Document cadre sur les parcours de modélisation

Groupe "Analyse et modélisation au lycée" de l'IREMI de Grenoble[*]

8 juillet 2025

Remarque préliminaire

Le sens précis des termes "modèles" et "modélisation" peut varier considérablement d'une discipline à l'autre, selon que l'on adopte un point de vue didactique ou non, ou même selon les auteurs. La vision que nous en avons est fortement influencée par les livres [5] et [1]. Un point important est que ces chercheurs parlent de *modélisation mathématique*. Cela signifie que la partie la plus abstraite de la modélisation (la partie "modèle") est de nature mathématique. Dans la suite, on parlera simplement de "modélisation" au lieu de "modélisation mathématique".

Table des matières

[*]Marie Busser (INSPE de Grenoble), Damien Jacquemoud (Lycée Frison-Roche, Chamonix), Hélène Langlais (Lycée du Mont-Blanc, Passy), Cyril Masson (Lycée du Mont-Blanc, Passy), Florence Michon (Lycée Frison-Roche, Chamonix), Raphaël Rossignol (Univ. Grenoble Alpes) et Iulia Tunaru (Univ. Grenoble Alpes)

1 Préambule

Jusqu'à l'aube du XIXe siècle, l'étude des mathématiques au niveau secondaire était majoritairement construite autour de la lecture et l'analyse d'œuvres mathématiques de référence comme "Les Éléments" [2]. Selon le didacticien Yves Chavallard, ce paradigme dit de la "célébration des grands auteurs" a été progressivement remplacé par le paradigme, toujours d'actualité, selon lequel la connaissance mathématique est découpée en divers morceaux, parfois dénués de leur contexte, et enseignés comme des "œuvres à visiter". Plus précisément, ce deuxième paradigme dit « *de la visite des œuvres, naît vers le milieu du XVIIIe siècle (l'article Collège de d'Alembert est de 1753). Son développement prend des chemins cahoteux pendant tout le XIXe siècle, jusqu'à la grande réforme de 1902, qui impose sa loi jusqu'au début des années 1960. Un demi-siècle de réformes ultérieures n'ont pas changé l'essentiel de sa logique curriculaire* » [3].

Ce "pélerinage intellectuel" a des répercussions sur la perception des enseignements par les élèves ou les étudiants. Les notions mathématiques sont souvent enseignées sans réelle justification de leur raison d'être historique ou approfondissement de leur utilité. Cela a comme conséquence directe le développement de stratégies d'apprentissage de court terme sans réelle assimilation ou transfert (la capacité d'utiliser les connaissances dans d'autres contextes plus tard), ainsi que l'impression, très répandue aujourd'hui parmi les élèves, que "les mathématiques [qu'on leur enseigne] ne servent à rien". Pour dépasser cette impasse et dans le contexte d'un questionnement critique du paradigme de la visite des œuvres depuis 1950, Chevallard propose un nouveau paradigme, celui du "questionnement du monde" : à la place d'étudier des questions posées au sujet d'un œuvre choisi par une autorité pédagogique, on étudie d'abord des questions, auxquelles certaines œuvres peuvent nous aider à trouver une réponse. [3]

Enseigner la modélisation pourrait être donc une manière de décloisonner les mathématiques et de leur redonner leur vitalité et leur pouvoir de questionner le monde. Cela nécessite des changements de posture de la part de l'enseignant et des élèves en commençant par une attitude réceptive envers de nouveaux types de questions, l'acceptation que la connaissance n'est pas toujours disponible et qu'elle se construit au fur et à mesure des questionnements, ainsi que la patience de chercher et de retourner parfois en arrière [2].

Enfin, il serait également réducteur de ne retenir que la dimension utilitariste de cette discipline, qu'il s'agisse des *mathématiques appliquées* à d'autres sciences ou en tant qu'*outil de décision* autour des questions sociales. Les mathématiques sont d'abord une *science pure* avec ses propres objets d'étude et ses ramifications de natures philosophique et logique. Parfois invisible ou invisibilisée, la nature *esthétique* des mathématiques nourrit des expériences de joie, voire d'émerveillement, pour ceux qui rentrent dans son jeu ou construit des ponts avec des disciplines artistiques telles la peinture, l'architecture ou la musique. En rajoutant la dimension *didactique*, on obtient ainsi ce que Niss appelle la quintuple nature des mathématiques [4]. Parler de modélisation pourrait être l'occasion pour l'enseignant de discuter de ces différentes facettes des mathématiques en tant qu'activité humaine.

