

Empilement optimal de jetons

Groupe SiRC de l'IREM de Grenoble

Juin 2019

Résumé

Cet atelier présente un problème basé sur un jeu de type solitaire consistant à déplacer des piles de jetons sur une grille selon une règle donnée. L'étude de questions portant sur l'issue possible du jeu met les élèves en situation de recherche et mobilise différents types de raisonnements. Nous présentons ici un compte-rendu d'expérimentation de cette situation en classe ainsi qu'une analyse mathématique et didactique des problèmes posés.

Note Le problème analysé dans cet article a été étudié par un groupe de recherche de l'IREM de Grenoble, sur une suggestion d'un collègue de l'équipe de recherche Maths-à-Modeler, Hervé Hocquard (université de Bordeaux). Les auteurs de ce travail collectif sont Emmanuel Beffara, Valentin Buat-Ménard, Grégoire Charlot, Monique Decauwert, Denise Grenier, Hervé Hocquard, Rémi Molinier. Il a été expérimenté et analysé à de nombreuses reprises dans des cadres très différents (élèves et étudiants), Fête de la science, formation d'enseignants et présenté en 2019 au colloque de la Corfem. Ce texte a été publié dans les actes du colloque (Beffara & Buat-Ménard, 2019).

1 Une nouvelle SiRC : l'empilement de jetons

1.1 Situations de Recherche en Classe (SiRC)

En mathématiques comme dans toute discipline scientifique, le savoir se construit par la résolution de problèmes et la recherche de solutions à des questions. L'activité du chercheur est constituée de tâches et de moments différents tels que l'expérimentation, la résolution de cas particuliers, l'étude de conjectures... Être bloqué, se tromper, se fourvoyer font partie du processus de construction des connaissances. Les savoir-faire associés sont constitutifs de la démarche expérimentale en sciences et ne peuvent pas être réduits à des techniques ou à des méthodes. En effet, en situation de recherche, il faut se permettre une certaine liberté et une part d'imprévu pour réussir : choisir le cadre de résolution, modifier éventuellement les règles ou les données pour expérimenter, définir les objets et s'autoriser à modifier la question initiale. Tous ces savoirs et savoir-faire sont aux fondements des mathématiques, ils figurent d'ailleurs explicitement parmi les objectifs des programmes de collège et lycée.

Les problèmes de recherche ne peuvent évidemment pas être dévolus tels quels : il faut inventer des situations spécifiques, c'est-à-dire des problèmes adaptés, et trouver la meilleure mise en scène adaptée au contexte de classe. C'est là l'objectif des *situations de recherche pour la classe* (SiRC), qui mettent en avant l'*enjeu de vérité* (alors qu'en classe, ce qui est à prouver est la plupart du temps annoncé comme vrai), l'aspect *social* (même s'il est local au groupe d'élèves accompagné) et l'aspect *recherche* (alors que dans les manuels et les pratiques, il est attendu que pour résoudre un problème et démontrer, « on ne doit utiliser que les propriétés du cours ou celles d'une liste donnée »). Une SiRC est caractérisée par les aspects suivants (Grenier & Payan, 2003) :

- La question est appréhendable et éveille la curiosité. Il n’y a pas de pré-requis technique, on entre rapidement dans le problème par des stratégies initiales faciles d’accès.
- La question n’induit pas l’utilisation d’une méthode de résolution privilégiée, plusieurs stratégies peuvent amener à la résolution du problème.
- La situation se prête facilement à l’expérimentation, par exemple par des stratégies du type essai/erreur ou étude de petits cas.
- L’expérience amène naturellement à formuler des conjectures et à se faire une intuition sur la question (sans nécessairement fournir une résolution complète).
- L’expérience suggère de nouvelles questions, des variantes du problème de départ, des généralisations (y compris certaines pour lesquelles l’enseignant n’a pas de solution).

Bien entendu, ces critères sont à nuancer en fonction des objectifs, des goûts, des cultures et des intérêts des participants.

