au maximum 2 (il y en a donc 4 sur la case cible), le troisième en donne au maximum 4 (il y en a donc 8 sur la case cible), etc. Au final, la taille maximum de la tour est d'au plus 16 ($= 1 + 1 + 2 + 4 + 8$) jetons. On peut même affirmer que la taille maximum de la tour est de 16 car on arrive à obtenir des tours de taille 16 notamment pour la grille 4×4 (ce qui veut dire que la tour de taille maximum est constituée d'au moins 16 jetons).

On fera remarquer aux élèves que $16 = 2^4 = 2^{\text{nombre de voisins}}$.

Est-ce que ça veut dire qu'on y arrivera toujours? NON (Notion de *borne inférieure* de la solution). Mais ça donne une borne : on ne pourra pas mettre plus de 16 jetons sur une case pour une grille.

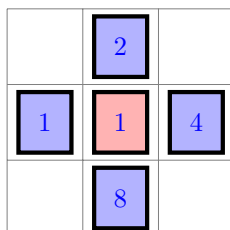


FIGURE 9 – Taille de la plus grande tour quelle que soit la taille de la grille

2.7 Borne inférieure pour une grille $n \times n$

Que nous apprend la déduction précédente pour la résolution de la grille 5×5 ? Au moins 2 piles sont **nécessaires**.

On peut alors réduire l'encadrement obtenu dans la section 2.3 :

$$2 \leq \text{nombre de tours} \leq 3$$

On peut continuer en déduisant un nombre de piles nécessaires pour les grilles 6×6 , 7×7 , etc. en divisant le nombre de jetons (donc de cases) par 16 (on a au moins $\left\lceil \frac{n}{16} \right\rceil$ tours). Et éventuellement déterminer les grilles pour lesquelles on obtient le nombre minimum de tours (par exemple, la grille 8×8).

2.8 Retour sur la grille 5×5

Dans cette partie, nous allons montrer qu'on ne peut pas obtenir deux tours pour une grille 5×5 . Nous vous proposons une preuve guidée qui a été testée sur une classe de première S.

	A	B	C	D	E
1					
2					
3					
4					
5					

FIGURE 10 – Grille 5×5

1. Déterminez la distance de déplacement maximale d'un jeton vers sa « tour cible ».
2. Montrez que les jetons en A1 et E5 (ou en E1 et A5) ne se déplacent pas sur la même tour.
3. En supposant qu'on a uniquement deux tours, montrez que l'une d'elle se trouve en B2, D2, B4 ou D4 (montrez que les deux tours ne se trouvent pas sur la croix centrale).
4. En supposant que l'une des deux tours se trouve en B2, montrez que la deuxième tour ne se trouve pas en D4.
5. On suppose désormais que la deuxième tour se trouve en D3. Montrez que la tour en D3 est de taille 9.
6. Comptez le nombre de jetons qui se déplacent sur D3, c'est-à-dire ceux qui ne se déplacent pas sur B2.
7. Conclusion...

