

Géométrie pratique avec instruments de mesure anciens

Des problèmes en cycles 3 et 4

Valence, 5 avril 2016

SOMMAIRE

- I** **Réflexions sur l'instrument de mesure**
- II** **Apport de l'iconographie historique**
- III** **Questions matérielles**
- IV** **Objectifs transversaux et mathématiques**
- V** **Compte rendus d'expériences : problèmes
traités en 5^{ème}, 4^{ème} et 3^{ème}**
- VI** **Futures expériences en cycle 3: instruments,
programmes, problèmes**

I Réflexions sur l'instrument de mesure

- **Instrument** vient du latin instrumentum, qui signifie matériel, outillage ou ressource (*)
- L'instrument de mesure : **une réponse** quand l'œil est insuffisant.
- L'instrument de mesure associée à l'idée d'**invention**.
- « **Tenir** » l'instrument – « **Tenir** » le théorème. (**)
- L'instrument illustration de l'**économie** réalisée par l'utilisation des mathématiques dans la résolution de problèmes.
- L'instrument amène à considérer la **place des mathématiques** dans le développement des sciences

(*) Barbin, É. (1994), L'invention des théorèmes et des instruments. In É. Hébert (Ed.), *Instruments scientifiques à travers l'histoire* (pp. 7-12) Paris : Ellipses, p 7.

(**) Barbin, É. (1994), L'invention des théorèmes et des instruments. In É. Hébert (Ed.), *Instruments scientifiques à travers l'histoire* (pp. 7-12) Paris : Ellipses, p 8.



III Considérations matérielles

Instructions extraites du chapitre XXIX portant sur le levé des plans de l'ouvrage *Géométrie plane, arpentage et levé de plan* par Hue et Vagnier, paru chez Delagrave, Paris, 1893

562. Lorsqu'on n'a pas de graphomètre à sa disposition, on peut s'en fabriquer un de la façon suivante. Sur une planchette en bois ABCD (fig. 382), on colle

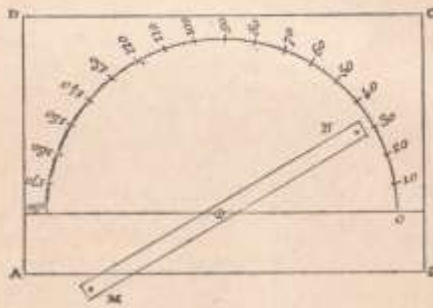


Fig. 382.

une feuille de papier sur laquelle on dessine un grand rapporteur. Au centre de ce rapporteur, on fixe, par une vis ou un clou, une règle plate en bois MN plus courte que le diamètre du rapporteur. A chacune des extrémités de cette règle et sur son axe, on place une aiguille à coudre, perpendiculairement au plan de la règle. On a ainsi l'alidade mobile.

L'alidade fixe sera constituée par le diamètre du rapporteur aux extrémités duquel on aura disposé deux aiguilles comme pour l'alidade mobile. Enfin on complètera l'instrument par une douille en fer placée au centre du rapporteur.

A la rigueur, la vis autour de laquelle tourne l'alidade mobile peut servir à fixer l'instrument tout entier sur un pied.



Matériel nécessaire pour pratiquer sur le terrain (88 € d'équipement environ)



IV Objectifs transversaux:

- La résolution collaborative de problèmes concrets,
- la manipulation d'instruments de mesure:
 - facilite le passage d'une géométrie perceptive à déductive,
- le schéma, modélisation du réel :
 - abstraction de la réalité pour résoudre le problème
 - transition nécessaire entre la figure dessinée et la figure représentant des objets idéaux,
- l'échelle *in situ* :
 - donner du sens à la notion d'échelle sur le « terrain »,
- l'utilisation de la similitude des figures pour déterminer des distances inaccessibles et construire des plans.



IV Relations avec les anciens programmes de mathématiques

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES-FONCTIONS

- proportionnalité
 - propriété de linéarité
 - utilisation du coefficient de proportionnalité
 - échelle *in situ*
- traitement de données

NOMBRES ET CALCULS

- Opérations
 - techniques de calculs, ordre de grandeur
 - nombres en écriture fractionnaire

AGRANDISSEMENT – RÉDUCTION ET MANIPULATION D'INSTRUMENTS

GÉOMÉTRIE

- figures planes
 - caractérisation angulaire du parallélisme
 - constructions de triangles
 - distance d'un point à une droite
 - théorème de Thalès
 - relations trigonométriques

GRANDEURS ET MESURES

- longueurs
 - conversions
 - calculs de périmètres
- angles
 - comparaison sans mesure
 - usage du rapporteur
- aires
 - conversions
 - figure simple
 - surface plane ou d'un solide par décompositions
- volumes

V Des exemples de problèmes en 5^{ème} : mesure indirecte de distances

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES-FONCTIONS

- proportionnalité
 - propriété de linéarité
 - utilisation du coefficient de proportionnalité
 - échelle *in situ*
- traitement de données

NOMBRES ET CALCULS

- Opérations
 - techniques de calculs, ordre de grandeur

Mesures indirectes de distances inaccessibles avec décamètre et graphomètre



GRANDEURS ET MESURES

- angles → usage du rapporteur

GÉOMÉTRIE

- figures planes
 - constructions de triangles
 - agrandissement et réduction

MODALITÉS:

Durée: 1 heure en classe entière

Organisation: classe partagée en équipes de 5

Matériel : 5 à 6 décamètres, 5 graphomètres

Espace : salle ou cour du collège, exploitation des données en salle informatique

V Des exemples de problèmes en 5^{ème} : levé le plan d'une cour

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES-FONCTIONS

- proportionnalité
 - propriété de linéarité
 - utilisation du coefficient de proportionnalité
 - échelle *in situ*
- traitement de données

NOMBRES ET CALCULS

- Opérations
 - techniques de calculs, ordre de grandeur

Levé de plan avec décamètre et graphomètre

GÉOMÉTRIE

- figures planes
 - constructions de triangles
 - agrandissement et réduction

GRANDEURS ET MESURES

- angles
 - usage du rapporteur
- aires
 - conversions
 - figure simple
 - surface plane ou d'un solide par décompositions

MODALITÉS:

Travail : 5 heures en classe entière

Organisation: classe partagée en équipes de 5

Matériel : 5 à 6 décamètres, 5 graphomètres

Espace : salle ou cour du collège, exploitation en salle info

V Des exemples de problèmes en 5^{ème} : lever le plan d'une cour

1^{ère} étape : investigations au décamètre sur le terrain (2015)

vue satellite de la cour →



Difficultés:

- Travail collaboratif en équipe.
- Limites de l'emploi de la **mesure directe** selon les zones de la cour.
- Précision des mesures et du schéma, obstacles.