Le groupe « Logique, raisonnement et SiRC » de l’IREM de Grenoble travaille depuis plusieurs années à la conception et à l’expérimentation de telles situations. Une brochure regroupant différentes situations a été produite (Groupe Logique, Raisonnement et SiRC, 2017).

1.2 Présentation du jeu

L’empilement de jetons est une situation étudiée par Hervé Hocquard de l’université de Bordeaux (réf?). Il nous a communiqué un travail mené avec des lycéens et les éléments de démonstration qu’il a pu aborder avec eux. Nous nous sommes emparés de cette situation pour l’étudier et la proposer dans des ateliers avec des élèves (école et collège), des étudiants et des adultes (50 ans des Irem, ...).

Le jeu se déroule sur une grille avec des cases carrées (la taille et la forme de la grille sera discutée, on pourrait aussi envisager des grilles pavées autrement qu’avec des carrés). On dispose un jeton sur chaque case de la grille. On peut déplacer le contenu d’une case sur une case adjacente si cette dernière contient une pile de pièce de taille supérieure ou égale à celle de la case initiale. L’objectif est de déplacer les jetons sur la grille afin que la configuration finale comporte le moins de piles possibles.

Pour l’atelier de la Corfem ainsi que pour les premières manipulations dans les autres ateliers ou séquences en classe, nous partons d’une grille carrée 5 par 5 (voir annexe 1).

1.3 Caractéristiques de cette SiRC

L’empilement de jetons correspond à la description d’une SiRC et traite d’un problème d’optimisation dans l’ensemble des entiers positifs \mathbb{N} . Les règles du jeu sont néanmoins relativement complexes. La manipulation requiert un certain temps pour gommer les erreurs dans les déplacements qui se font parfois par inattention, surtout dans les grandes grilles.

2 Déroulement de la phase de manipulation dans l’atelier proposé

Les consignes étant exposées, nous proposons aux membres de l’atelier de s’attaquer au problème tel qu’il est présenté dans l’annexe 1 pour une grille 5×5 . Les participants sont en groupes de 3 à 4 personnes. Lors de la phase de recherche, nous pouvons observer des démarches différentes. Dans un groupe, deux personnes se trompent de consigne et cherche la hauteur maximale d’une pile ce qui, comme nous le verrons, est en lien avec le problème posé. Dans un autre groupe, un membre propose de prendre le problème à l’envers et de déconstruire des piles

de taille n pour observer les remplissages de la grille que l'on peut obtenir. Les autres groupes arrivent assez vite à trouver 4 piles puis 3 piles. La question se pose ensuite de savoir si 3 est un minimum.

Mise à part l'erreur de consigne, les participants n'éprouvent pas les mêmes difficultés d'assimilation des consignes que des élèves de collège. Ils entrent d'eux-mêmes dans un questionnaire sur le minimum, et les stratégies à adopter, principalement à partir de reconnaissance de « formes ». En effet, des participants remarquent qu'une sous-grille 4×4 permet d'obtenir une seule pile. Ils essaient alors de vérifier s'il est possible de regrouper la forme restante en moins d'une pile, ce qui est vite admis comme étant impossible.

Lors des discussions, nous évoquons la grille 1×5 qui permet de se rendre compte que la forme compte énormément puisque c'est une grille de petite taille sur laquelle il est néanmoins impossible d'avoir une seule pile.

Le temps étant compté, nous proposons une réorientation du problème avec les questions suivantes :

- Quel est le nombre maximum de jetons que l'on peut obtenir sur une pile ?
- Quel est le chemin maximum qu'un jeton peut parcourir avant d'appartenir définitivement à une pile ?

Après un nouveau temps de recherche, nous faisons le bilan et répondons aux deux questions dont les réponses sont des pierres angulaires de la preuve que le minimum est bien de 3 piles. On ne peut placer qu'un maximum de 16 jetons dans une pile, ce qui permet d'exclure d'obtenir une seule pile sur une grille 5×5 (puisque'elle contient 25 cases). Un jeton parcourt un maximum de 4 cases, ce qui permettra de montrer que l'on ne peut pas obtenir un minimum de 2 piles (cf. les éléments de preuve).