2 Motivation

Les modèles mathématiques surgissent dès qu'on veut appliquer les mathématiques à quelque chose d'extra-mathématique. Un schéma de la démarche peut prendre la forme de la Figure 1.

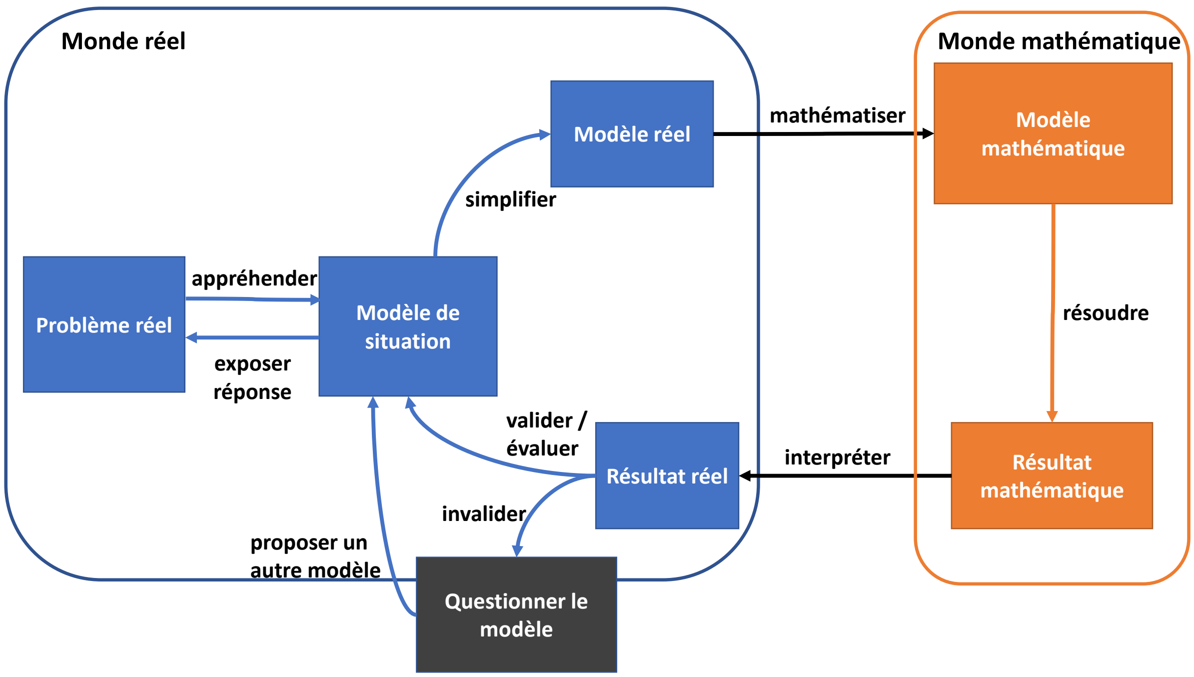

FIGURE 1 – Cycle de modélisation général

Appliquer les mathématiques à une situation extra-mathématique est souvent loin d'être facile, comme en témoigne la littérature didactique dédiée à ce sujet [5], ainsi que les résultats des élèves aux évaluations PISA [1]. Il nous semble que le jeu en vaut la chandelle, et que les enseignants de mathématiques peuvent trouver dans l'enseignement de la modélisation plusieurs bénéfices :

— motiver les élèves (l'attitude adoptée est différente de l'attitude usuelle en cours de maths : il s'agit d'utiliser les maths comme outils, l'outil n'est pas prescrit a priori, l'énoncé laisse une part importante d'autonomie, et le travail se fait en général en groupe),

— faire éprouver aux élèves la place des mathématiques et de sa rigueur au sein des sciences.

Dans la section 3 nous présenterons un peu plus en détail ce qu'on entend par modélisation en s'appuyant sur le cycle. Dans la section 4 nous présenterons les objectifs d'enseignement

1. qui contiennent souvent des exercices "en contexte réel", même s'ils ne sont pas forcément des exercices de modélisation pensés pour faire travailler tout le cycle de modélisation.

que nous nous sommes fixés lors de la construction des parcours de modélisation. La section 5 est dédiée à la description générale des parcours, la section 6 à l'organisation des séances et la section 7 à une liste de difficultés classiques que l'on peut rencontrer dans les activités de modélisation.