V Des exemples de problèmes en 5^{ème} : lever le plan d'une cour

2) 2^{ème} étape : séance informatique, bilan en classe et planches historiques (2015)

Une séance informatique intermédiaire :

Objectifs:

- Préciser des implicites dans la notion d'échelle
- Conjecturer la propriété des triangles
« *Les triangles équiangles ont leurs côtés homologues proportionnels.* »
- découvrir une nouvelle méthode pour tracer à l'échelle un triangle mesuré sur le terrain:
 - Mesurer un côté et deux angles
 - Choisir une échelle pour tracer la réduction

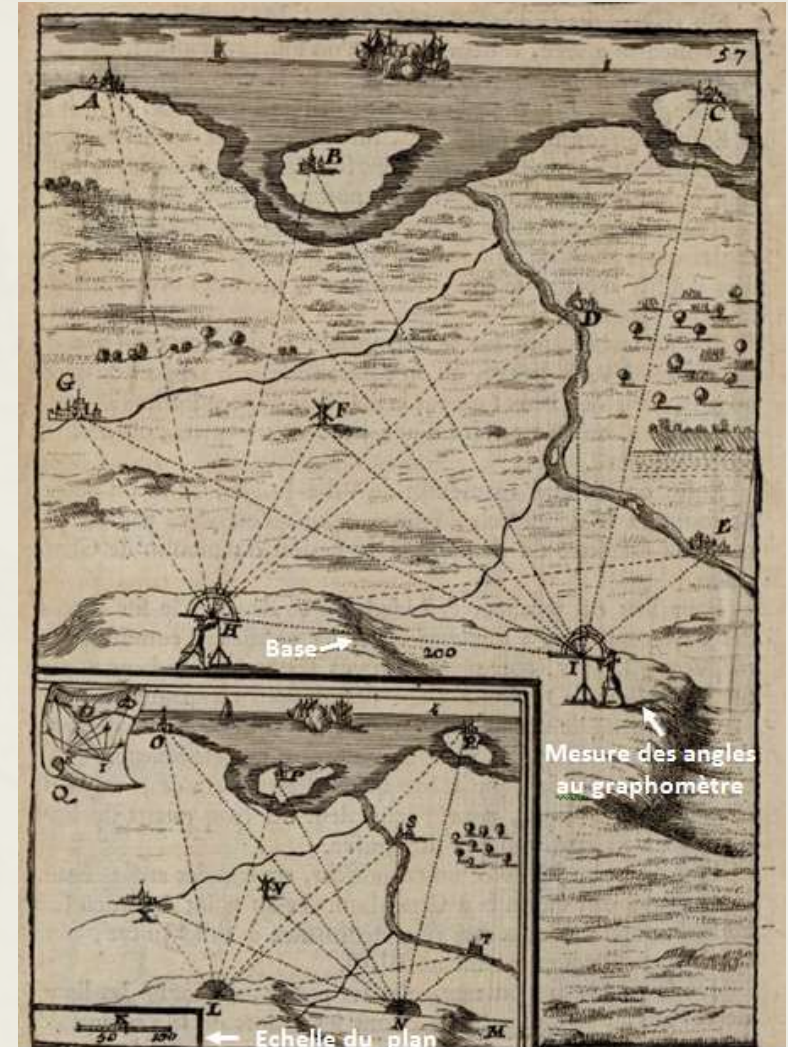
Bilan de la séance au décamètre

- La **mesure directe** n'est pas efficace.
- Des outils ? Des instruments ?



Bilan de l'analyse de la planche:

- Présence de points surélevés et mesure d'angles.
- Prise de notes sur un parchemin enroulé et échelle du plan.
- Manipulation de graphomètres présents dans la salle.
- Repérage d'un point en mesurant une base et deux angles.
- **Mesure indirecte**



V Des exemples de problèmes en 5^{ème} : lever le plan d'une cour

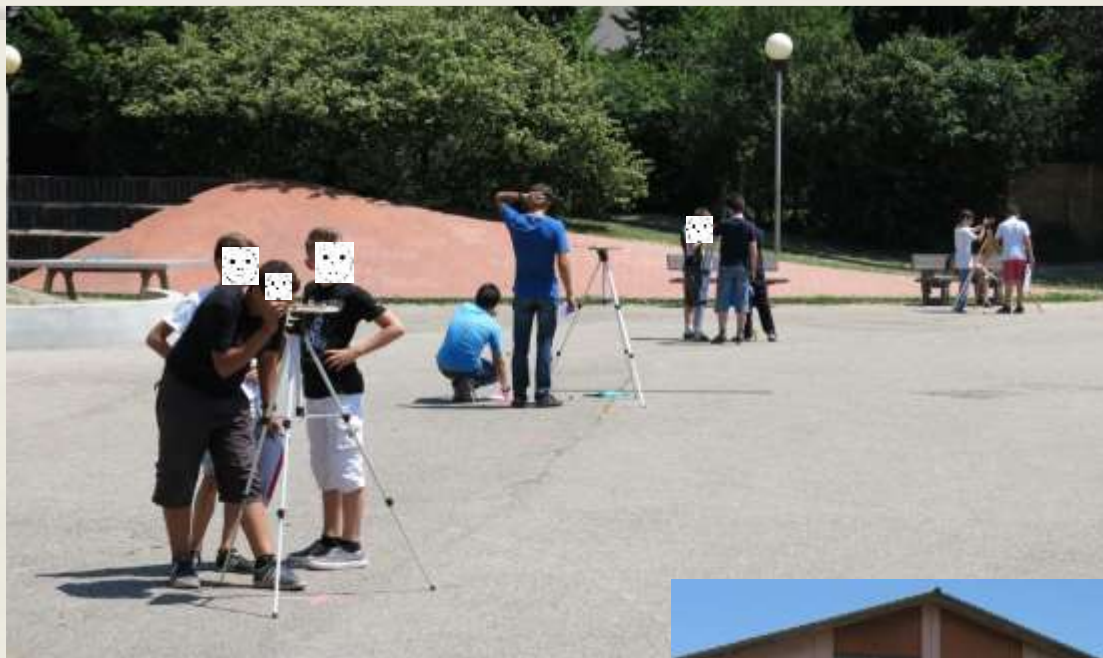
2) 3^{ème} étape : partage de la cour en deux zones et choix des bases sur le terrain