3 Éléments de preuve pour la solution du problème

Dans cette partie, on présente quelques observations générales sur le problème et la résolution complète pour le cas d'une grille 5×5 .

3.1 Observations sur la taille des piles

En s'intéressant à l'évolution au cours du jeu du nombre de jetons sur une case fixée, on peut établir les résultats suivants :

- Ce nombre ne peut que croître (quand la pile d'une case voisine est déplacée sur la case considérée) ou passer définitivement à 0 (quand on déplace le contenu sur une case voisine).
- Lorsque ce nombre croît, il ne peut pas faire plus que doubler, puisque la pile qui est déplacée sur la case considérée doit avoir un nombre de jetons égal ou inférieur.
- Ce nombre croît au plus 4 fois, puisqu'on ne peut déplacer les jetons d'une case donnée vers une case voisine qu'au plus une fois au cours du jeu et que chaque case a 4 voisines au plus.
- Par le même argument, les cases dans les coins ne peuvent avoir plus de 4 jetons, et les cases qui sont sur un bord mais pas dans un coin ne peuvent avoir plus de 8 jetons.

Par conséquent, en fin de jeu, chaque case occupée contient au plus 16 jetons. C'est un maximum : toutes les valeurs entre 1 et 16 sont possibles, on verra des exemples de cela dans la suite.

Ce résultat donne déjà une minoration du nombre de piles sur le plateau : pour un tableau de taille $m \times n$, on a au moins $\lceil mn/16 \rceil$ cases occupées, où $\lceil x \rceil$ désigne la partie entière supérieure de x .

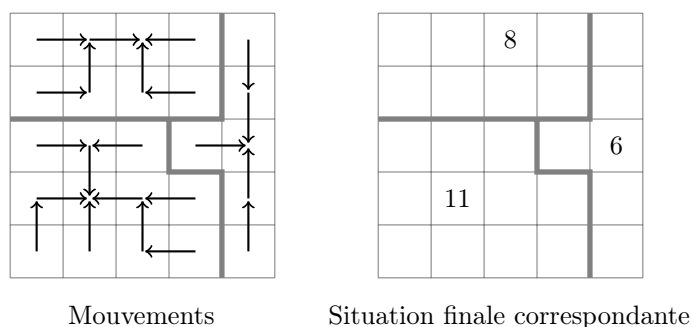


FIGURE 1 – Une solution à trois piles pour la grille 5×5

3.2 Distances parcourues par les jetons

On raisonne maintenant sur la région de la grille contenant initialement les jetons qui se retrouve sur une pile donnée à la fin de la partie. Pour cela, on reprend les observations sur la taille des piles, mais en s'intéressant à un jeton particulier et aux piles où il se trouve successivement.

- Si ce jeton se trouve sur une pile de taille n puis que cette pile est déplacée sur une case voisine, alors cette case voisine contient au moins n jetons elle aussi. La nouvelle pile contenant ce jeton particulier contient après déplacement au moins $2n$ jetons. En d'autres termes, la pile contenant un jeton particulier voit sa taille au moins doubler à chaque déplacement du jeton.
- Comme une pile ne peut jamais dépasser $16 = 2^4$ jetons, cela implique qu'un jeton donné ne peut jamais se déplacer plus de 4 fois. La région qui se trouve rassemblée sur une pile donnée à la fin ne contient donc que des jetons situés à distance au plus 4 de la position finale de la pile (en comptant comme distance entre deux cases le nombre de pas nécessaire pour passer d'une case à l'autre).
- Si un jeton s'est déplacé 4 fois, il se trouve en fin de compte sur une pile d'exactly 16 jetons, qui en contenait nécessairement 8 avant l'arrivée de ce jeton.
- Ces arguments impliquent d'autre part que dans une pile donnée, il y a au plus un jeton qui a été déplacé 4 fois. Les autres jetons de la pile ont été déplacés au plus 3 fois.