Solution

1. Si un jeton arrive sur une case à distance d alors la tour sur cette case est de taille minimum 2^d . Donc $d \leq 4$ car la tour de taille maximum est de 16 jetons.
2. Supposons que A1 et E5 vont sur la même tour. Par 1 cette tour est en A5, B4, C3, D2 ou E1 (distance 4 des deux). La case par laquelle arrive A1 est de taille 8 et celle de E5 aussi (par 1). On voit que ce n'est pas la même case donc la tour à deux cases 8 voisines, impossible.
3. Supposons qu'on a seulement 2 tours. $25 - 16 = 9 > 8$ donc les deux tours ont leurs 4 voisins qui se déplacent sur elles (sinon la tour max est de taille 8 car elle a moins de 3 voisins). Les deux tours sont dans le 3×3 central.
4. On ne peut pas mettre les deux dans le + central car sinon les tours partagent C3 or on a dit que les voisins se déplacent sur elles - pas de partage possible.
5. Donc on a au moins une tour dans un coin du 3×3 disons B2. L'autre tour est donc en D3, D4 ou C4 (car pas de partage de voisins).
6. Si elle est en D4, alors comme A5 et E1 ne sont pas sur la même tour, chacune des deux tours a soit A5 soit E1. C'est à dire les deux tours ont un jeton à distance 4. On a alors deux tours de taille 16 par 1) - impossible.
7. Donc l'autre tour est en D3 ou C4. Par symétrie disons D3. D3 et A5 sont à distance $d > 4$ donc A5 va sur B2 qui est donc de taille 16 (distance 4). Ainsi D3 est de taille 9. On compte les jetons qui ne peuvent pas aller en B2 (et donc vont en D3). On a D3, D2, D4, C3 et E3 car la tour a ses 4 voisins. E1 va sur D3 (car A5 va sur B2) donc E2 aussi (connexité ou pas de jeton isolé). Ensuite E4, E5 et D5 sont trop loin de B2 pour être sur cette tour. Si tu comptes ça fait 10 jetons pour une tour de 9 - impossible.

2.9 Quelques pavages...

Les quatre pavages ci-dessous permettent d'obtenir trois tours.

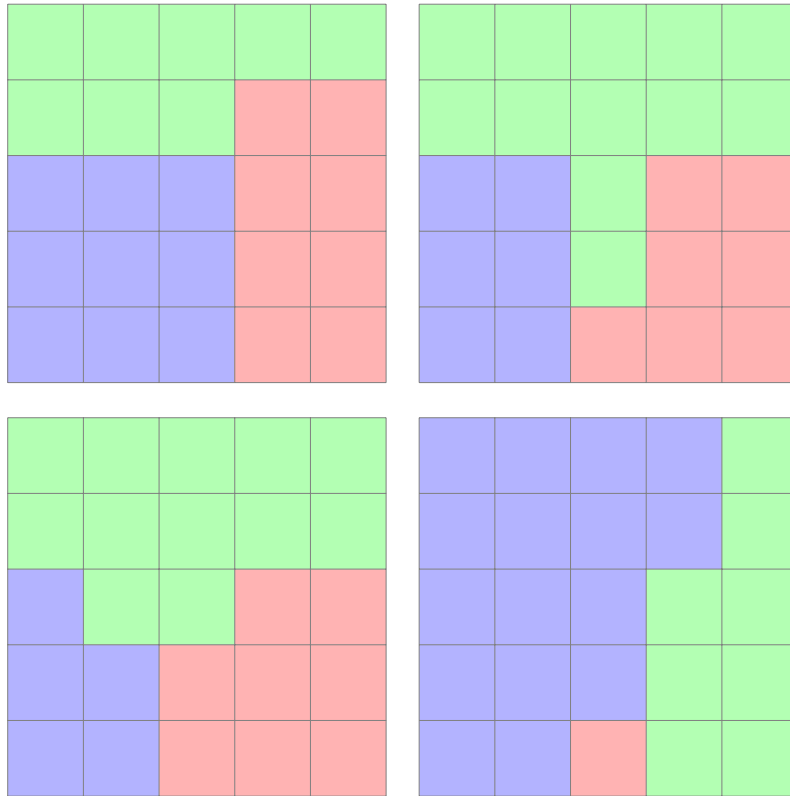


FIGURE 11 – Quelques pavages pour obtenir trois tours

3 Pour aller plus loin...

Pour avancer encore plus on peut passer sur d'autres grilles (grille du roi : on utilise les voisins en diagonale aussi, grille triangulaire : 3 voisins, grille hexagonale : 6 voisins). Quels sont les changements ?

Grille hexagonale : on devrait théoriquement pouvoir emplir 2^6 jetons sur une même case, mais cela est impossible ! La borne supérieure du maximum n'est pas toujours atteinte.