Nord: mesure directe au décamètre

Sud : mesure indirecte au décamètre et au graphomètre à partir de 4 bases choisies avant la séance avec plusieurs élèves (afin d'éviter les visées impossibles).



V Des exemples de problèmes en 5^{ème} : lever le plan d'une cour



3^{ème} étape : mesures sur le terrain

Laussedat , 1898, p 10: « Puisque l'opérateur a mis la nature dans son portefeuille (on a même dit dans sa poche), quand il sera rentré chez lui, il n'aura qu'à l'en faire sortir et à l'interroger à son aise. »

Schéma \Rightarrow abstraction de la réalité

Points nommés \Rightarrow discours sur la figure



V Des exemples de problèmes en 5^{ème} : lever le plan d'une cour

4^{ème} étape : comparaison des résultats avec le cadastre en 2013

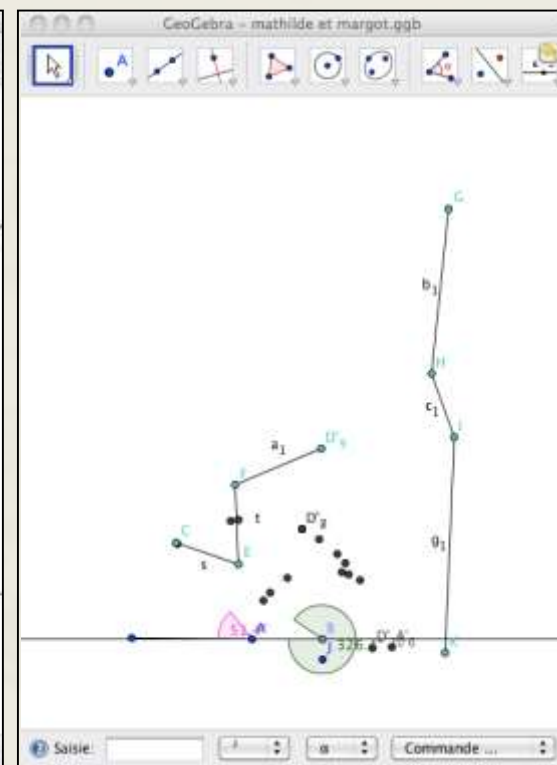
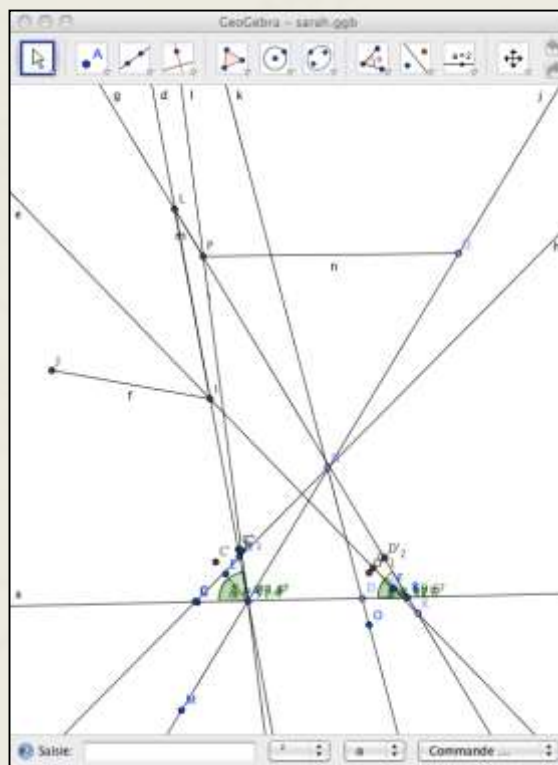
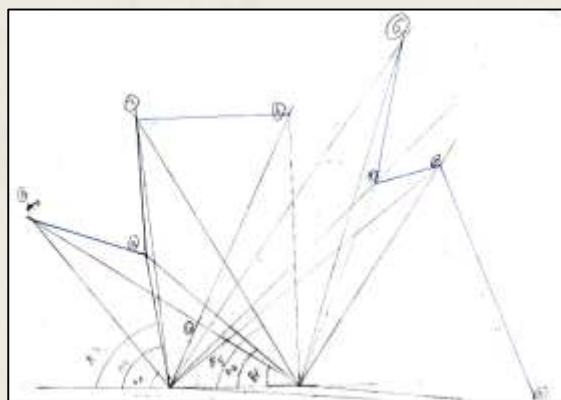
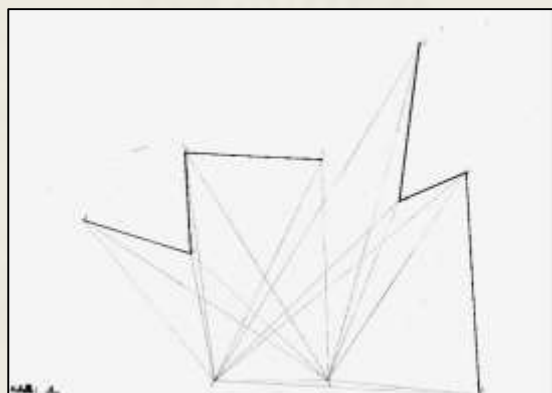
En 2013, la méthode avait été donnée sans investigations préalables

Exemples de tracés aux instruments obtenus

Exemples de tracés avec logiciel:

Difficultés : choix de l'échelle, tracés multiples

Difficultés: tracés multiples, maîtrise du logiciel



V Des exemples de problèmes en 5^{ème} : lever le plan d'une cour

4^{ème} étape : exploitation des données et comparaison au cadastre en 2013

Questions:

- . Mesures irréalistes : qu'en faire ?
- . causes des écarts avec la réalité ?