3.3 Résolution pour la grille carrée de côté 5

Dans le cas d'un plateau carré de taille 5×5 , comme il y a 25 cases, l'observation sur la taille des piles montre qu'il doit y avoir en fin de jeu au moins 2 cases occupées.

En explorant les mouvements possibles, on peut trouver des positions finales à 3 piles. La figure 1 donne un exemple (on n'y représente que les déplacements effectués, sans préciser dans quel ordre ils sont faits parce que cela n'a pas d'influence sur le résultat). On va maintenant démontrer que les solutions à 3 piles sont optimales, c'est-à-dire qu'il est impossible de finir avec seulement deux piles de jetons sur la grille de taille 5×5 . Pour cela, on raisonne par l'absurde : on fait l'hypothèse qu'il existe une situation à deux piles et on démontre que cette hypothèse entraîne une absurdité, c'est-à-dire une proposition fausse.

3.3.1 Positions possibles des deux piles

On commence par observer que, s'il n'y a que deux piles, elles ne peuvent pas être placées n'importe où.

- Les deux piles ont au plus 16 jetons chacune et leur somme fait 25, elles ont donc au moins 9 jetons chacune. D'après les observations précédentes, cela interdit qu'elles soient placées dans un coin ou sur un bord :

5	X	X	X	X	X
4	X				X
3	X				X
2	X				X
1	X	X	X	X	X
	A	B	C	D	E

- Les deux piles ne peuvent pas avoir de case voisine en commun, sinon le nombre de jetons de l'une des deux ne pourrait croître que trois fois au plus et ne pourrait donc pas dépasser 8. Cela exclut la case centrale et ne laisse, à symétries près, que deux configurations :

5	X	X	X	X	X
4	X			●	X
3	X		X		X
2	X	●			X
1	X	X	X	X	X
	A	B	C	D	E

B2-D4

5	X	X	X	X	X
4	X				X
3	X		X	●	X
2	X	●			X
1	X	X	X	X	X
	A	B	C	D	E

B2-D3

Les observations précédentes permettent d'éliminer la situation B2-D4. En effet, dans ce cas, il y a deux cases qui sont situées à distance 4 des deux piles (A5 et E1). Les jetons initialement présents sur ces deux cases A5 et E1 doivent se retrouver en fin de jeu sur des piles différentes, chacune des deux piles doit donc contenir exactement 16 jetons, puisque chacune contient un jeton qui a été déplacé 4 fois, ce qui entraînerait qu'il y a 32 jetons en tout. Cette conséquence est contradictoire avec le fait qu'il n'y a que 25 jetons sur une grille de taille 5×5 .

Étudions maintenant la situation B2-D3. Dans ce cas, toutes les cases sont à distance au plus 3 d'une pile finale sauf la case A5 qui est à distance 4 de B2 et à distance 5 de D3. Cela implique que le jeton initialement en A5 se retrouve à la fin en B2 dans un pile de 16 jetons. Par suite, cela implique que la pile en D3 contient 9 jetons, puisqu'il y a 25 jetons en tout.

Toujours en raisonnant sur les distances, on en déduit que les jetons initialement en E1 et E5 doivent tous deux finir sur la pile D3. Pour E5, c'est parce qu'il est à distance 6 de B2, donc trop loin ; pour E1, il est à distance 4 de B2 mais on sait déjà que A5, qui est aussi à distance 4 de B2, finit sur cette pile. On raisonne alors sur les chemins empruntés par ces deux jetons pour arriver en D3. Rappelons que ces chemins sont de longueur 3.

- Si les chemins se rejoignent, c'est nécessairement en E3, qui est à distance 2 de E1 comme de E5. Du fait de cette distance, lorsque le jeton initialement en E1 arrive en E3, il est nécessairement en E2 dans une pile de hauteur au moins 2, donc E3 contient déjà au moins 2 jetons, et lors du déplacement E2 vers E3 la case E3 augmente d'au moins 2 jetons. Par le même raisonnement, on montre que lors du déplacement de la pile en E4 vers la case E3, le nombre de jetons en E3 augmente aussi d'au moins 2. Une fois que E3 a reçu les piles de E2 et E4, elle contient au moins 6 jetons. Par conséquent, après que la pile en E3 est déplacée en D3, la case D3 contient au moins 12 jetons. C'est contradictoire avec le



fait que la pile en D3 dans la situation finale doit en contenir 9.