Selon votre inclination pour l'abstraction et les détours, vous pouvez lire la suite de ce document, ou bien commencer par vivre le parcours de modélisation "Mesurer, remplir" afin d'avoir des exemples en tête, puis revenir à ce document lorsque vous en ressentirez le besoin. Nous utiliserons néanmoins un exemple "jouet" pour illustrer les notions du cycle de modélisation, exemple que nous avons emprunté à l'excellent livre [6]. La question est la suivante :

Question 1 : "De combien de temps aurez-vous besoin pour finir de lire ce document ?"

Prenez le temps d'y réfléchir un peu, puis passez à la section suivante.

3 Le cycle de modélisation

Une représentation possible d'un processus de modélisation est donnée à la Figure 1. C'est un exemple de “cycle de modélisation”. Il en existe toutes sortes de variantes, plus ou moins détaillées et plus ou moins modifiées selon les situations, cf. le chapitre 2 de [5]. C'est un outil bien pratique pour conceptualiser ce que nous sommes en train d'accomplir lorsque nous travaillons sur un problème de modélisation, et pour nous ce sera l'outil théorique principal. Dans ce document, nous nous référerons toujours à la Figure 1 quand nous parlerons "du cycle de modélisation". Dans les documents d'accompagnements des différentes activités, ce cycle sera "incarné" en fonction de l'activité de modélisation.

Pour présenter succinctement les phases du cycle [2], nous allons partir d'une modélisation mathématique spontanée hypothétique que vous pourriez avoir effectuée en réponse à la question 1. Une façon de répondre à cette question, au moment où vous l'avez lue, pourrait consister à :

1. se faire une image mentale du processus de lecture de ce document ;
2. négliger les images, les rêveries, on voit le texte de façon homogène, et percevoir que la longueur du texte et le temps mis pour le lire sont des quantités importantes ;
3. estimer la proportion de texte déjà lue et le temps mis à le lire ;
4. utiliser une simple règle de proportionnalité pour obtenir une estimation du temps nécessaire à la lecture de l'ensemble de ce document ;
5. énoncer le résultat avec les bonnes unités, en reprenant les termes de la question initiale ;
6. juger le résultat obtenu : l'ordre de grandeur obtenu paraît-il vraisemblable ? On pourrait lire une page supplémentaire en se chronométrant et voir si le rythme est cohérent avec notre estimation. On pourrait essayer d'en déduire une incertitude sur notre prévision ;

2. Il est important de noter que d'un point de vue cognitif, ces étapes ne sont pas accomplies de manière purement séquentielle, cf. la section 2.3 de [1].

7. réfléchir si on pourrait affiner notre point de vue : est-ce que certains éléments du modèle ne mériteraient pas d'être améliorés ? Par exemple, on pourrait prendre en compte que le temps de réflexion risque d'être accru sur certaines parties ;
8. fournir une conclusion de l'ensemble du travail ci-dessus.

Ces étapes correspondent essentiellement aux étapes du cycle de modélisation (Figure 2).