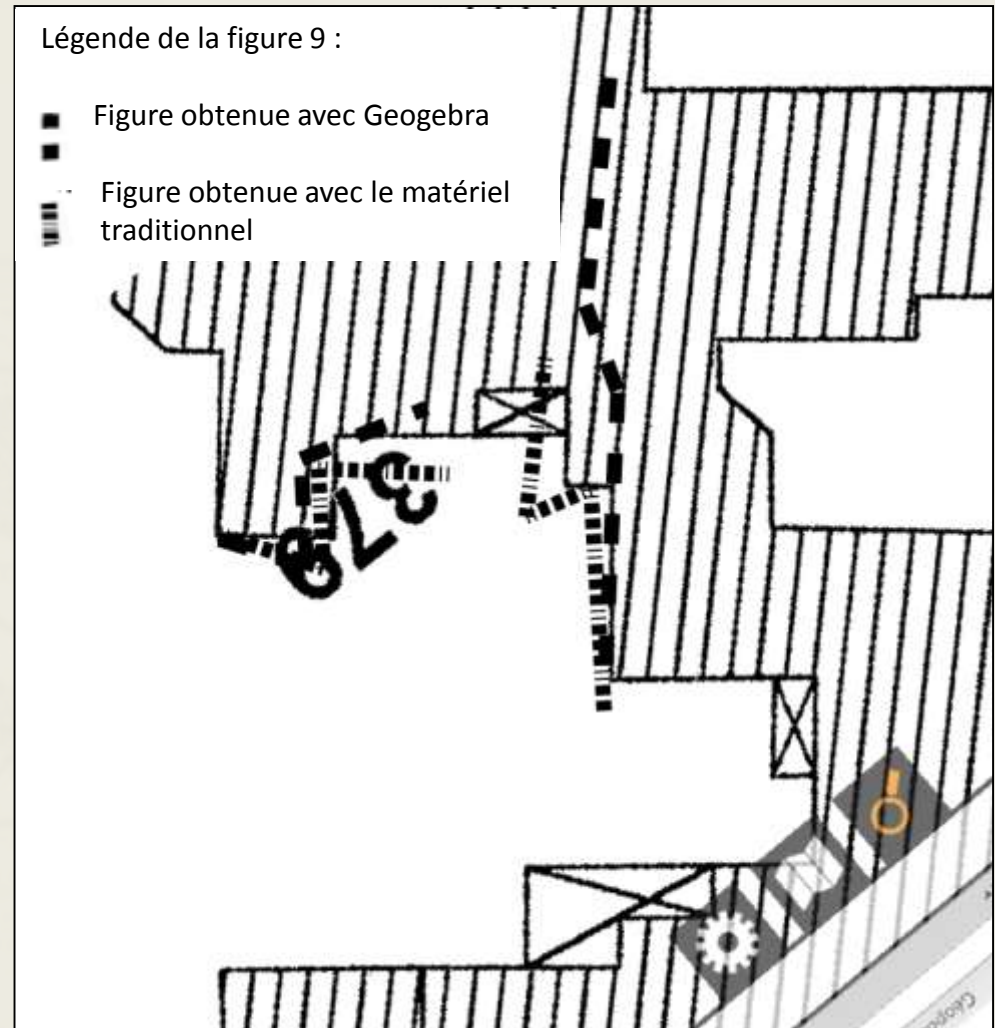
Hypothèses:

1. Erreurs de manipulation des instruments
2. Erreurs de précision de mesure
3. Erreurs d'échelle
4. Erreurs de tracés

Des erreurs aux causes indépendantes !

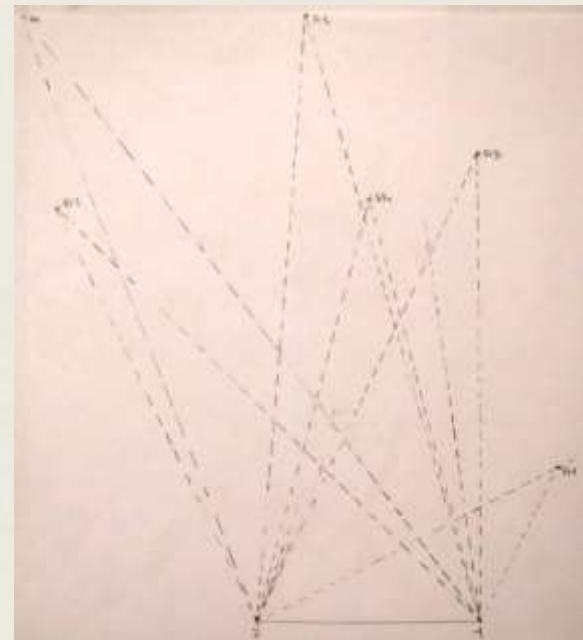
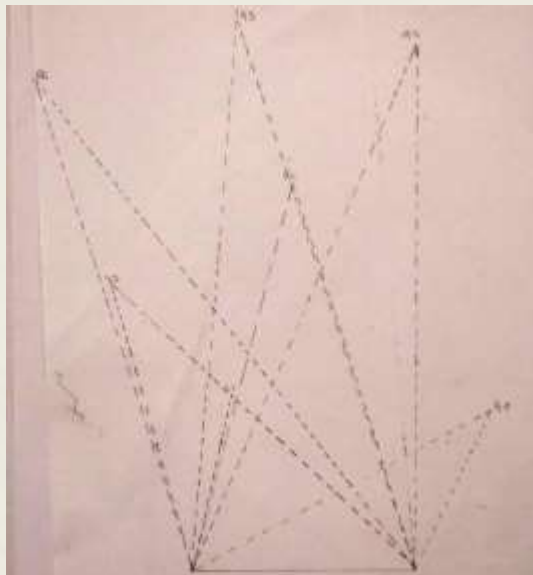
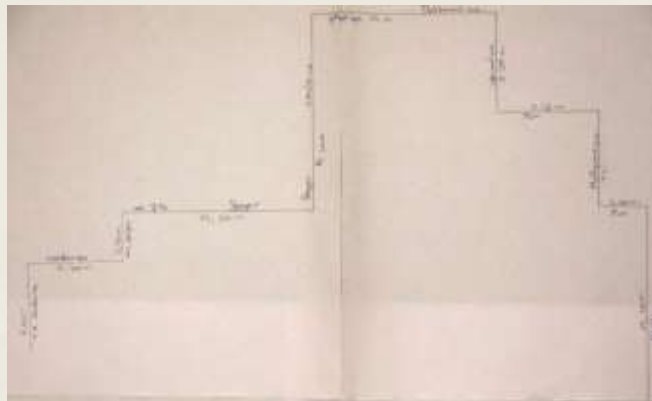
prolongement:

Introduction d'outils statistiques en 4^{ème}



V Des exemples de problèmes en 5^{ème} : lever le plan d'une cour

4^{ème} étape : résultats de 2015



Améliorations:

- . Repérage sur le terrain; soin des figures grâce à un entraînement
- . Préalable à ces constructions de triangles (travail maison).

Difficultés observées:

- . Manipulation de l'instrument sur le terrain; des erreurs de tracés aux causes indépendantes (raisons historiques citées précédemment !)
- . Manque de temps pour terminer le projet (exploitation en salle informatique, assemblage des parties du plan) un projet pluriannuel ?

V Des exemples de problèmes en 5^{ème}: reproduction 3D d'un cdi en maths et technologie (2015-2016)

objectif : « réagencer un espace » pour implanter un nouveau CDI

Cahier des charges : fournir une vue en 3 dimensions réaliste au Conseil Général

Outils : tableur, tablette, logiciel de vue 3D

Instruments de mesure : décamètre, télémètre, graphomètre

Prérequis au projet :

Maths : échelle, figures semblables, angles, triangles, tableur

Technologie : prise de mesures réelles, schéma, normalisation avec les distinctions dessin, schéma et croquis, utilisation d'un tableur

Etapes du projet :

1. **Présentation du projet**: 2 classes de 5^{ème}, documentaliste, 2 professeurs de maths et technologie.
2. **Activité en technologie** : modélisation à l'échelle de la salle, collaborative. Cet outil permet de faire la liaison entre le réel et le plan.
3. **Activité en mathématiques** : levé de plan prise d'informations.
Calculs des longueurs mesurées au décamètre avec tableur comme en techno.
4. **Activité en techno** : plan du cdi avec vue 3D (pratique).



MODALITÉS EN MATHÉMATIQUES:

Durée: 3 heures en mathématiques

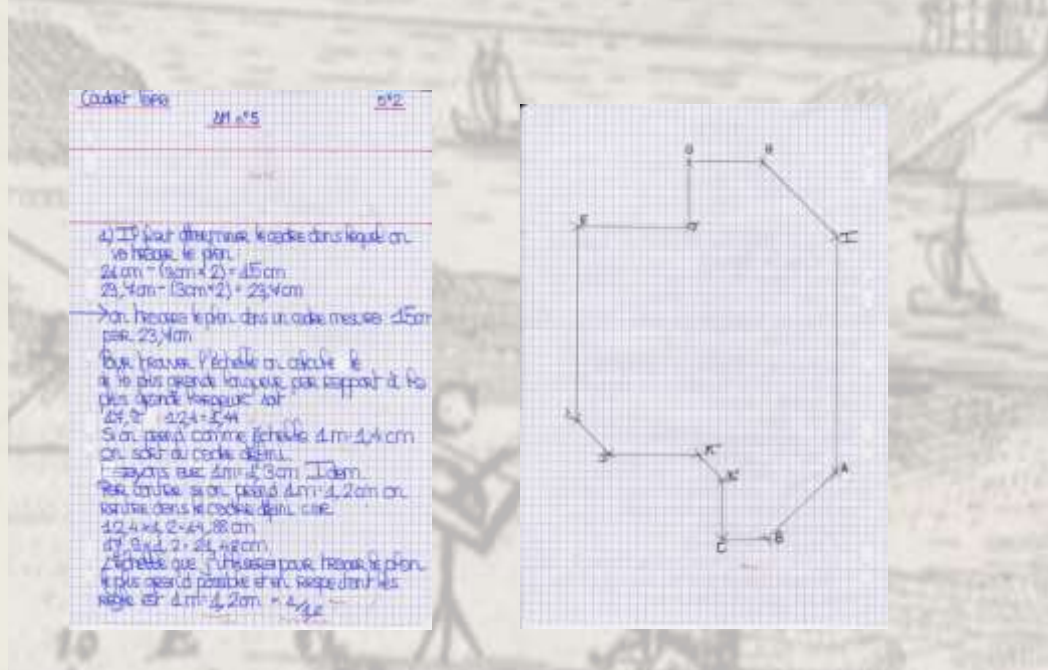
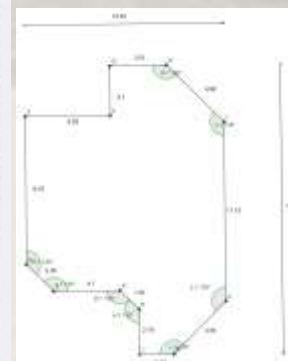
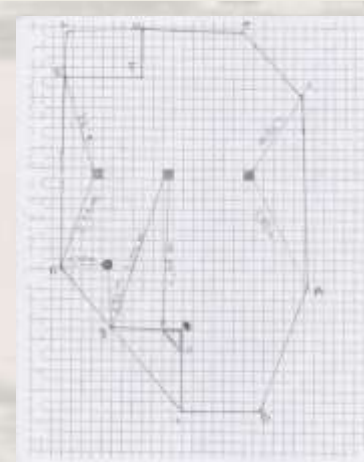
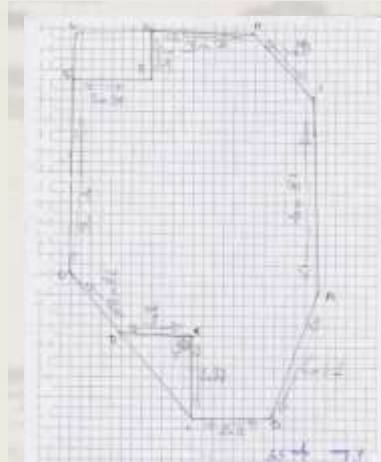
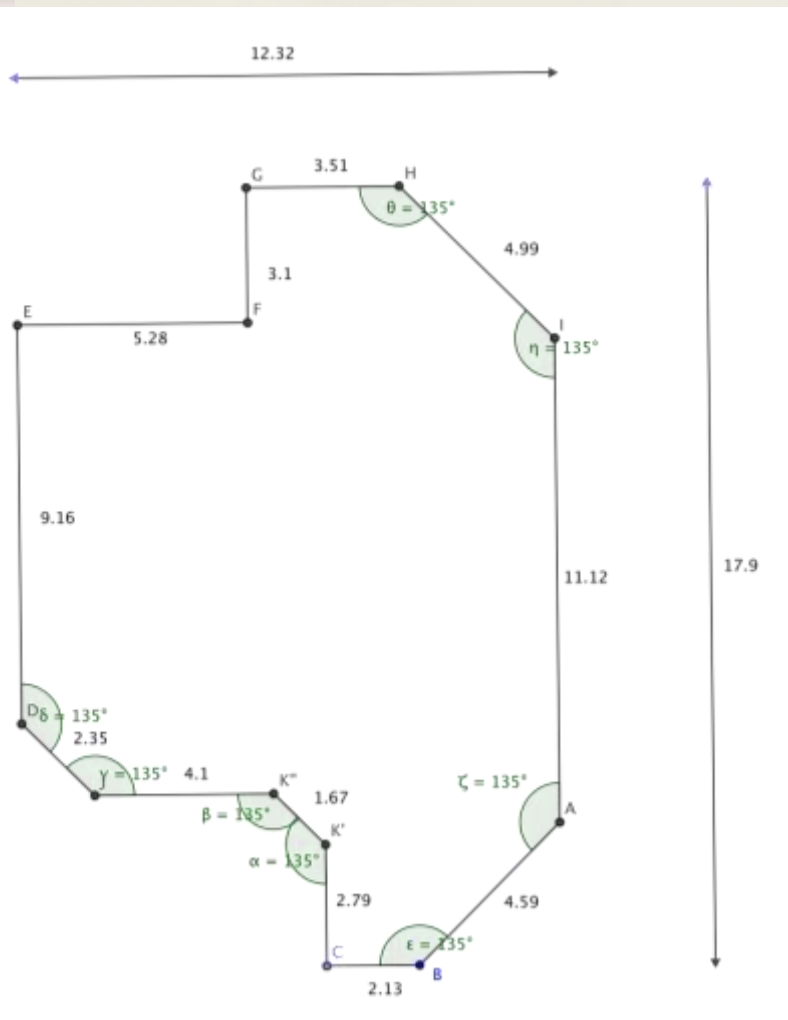
Organisation: travail par équipe de 4

Matériel : 7 décamètres, 5 graphomètres, 10 mires

Espace : CDI ET CLASSE

V Des exemples de problèmes en 5^{ème}: reproduction 3D d'un cdi en maths et technologie (2015-2016)

Maths : Objectif principal : Donner du sens à la notion d'échelle



Cadre type 21x25 n°2

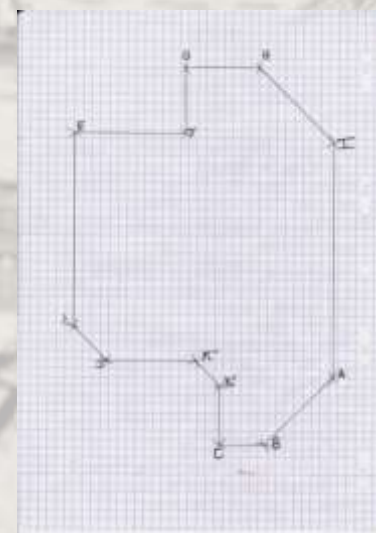
4) Il faut déterminer les côtés dans lequel on se trouve le plan.
 $24 \text{ cm} \times (3 \text{ cm} \times 2) = 144 \text{ cm}$
 $23 \text{ cm} \times (3 \text{ cm} \times 2) = 138 \text{ cm}$

On trouve le plan dans un cadre mesuré de 15 cm par 23 cm.

Pour trouver l'échelle on calcule le plus grand nombre qui soit le rapport de la plus grande longueur soit
 $144 : 138 = 4 : 3$

Si on prend comme échelle 1 m = 2,4 cm on sera sûr de perdre de vue.
 Il faut donc une échelle de 1 m = 2,4 cm.
 Pour cela on prend 1 m = 2,4 cm on trouve dans le cadre de 15 cm
 $15 : 2,4 = 6,25$
 $23 : 2,4 = 9,58$

L'échelle que l'on utilise pour faire le plan le plus grand possible et qui respecte les règles est 1 m = 2,4 cm.