- Sinon les chemins ne se rejoignent pas. Dans ce cas, chacun des deux jetons initialement en E1 et E5 arrive en D3 par une case différente et après avoir fait 2 déplacements, donc en faisant partie d'une pile d'au moins 4 jetons. Cela implique qu'avant l'arrivée de ces deux piles, D3 doit déjà contenir au moins 4 jetons, puis elle sera augmentée d'au moins 4 jetons à deux reprises. À nouveau, cela impose que le nombre final de jetons en D3 est au moins 12, ce qui est contradictoire.

Ainsi, dans chaque cas, on aboutit à une contradiction. On a donc démontré qu'il ne peut exister de situation à deux piles en partant d'une grille de taille 5×5 .

4 Quelles mathématiques sont en jeu ?

Après présentation des éléments de preuve, se pose la question des mathématiques que nous pratiquons dans cette SiRC. Plus précisément, quel type de raisonnements y met-on en jeu et que peut-on attendre de la pratique de cette activité en classe ?

4.1 Les types de raisonnements utilisés

Dans le cadre de la pratique du raisonnement, cette activité nécessite de raisonner :

- directement sur des cas particuliers,
- par énumération de cas, par exemple pour prouver qu'il est impossible de faire une seule pile sur une grille 1×5 ,
- par contradiction, par exemple pour prouver qu'on ne peut pas mettre plus de 4 jetons dans le coin d'une grille (voir l'expérimentation),
- par encadrement de solution.

À *contrario*, elle pose aussi la question de la pertinence de certains raisonnements. En effet, l'étude de cas particulier, de sous-grilles par exemple, permet de gagner une connaissance intuitive du jeu qui peut pourtant parfois amener à de fausses pistes. C'est le cas de l'utilisation de la sous-grille 4×4 qui parasite une recherche efficace du minimum sur une grille 5×5 . De même, la grille 1×5 nécessite deux piles alors que si on lui rajoute 3 cases (faire une figure), il est maintenant possible de trouver un minimum de 1 pile. Nous sommes donc face à un problème où les généralisations ne sont guère évidentes.

La manipulation est un moteur de motivation pour les jeunes élèves et elle permet de les faire entrer dans une logique de raisonnement et de stratégie. Toutefois, elle peut s'avérer devenir un frein pour le réinvestissement des raisonnements que l'on peut formaliser avec eux (voir l'analyse de l'expérimentation) car elle semble toujours proposer une ouverture et que, comme dans la plupart des jeux, elle induit une notion d'expertise (plus on joue, plus on devient expert, on devrait donc être capable d'avoir de meilleurs résultats).

Au regard de ses éléments, il est nécessaire de définir plus précisément les apports de cette SiRC pour des élèves du secondaire.

4.2 Quels enjeux pour les élèves

Cette activité rentre parfaitement dans le cadre du travail sur le raisonnement tel qu'il est abordé dans les programmes. Les élèves entrent bien dans une démarche d'investigation pour développer des stratégies d'optimisations. Les types de raisonnements évoqués dans la partie précédente sont importants à travailler en classe et nous verrons dans la section suivante que le statut d'une preuve formelle pour l'élève de collège est loin d'être équivalent à celui que lui donne le mathématicien.