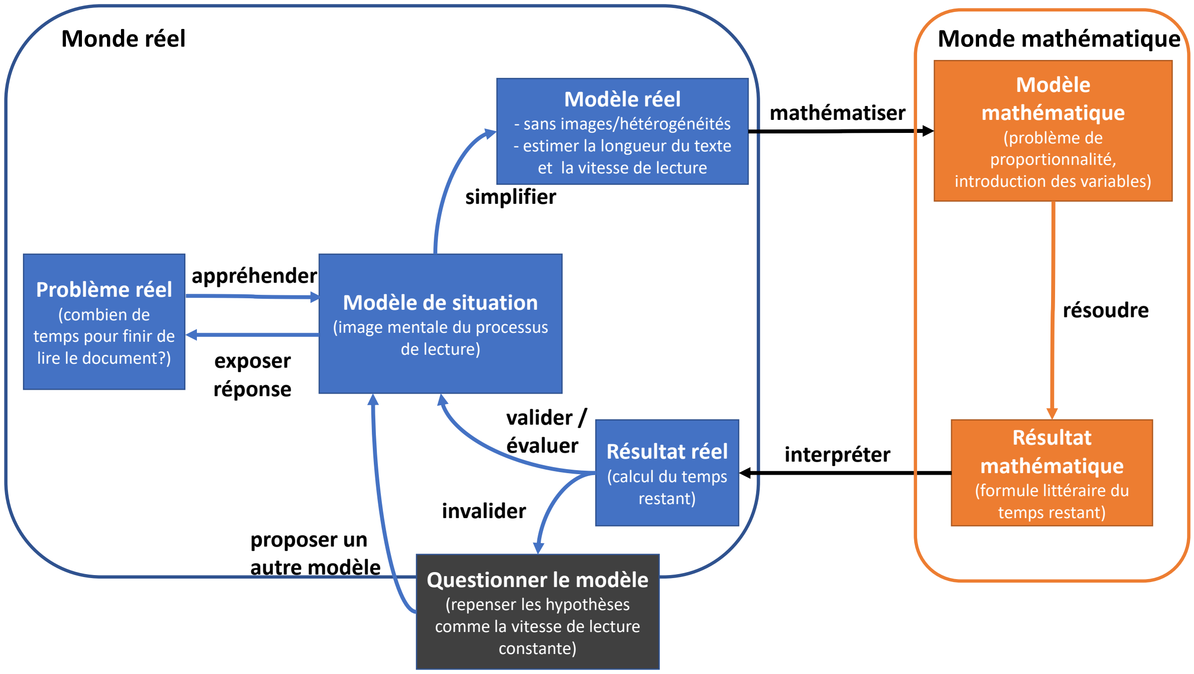

FIGURE 2 – Cycle de modélisation incarné pour l'exemple jouet

Appréhender

Dans l'exemple ci-dessus, cela correspond à "se faire une image mentale du processus de lecture de ce document". On passe d'une situation problématique, représentée par une question à la naissance d'un "modèle de situation" selon la terminologie de [5].

Simplifier

Dans l'exemple ci-dessus, cela correspond à "négliger les images, les rêveries, on voit le texte de façon homogène, et percevoir que la longueur du texte et le temps mis pour le lire sont des quantités importantes" et aussi à "estimer la proportion de texte déjà lue et le temps mis à le lire, ainsi que la longueur totale du texte, on néglige les images, les rêveries, on voit le texte de façon homogène".

Ainsi, on fait déjà des hypothèses qui sont simplificatrices (la vitesse de lecture est constante et seule la lecture du texte compte), structurantes (la constance de la vitesse de lecture implique une structure de proportionnalité) et on sélectionne des données (la proportion de texte déjà lue et le temps mis pour le lire) en lien avec les variables perçues comme importantes.

Il s'agit d'une sorte de prétraitement de la situation qui la rend plus abstraite et prête à être mathématisée, et qui contient souvent déjà en germe une méthode de résolution mathématique : ici, le fait de savoir que l'on peut s'appuyer sur une résolution mathématique d'une situation de proportionnalité est sans doute décisif pour s'engager dans cette voie. On passe d'un "modèle de situation" à un "modèle réel" selon la terminologie de [5].

Mathématiser

Dans l'exemple ci-dessus, la mathématisation correspond à représenter le problème comme un problème de proportionnalité. On arrive à un modèle mathématique, que l'on pourrait simplement repréenter par le tableau de proportionnalité suivant :

Temps (en minutes)	t_{deb}	t_{tot}
Texte (en pourcentage)	p_{deb}	1

où on a introduit des notations des notations pour représentant le temps t_{deb} mis pour lire une proportion p_{deb} du texte et le temps t_{tot} que l'on mettra pour lire tout le texte. L'inconnue est $t_{tot} - t_{deb}$. On passe d'un "modèle réel" à un "modèle mathématique" dans lequel la question initial devient un problème mathématique.

Résoudre mathématiquement

On applique la règle de proportionnalité :

$$t_{\mathrm{tot}} = t_{\mathrm{deb}} \times \frac{1}{p_{\mathrm{deb}}} .$$

et on effectue le calcul à l'aide des données. On en déduit le temps restant $t_{\mathrm{tot}} - t_{\mathrm{deb}}$.

La mathématisation est ici automatisée (passage du tableau de proportionalité à la formule), mais selon les circonstances, le travail mathématique peut être beaucoup plus consistant. On résout, à l'intérieur des maths, un problème mathématique, pour obtenir un "résultat mathématique".