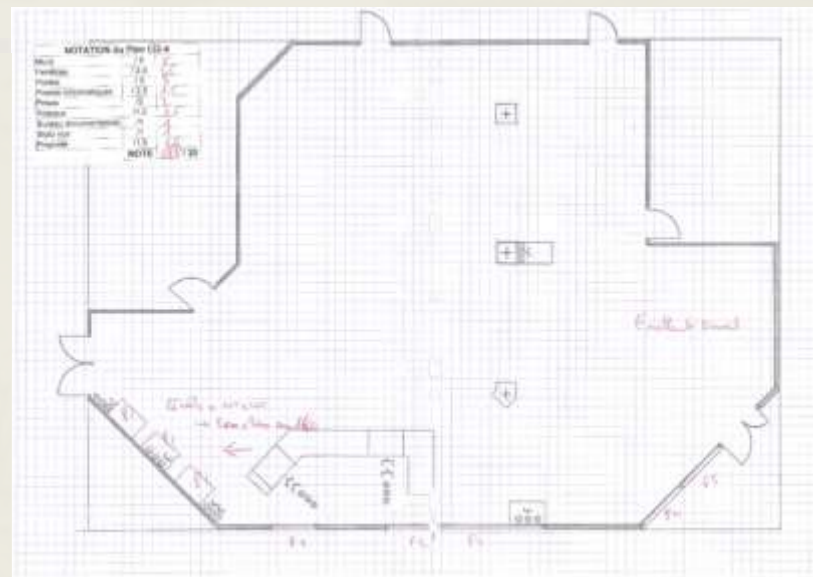
V Des exemples de problèmes en 5^{ème}: reproduction 3D d'un cdi en maths et technologie (2015-2016)

Technologie : Objectif principal : Proposer une nouvelle implantation du CDI

Objectifs secondaires : Traduire sous forme de croquis l'organisation structurelle d'un objet technique, Identifier la solution technique retenue pour réaliser une fonction de service, Modifier tout ou partie d'une structure ou d'un assemblage pour satisfaire une fonction de service donnée.

Etapes réalisées :

- 1- Définir un cahier des charges
- 2- Choisir un outil de mesure adapter à la réalisation de notre objectif
- 3- Effectuer les mesures
- 4- Créer un plan normé à l'échelle
- 5- Générer une représentation « 3 D » du CDI avec « Sweet home 3D »
- 6- Proposer une nouvelle implantation du mobilier du CDI, conforme au cahier des charges.



V Des exemples de problèmes en 4^{ème} et 3^{ème} : distances inaccessibles

ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES-FONCTIONS

→ proportionnalité

→ échelle

→ utilisation du coefficient de proportionnalité

→ produit en croix

Mesures indirectes de hauteurs inaccessibles avec décamètre et graphomètre



GÉOMÉTRIE → figures planes

→ agrandissement-réduction

→ relations trigonométriques

MODALITÉS:

Durée: libre selon les nombres de mesures effectuées, activité mentale possible

Organisation: classe partagée en équipes de 5; travail en alternance

Matériel : 1 à 2 décamètres, 1 à 2 graphomètres

Espace : salle ou cour du collège



Prolongement : Réalisation de patrons de salles de classe à l'échelle

V Des exemples de problèmes en 5^{ème}, 4^{ème} et 3^{ème} : largeur d'un fleuve

2) Investigations sur le terrain

. jalonner une base



. mesure des deux angles



V Des exemples de problèmes en 5^{ème}, 4^{ème} et 3^{ème} : largeur d'un fleuve

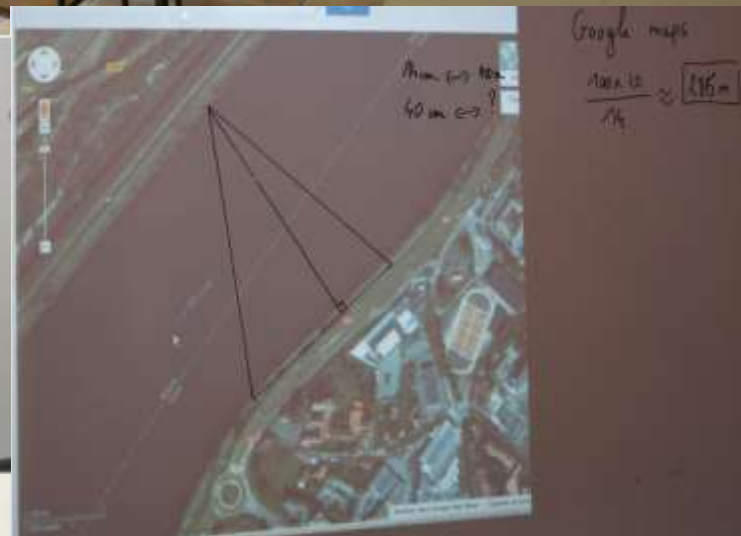
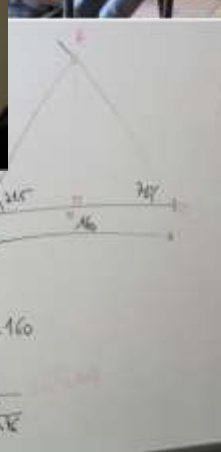
3) Retour en classe : exploitation de la triangulation effectuée sur le terrain

Le travail de cabinet:

Planche extraite de *La géométrie pratique*, tome 2, d'Alain Manesson-Mallet



Confrontation des résultats:



[2015-2016-nouveaux programmes cycle 4.docx](#)

VI Expériences en cycle 3: arpentage

Origine de la géométrie:

Ozanam, *Dictionnaire mathématique ou idée générale des mathématiques*, 1691, p 128 :

« *La géométrie pratique tire son commencement des Egyptiens, qui l'ont inventée pour remédier aux désordres ordinaires qui arrivoient par le débordement du Nil, qui enlevoit tous les bornes et effaçoit toutes les limites de leurs heritages, c'est-à-dire pour rendre à chacun la portion des terres qui lui appartenoit.* »

But de l'arpentage:

Guilmin A., *Cours de mathématiques appliquées, levé de plans, arpentage, nivellement, notions de géométrie descriptive, à l'usage des lycées et des collèges et de tous les établissements d'instruction publique*, Paris, Auguste Durand, 1861, p 67

97. L'arpentage a pour objet de mesurer la superficie des terrains.

On y parvient en appliquant les principes développés dans le IV^e livre de géométrie. Si le terrain est terminé par des lignes droites, c'est un polygone que nous savons mesurer. S'il est limité en totalité ou en partie par des lignes courbes, on décompose celles-ci en parties suffisamment petites pour qu'elles puissent être considérées comme des lignes droites; on rentre ainsi dans le cas précédent, et on peut appliquer les mêmes principes.