Au delà du travail de recherche et de raisonnement, certaines autres compétences sont développées. La compréhension et l'assimilation d'une consigne, qui ici n'est pas si simple et fait entrer en jeu les notions de comparaisons sur \mathbb{N} . Il y a en particulier un point didactique intéressant qui est apparu lors de l'expérimentation avec les élèves de cinquième. Nombre d'entre eux n'avaient aucun scrupule à déplacer des jetons dans une case vide car il ne l'assimilait pas à une pile de taille nulle. Enfin, lors des mises en commun, il est nécessaire que l'élève puisse argumenter et communiquer ses résultats. Même avec une solution vidéoprojetable, il lui est très compliqué de le faire du fait que la manipulation est longue et qu'en général il est à peu près impossible de se souvenir des déplacements effectués. Nous allons voir dans l'expérimentation que nous avons apporté un système d'écriture qui n'est pas léger mais qui permet de garder une trace des déplacements tout en travaillant le repérage sur une grille (point qui est au programme en classe de cinquième).

5 L'empilement de jetons en classe de cinquième : une expérimentation

Cette expérimentation a eu lieu dans une classe de cinquième du collège Jean-Jacques Rousseau à Thonon-les-Bains. Il était d'emblée clair que l'objectif visé n'était pas d'apporter une preuve de la solution optimale sur une grille 5×5 . Nous voulions les amener à travailler le raisonnement pour dégager des propriétés de cette situation de recherche et observer jusqu'à quel niveau de preuve on pouvait amener les élèves.

5.1 Structure de la séquence

L'expérimentation a été menée en trois étapes.

- Séance 1 : Découverte du jeu sur la grille 5×5 et mise en commun des solutions.
- Séance 2 : Sous-grilles et premiers défis (voir Annexe 2).
- Séance 3 : Suite des défis et preuve qu'on ne peut pas avoir une seule pile sur la grille 5×5 .

5.2 Observations et éléments d'analyse

La première séance nous a permis de nous rendre compte de la difficulté d'assimilation et d'application des règles sur une grande grille. De nombreuses erreurs sont constatées parfois parce que sur un des déplacements on ne s'aperçoit pas qu'on ne respecte pas la règle. De plus, comme nous l'avons déjà évoqué, la case vide a un statut spécial pour certains élèves puisqu'ils ne la considèrent pas comme une pile de taille nulle.

Pour garder en mémoire les déplacements, nous avons proposé d'adopter un repérage avec des lettres pour désigner les colonnes et des chiffres pour désigner les lignes. Ainsi, le déplacement noté $A1 \rightarrow B1$ signifie que le jeton de la case A1 est mis sur la pile de la case B1. Ce système de notation s'est avéré efficace mais reste néanmoins lourd pour une grille 5×5 .

Lors de cette première séance, les seules solutions sans erreurs que nous ayons pu exhiber proposaient un minimum de 4 piles. La plupart des groupes ont spontanément tentés des déplacements symétriques, ce qui a aussi pu être le cas lors d'expérimentations faites par des adultes. On peut penser que ce type de configurations nous paraît naturellement optimal ce qui n'est pas le cas dans ce jeu. A la deuxième séance, nous sommes repartis d'une vidéo présentant une des solutions proposés par les élèves où les 4 piles obtenues étaient symétriques. Une majorité des élèves ne pensait pas que l'on puisse faire mieux. Une élève propose de tenter une solution

non symétrique où les déplacements suivraient une sorte de spirale. Nous nous sommes alors intéressés à de nouvelles grilles (Annexe 2).

La série des grilles « en bande » (1×3 à 1×5) permet de conclure sur chaque cas, soit par une preuve du minimum absolu (une pile) soit par un raisonnement exhaustif amenant à conclure l'impossibilité de faire une seule pile (grille 1×5). En effet, dans ce dernier cas, soit on ne commence pas par une extrémité ce qui fait immédiatement apparaître une case vide séparant des jetons, soit on commence par une extrémité puis on continue par l'autre (pour la même raison), ce qui nous oblige à faire un dernier déplacement avec la case centrale et à terminer alors aussi avec deux piles. Il est à noter qu'un groupe rapide a tenté de généraliser le résultat sur des bandes et a proposé la conjecture suivante : « Il est impossible de faire une seule pile dans le cas d'une grille de taille impaire supérieure à 3 ». Une erreur de manipulation sur une bande 1×6 les a confortés dans cette erreur. Une telle proposition montrer combien l'intuition peut induire des stratégies différentes. On pourrait penser que si pour une bande de 5 cases on ne peut faire une seule pile, alors on ne doit pas y arriver pour plus de 5 cases, mais d'autres intuitions viennent brouiller les cartes (il s'agit sans doute ici de la symétrie des bandes paires). Ces intuitions sont loin d'être absurdes, comme nous l'avons montré précédemment, le nombre de cases d'une grille n'est pas le seul élément contraignant puisque selon la forme, une grille de taille plus grande peut admettre une solution avec un nombre de pile inférieur.