Interpréter

Dans l'exemple ci-dessus, cela consiste à "énoncer le résultat avec les bonnes unités, en reprenant les termes de la question initiale". Ce faisant, on évoque une image mentale de ce que signifie ce résultat par rapport à la question initiale. On passe d'un résultat mathématique à un résultat réel.

Valider et évaluer

La validation vise à répondre à une question binaire : est-ce qu'on peut raisonnablement conserver le modèle, ou bien faut-il le jeter à la poubelle ?

Pour valider un modèle, on peut imaginer principalement deux méthodes :

— tester la cohérence avec des données empiriques issues d'expériences indépendantes de celles qui ont éventuellement servi à construire le modèle. On pourrait parler de "cohérence empirique" ;

— tester la cohérence avec d'autres modèles déjà validés. On pourrait parler de "cohérence théorique".

En dernière analyse, dans cette acceptation, la validation d'un modèle s'appuie donc sur une validation empirique, éventuellement de manière indirecte. On pourrait aussi parler de non-réfutation au lieu de validation, pour faire référence au fait qu'un modèle est en général validé jusqu'à ce qu'on découvre des conditions le mettant en défaut. Il est donc important d'avoir la mémoire des conditions de sa validation.

Dans l'exemple ci-dessus, l'étape de validation correspond à "juger le résultat obtenu : l'ordre de grandeur obtenu paraît-il vraissemblable ? On pourrait lire une page supplémentaire en se chronométrant et voir si le rythme est cohérent avec notre estimation." En l'absence de données contre lesquelles tester notre modèle, on utilise notre bon sens pour juger de l'aspect vraisemblable de l'ordre de grandeur résultat. Mais on peut aussi effectuer une expérience (lire une page supplémentaire) pour vérifier si notre modèle est cohérent (notamment l'hypothèse de vitesse constante).

L'évaluation vise en général à quantifier la performance du modèle, ou à la qualifier de manière plus précise que l'étape binaire de validation. Cette étape n'a de sens que si le modèle est "validé", i.e qu'il n'est pas jeté à la poubelle lors de l'étape de validation. Cela peut être réalisé en comparant le modèle à d'autres modèles existant, selon un critère explicite.

Quand à la phrase "On pourrait essayer d'en déduire une incertitude sur notre prévision", elle est à rapprocher d'une évaluation de notre modèle : elle juge quantitativement le pouvoir prédictif de notre modèle et pourrait permettre de lui adjoindre une notion d'incertitude.

Enfin, la toute dernière phrase dans l'exemple ci-dessus correspond à une réflexion préliminaire à une nouvelle modélisation, modifiant ou raffinant le premier modèle (voire le changeant complètement).

Exposer

Dans l'exemple ci-dessus, cela correspond à "fournir une conclusion de l'ensemble du travail ci-dessus", en incluant toutes les étapes, notamment les réflexions sur les hypothèses effectuées, les limites du modèle et les axes à améliorer. Il est important de noter que la conclusion doit être bien plus riche qu'une simple réponse numérique, aussi précise soit-elle.

4 Objectifs d'enseignement

Le contenu d'apprentissage visé est d'abord une *compréhension personnelle de ce qu'est un modèle mathématique*. Cela consiste pour nous en :

- la *connaissance du cycle (ou des cycles) de modélisation*, son usage théorique pour se guider dans la résolution d'une tâche de modélisation, la confrontation pratique à chacune de ses étapes dans différentes incarnations, comme dans l'exemple ci-dessus,
- la capacité à *hiérarchiser les hypothèses de modélisation* (par exemple, dans l'exemple ci-dessus, importance de l'hypothèse de vitesse de lecture constante vs. ignorer le temps de lecture des images),
- la compréhension du *rôle crucial des contraintes*, notamment :
  - contraintes matérielles (moyens de calcul, modèles réduits, disponibilité des données),
  - contraintes temporelles,
  - contraintes de connaissances mathématiques (un problème de dilution ne sera pas abordé de la même manière selon que l'élève connaît ou non les équations différentielles ordinaires),
- la connaissance de *différentes sources d'approximation* et la capacité à les comparer (dans l'exemple ci-dessus, les données de temps écoulé depuis le début de la lecture et de proportion du texte lue sont estimées avec certaines approximations, mais d'autres approximations peuvent apparaître dans les calculs, notamment les arrondis en calcul approché).