Les grilles 3×3 et 4×4 sont résolues très facilement, cela ébranle l'avis des élèves sur le minimum de 4 piles par la proximité de la taille de la dernière avec celle de la grille 5×5 . En revanche, l'idée qu'une solution symétrique puisse être optimale en sort renforcée. Un des groupes ayant le choix entre deux solutions de ses membres pour la grille 3×3 fait la remarque suivante : « cette technique, elle est bien, elle est symétrique ». Sur ces grilles, la majorité des groupes opte pour des stratégies qui ramènent la grille à une bande 1×3 ou 1×4 . Les élèves remarquent que cette stratégie ne pourraient pas permettre de n'obtenir qu'une pile pour une grille 5×5 .

Le défi suivant consiste à savoir combien de jetons peut-on mettre au maximum dans un coin d'une grille 5×5 . Spontanément, les élèves n'utilisent que les deux cases adjacentes au coin et obtiennent donc un maximum de 3 jetons. Après plus de recherche, certains groupes utilisent d'autres cases et parviennent au maximum de 4 jetons. Aucun groupe n'a de preuve que c'est le maximum. Les élèves argumentent seulement en disant qu'il faut chercher des jetons « plus loin ». En demandant si on peut encore « chercher plus loin » les élèves évoquent l'intuition qu'il y aura nécessairement des cases vides. Nous leur proposons un raisonnement par l'absurde à l'aide de la questions suivante : « Que se passe-t-il si les deux cases adjacentes d'un coin ont chacune au moins deux jetons ? ». La réponse (on ne peut y déplacer aucune des deux piles) permet de conclure que la solution à 4 pièces est un maximum.

Notons qu'avec ce dernier raisonnement, nous avons enclenché une logique de la preuve qui permettrait aux élèves de raisonner de la même manière sur le second défi. Cela n'a pas été le cas, ce qui paraît cohérent à un niveau de cinquième où la notion de preuve est encore très peu abordée et difficilement accessible. En revanche, pour une telle activité, seule l'expérimentation semble faire foi pour les élèves. Il n'est pas rare qu'après avoir établi une preuve ils estiment qu'il est tout de même possible de faire mieux avec un peu d'habileté ou de chance. Ainsi, pour le défi du bord (même question que pour le coin), la solution à 8 jetons est trouvée sans preuve qu'elle soit maximale. Pour le défi de la pile de taille maximum sur la grille, même si l'on précise aux élèves qu'ils peuvent résoudre le problème avec le même raisonnement, ces derniers ne se tournent que vers la manipulation. Une moitié des élèves trouvera une solution de 16 jetons. Une élève utilise simplement une sous-grille 4×4 pour y parvenir. Encore une fois, la preuve que c'est un maximum n'est ni obtenue ni même cherchée. Nous formalisons de nouveau cette preuve, mais la discussion qui s'en suivra est symptomatique de la difficulté des élèves de cinquièmes à percevoir le statut d'une preuve. Il y a un manque de lien entre la preuve et la pratique.

Dans le même ordre d'idées, à la question « Qu'est-ce que cette taille maximale de pile indique pour notre question initiale sur le nombre de pile minimum sur la grille 5×5 ? », les élèves ne voient pas de lien alors que la solution de la sous-grille 4×4 a été montrée à toute la classe. Quelques élèves arrivent finalement à dire que cela signifie qu'on ne peut pas obtenir une seule pile puisqu'il y a 25 jetons en tout sur la grille. Nous demandons alors s'il est possible d'étendre ce résultat à des grilles qui ont plus de 25 cases, et plusieurs élèves objectent que ça dépendra des formes des grilles. D'autres avancent des arguments de parité : « on peut faire une seule pile pour 20, 32 ou 40 cases ». Nous avons beau leur faire remarquer que nous venons de montrer qu'une pile ne peut avoir plus de 16 jetons, l'argument doit rester trop théorique à leurs yeux et certains élèves argumentent qu'en rajoutant des cases, on doit pouvoir contourner le problème et en mettre plus.

La preuve théorique n'a pas le statut de vérité incontournable face à des situations concrètes. C'est une réaction que nous trouvons couramment face aux élèves de collèges et qui paradoxalement justifie le fait qu'il faut poursuivre et renforcer le travail sur la preuve à ce niveau. D'autre part, la formulation d'une preuve ou la compréhension et l'assimilation de cette formulation est un problème à part entière à ce niveau comme le rappelle l'objection finale d'un élève qui conteste qu'on dise « toute grille de plus de 16 cases ne peut amener à l'obtention d'une seule pile » puisque nous n'avons pas réussi à faire une seule pile sur la grille 1×5 qui n'a que 5 cases. Cette mauvaise compréhension de la première phrase amènera toutefois la classe à prolonger le questionnement en se demandant quel type de grille de moins de 16 cases se résout en une seule pile.

Références

- Beffara, E., & Buat-Ménard, V. (2019, juin). Empilement de jetons. In *Actes du colloque CORFEM 2019*. Strasbourg, France.
- Grenier, D., & Payan, C. (2003). Situation de recherches "en classe" : essai de caractérisation et proposition de modélisation. In V. Durand-Guerrier, C. Tisseron, Institut de recherche sur l'enseignement des mathématiques, & Association pour la recherche en didactique des mathématiques (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques : année 2002* (p. 189-203). Paris : IREM, Université Paris VII : A.R.D.M. (OCLC : 848865258)
- Groupe Logique, Raisonnement et SIRC. (2017). *Situations de recherche pour la classe : pour le collègue et le lycée... et au-delà* (IREM de Grenoble, Ed.). (OCLC : 1081175040)

Annexe 1 : première séance

Sur une grille rectangulaire, on place une pièce sur chaque case. Le jeu consiste à former des piles de pièces selon la règle de déplacement suivante :

On peut déplacer le contenu d'une case (une pièce ou une pile de pièces) sur le contenu d'une case adjacente, si celle-ci contient une pile de pièces de taille supérieure ou égale à celle de la case initiale.

Deux cases sont adjacentes si elles ont un côté en commun. Le jeu s'arrête quand on ne peut plus déplacer aucune pile.

Quel est le plus petit nombre de piles que l'on peut obtenir pour la grille suivante ?

Annexe 2 : deuxième séance

Consignes :

— Travail individuel : étude de grilles en bande

1. Sur une grille 1×3 , peut-on obtenir une seule pile ? Écrire une preuve.
2. Sur une grille 1×4 , peut-on obtenir une seule pile ? Écrire une preuve.
3. Sur une grille 1×5 , peut-on obtenir une seule pile ? Écrire une preuve.

— Travail en équipe : étude de grilles carrées.

1. Sur une grille 3×3 , peut-on obtenir une seule pile ? Écrire une preuve.
2. Sur une grille 4×4 peut-on obtenir une seule pile ? Écrire une preuve.
3. Challenge numéro 1 sur la grille 5×5 : Combien de pièces peut-on mettre au maximum sur une pile qui est dans un coin de la grille ? Écrire vos recherches et la solution obtenue.
4. Challenge numéro 2 sur la grille 5×5 : Combien de pièces peut-on mettre au maximum sur une pile qui est sur un bord de la grille ? Écrire vos recherches et la solution obtenue.
5. Challenge numéro 3 sur la grille 5×5 : Essayer de construire la pile la plus haute possible. Écrire vos recherches et la solution obtenue.