5 Description d'un parcours

Un parcours de modélisation est constitué d'un document de présentation du parcours et d'une suite cohérente de situations de modélisation. Cette cohérence signifie qu'on s'est efforcé de respecter les contraintes suivantes :

- un parcours doit permettre d'aborder *tous les objectifs d'apprentissage du paragraphe 4*,
- dans un parcours, il y a une *progression bien identifiée concernant la mise en place des notions essentielles de modélisation* et la façon dont les élèves sont mis au contact de ces notions, de manière implicite et explicite,
- un parcours possède aussi une *cohérence en termes de contenu à modéliser*. Même si des objets mathématiques semblables peuvent apparaître dans les différentes situations d'un même parcours, l'idée est plutôt d'utiliser une cohérence en termes de modèles "pré-mathématiques", c'est à dire de modèles de situation ou de modèles réels, selon la terminologie de la section 3. Par exemple, le parcours "Mesurer, remplir" concerne des problèmes liés à la mesure d'une surface et aux empilements compacts. Le thème commun est le problème de remplir ou (de recouvrir) un objet géométrique à l'aide d'un ou de plusieurs autres. L'hypothèse est que cela permet de montrer aux élèves

que certaines connaissances intra-mathématiques ou certaines habitudes de mathématisation peuvent être réinvesties d'un problème à l'autre lorsque les problèmes ont un même thème pré-mathématique.

Il est possible qu'un parcours ne soit qu'une ossature sur laquelle pourraient (devraient ?) se greffer diverses tâches permettant d'aller dans deux directions :

— travailler certains aspects précis en fonction de l'observation par l'enseignant de certains manques chez les élèves, ces manques pouvant se situer à tous les niveaux du cycle,

— approfondir certaines notions, en classe entière (cf. l'exemple du DM pour traiter le cas compact dans l'activité "Ping-Pong" du parcours "Mesurer, remplir") ou pour certains élèves seulement (par exemple dans l'optique de la préparation au grand oral en Terminale).

6 Organisation des séances

Un certain nombre d'indications précises sont données spécifiquement dans chaque fiche d'activité. Le schéma général est classique [3] :

1. mise en activité des élèves,
2. retours des élèves, qui présentent leurs réponses,
3. synthèse de l'enseignant et trace écrite.

Néanmoins, certains choix devront être faits par l'enseignant.

— Il est parfois judicieux (ou inévitable) d'étaler l'activité sur plusieurs séances.

— Pour les retours des élèves, nous avons expérimenté des retours de différents types, dépendant en grande partie du planning et du matériel disponible : compte-rendu sur papier à rédiger pendant la séance, audio à enregistrer entre deux séances et à déposer sur l'intranet, mini-exposé à préparer d'une séance sur l'autre, trace à écrire sur un tableau (dans une salle comportant 4 tableaux, divisés en deux) accompagnée d'une présentation orale succincte à la fin de la séance orchestrée par l'enseignante. Cette dernière solution est très intéressante, mais nécessite beaucoup de tableaux.

— Pour la synthèse de l'enseignant.e et la trace, plusieurs modalités seront proposées, en fonction de la tâche, des objectifs et du temps disponible :

  — trace écrite (en classe) de la résolution du modèle mathématique choisi,

  — projection au tableau d'un cycle à remplir par les élèves,

  — synthèse orale des objectifs d'apprentissages liés à la modélisation (et écrite si le temps le permet),

  — trace écrite de fin de parcours réalisée par l'enseignant.e et déposée ensuite sur l'ENT ; cette trace contiendrait des images de travaux d'élèves et la synthèse des discussions sur la modélisation.

3. Il peut être pertinent de boucler plusieurs fois sur les deux premières étapes.

Enfin, concernant l'évaluation du travail des élèves, on peut envisager notamment :

— d'évaluer le travail en séance et le compte-rendu de chaque groupe,

— d'évaluer des travaux à rendre d'une séance sur l'autre,

— d'évaluer en fin de parcours l'ensemble des acquis (voir par exemple l'évaluation à la fin du parcours "Mesurer, remplir").

Les deux premières évaluations sont de nature formative ; le cas échéant on pourrait proposer aux élèves des bonus de participation/implication pour leur note finale. La dernière évaluation serait plutôt de nature sommative.

7 Les difficultés, des élèves ou des enseignants

Concernant les élèves, toutes les phases du cycle sont potentiellement sources de difficultés. On trouvera des détails dans chaque fiche d'accompagnement d'activité. Mentionnons toutefois quelques principes généraux :

— des élèves peuvent être déroutés par la forme ouverte des activités : il n'y a en général pas "une unique méthode à appliquer", il y a des hypothèses à faire, et les modèles proposés peuvent être invalidés, ce qui donnerait pour certains l'impression d'un travail inutile. En général, le format du travail en groupe permet d'atténuer ces difficultés ;

— il peut arriver que certaines connaissances extra-mathématiques aident certains élèves pour certaines activités. Plutôt que de voir cela comme une "injustice", on peut souligner le fait que cela contribue à la richesse du groupe ;

— la phase de formalisation mathématique est rarement un succès de manière uniforme. Il ne faut pas hésiter à souligner en quoi la formalisation a un intérêt (par exemple, ce qu'une formule littérale "raconte", en termes de sens de variation d'une grandeur en fonction d'une autre) ;

— la création d'un cycle n'a rien de naturel pour les élèves au début, parfois même c'est considéré comme trop abstrait ; l'apprentissage devrait être graduel et les élèves devaient avoir l'occasion de réfléchir par eux-mêmes aux incarnations des cycles après un premier exemple fourni ;

— enfin, la très grande majorité des élèves sont motivés par la forme des activités de modélisation que nous leur avons proposées. Il peut arriver néanmoins que "faire des maths" à partir de problèmes concrets ne semblent pas être du goût de certains. Il est utile alors d'engager la discussion avec ces élèves afin de leur faire prendre conscience des multiples facettes que revêt l'activité mathématique dans la société (cf. [5]).

Concernant les enseignants,

— il y a souvent une part d'imprévu quand on propose des activités ouvertes, plus importante que pour des activités plus classiques (notamment sur la gestion du temps) ;

— le fait qu'il n'y ait pas d'outil mathématique prescrit a priori est important pour que les élèves aient des décisions à prendre, y compris dans le choix des mathématiques employées. Mais cela ajoute une tension avec un autre objectif très présent pour les enseignants : "finir le programme". On peut légitimement souhaiter rendre compatible le programme et l'objectif d'initier les élèves à une modélisation, mais il faut être conscient qu'en général, cela passe par une restriction de la liberté dans la modélisation, qui va souvent de paire avec une situation moins "authentique", moins proche du réel. C'est à chaque enseignant de décider où il place le curseur. Un point à noter est le suivant : plus les situations sont "authentiques", plus il est difficile pour l'élève de franchir les étapes allant de la situation problématique au modèle mathématique. Dans ce cas, ce sont souvent les outils mathématiques les mieux maîtrisés par l'élève qui seront envisagés, et cela influera sur toute cette phase de simplification/modélisation.

Il ne faudrait pas que cette liste vous dissuade de vous lancer : l'expérience est toujours joyeuse et enrichissante, et l'enthousiasme des élèves emporte tout, même si la première fois est un peu bancale. Se lancer à plusieurs enseignants aide à franchir le pas et à s'améliorer, surtout si certains enseignants peuvent jouer le rôle d'observateur dans les séances orchestrées par les autres. Nous serions d'ailleurs ravis à l'IREMI de Grenoble de recevoir des retours de vos expériences.

L'essence des mathématiques, c'est la liberté.
Georg Cantor (1845 – 1918)

Références

[1] Rita Borromeo Ferri. *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Springer, 2017.

[2] Yves Chevallard. Teaching mathematics in tomorrow's society : a case for an oncoming counterparadigm. In *ICME12, 12th International Congress on Mathematical Education*, 2012.

[3] Yves Chevallard. Assumer un changement civilisationnel : pacte scolaire et mathématiques. *Education et didactique [En ligne]*, pages 75–90, 2020. http ://journals.openedition.org/educationdidactique/5448.

[4] Mogens Niss. Mathematics in society. In R. Sträßer R. Biehler, R. Scholz and B. Winkelmann, editors, *The Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, pages 367–378. Dordrecht : Kluwer, 1994, 2002.

[5] Mogens Niss and Werner Blum. *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling*. Routledge, 2020.

[6] Anthony M. Starfield, Karl Smith, and Andrew L. Bleloch. *How to Model It : Problem Solving for the Computer Age*. McGraw-Hill, Inc., USA, 1993.