Ayant étudié le IV^e livre, nous savons d'avance quelles sont les principales opérations de l'arpenteur sur le terrain : tracer ou choisir des bases; abaisser des perpendiculaires sur ces bases; mesurer les unes et les autres. Il a donc besoin d'une chaîne, d'une équerre et de jalons; nous connaissons ces instruments et la manière de s'en servir.

L'arpenteur dessine ordinairement à vue et à main levée un croquis du contour du terrain. Il choisit ou trace sur cette figure les lignes qu'il convient de mesurer pour en évaluer la surface. Puis il mesure ces lignes sur le terrain, en ayant soin d'inscrire sur son croquis chaque nombre trouvé à côté de la ligne mesurée. Il a ainsi tous les éléments nécessaires à son évaluation, et n'a plus qu'à calculer; ce qu'il peut faire sur le terrain ou dans son cabinet.

Si l'on possède le plan du terrain construit à une échelle connue, on peut y choisir et au besoin y tracer les lignes nécessaires pour l'évaluation de la surface, mesurer ces lignes, les ramener à la valeur qu'elles auraient sur le terrain, et enfin se servir des nombres trouvés pour le calcul de la surface.

Si, pour un motif quelconque, un arpenteur lève le plan d'un terrain dont il doit aussi évaluer la superficie, il est évident qu'il a intérêt à faire son levé à l'équerre, afin que les mesures prises pour le levé servent pour l'arpentage.

Compétences du cycle 3:

Chercher, modéliser, représenter, raisonner

Connaissances du cycle 3 :

Proportionnalité : problèmes relatifs aux échelles,

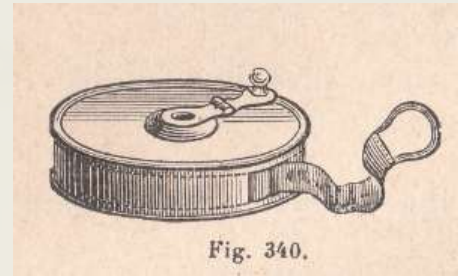
Géométrie : se repérer, figures, constructions,

Grandeurs et mesures : longueurs, aires, résolution de problèmes avec grandeurs

VI Expériences en cycle 3: quels outil(s) et instrument(s) ?

Décamètre et équerre d'arpenteur :

Usage : Tracés de perpendiculaires et d'alignements sur le terrain.

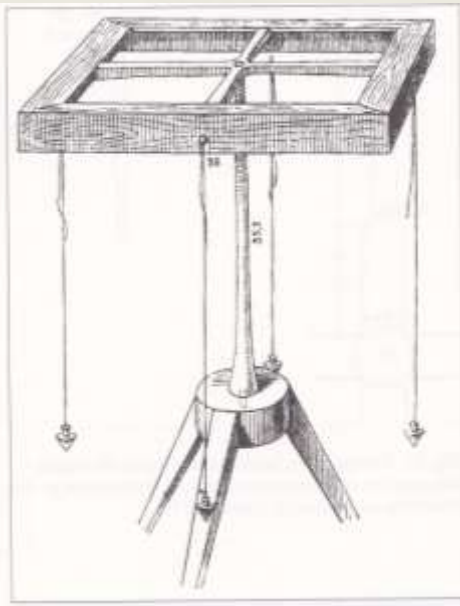


Ancêtres de l'équerre d'arpenteur:



← Reconstitution d'une groma (musée Pont du Gard)

Vestiges d'une groma de Pfunz et sa reconstitution en 1901 →

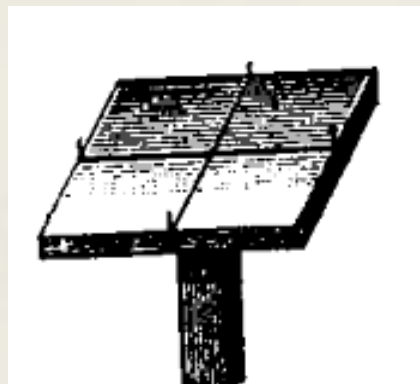
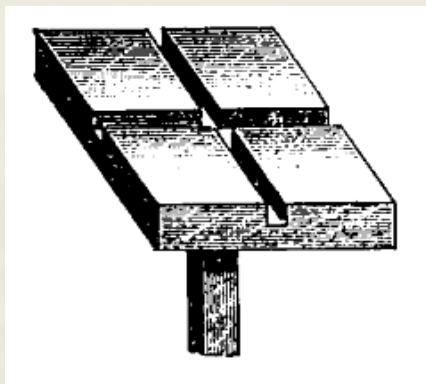


↑ Arpenteur juré tenant un bâton d'arpenteur ↑ sur lequel est fixé l'équerre à pinnules, gravure du XVIème siècle.

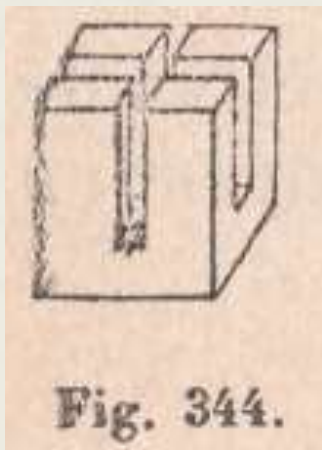
VI Expériences en cycle 3: considérations matérielles

○extraits des *Curiosités géométriques* d'Emile Foureay, Paris, 1869, p 172- 173

L'équerre d'Elie Vinet (1583) et la croix arpentique de Simon Stevin (fin du XVI^{ème} siècle)



○Instructions p 314 , extraites du chapitre XXIX portant sur le levé des plans de l'ouvrage *Géométrie plane, arpentage et levé de plan* par Hue et Vagnier, paru chez Delagrave , Paris, 1893



On peut remplacer l'équerre d'arpenteur par un simple cube en bois dans lequel on aurait pratiqué deux traits de scie perpendiculaires entre eux, passant par l'axe du cube parallèlement aux faces et jusqu'aux deux tiers environ de sa hauteur (fig. 344).

Un trou fait suivant l'axe de ce cube permettra de fixer l'instrument sur un bâton.

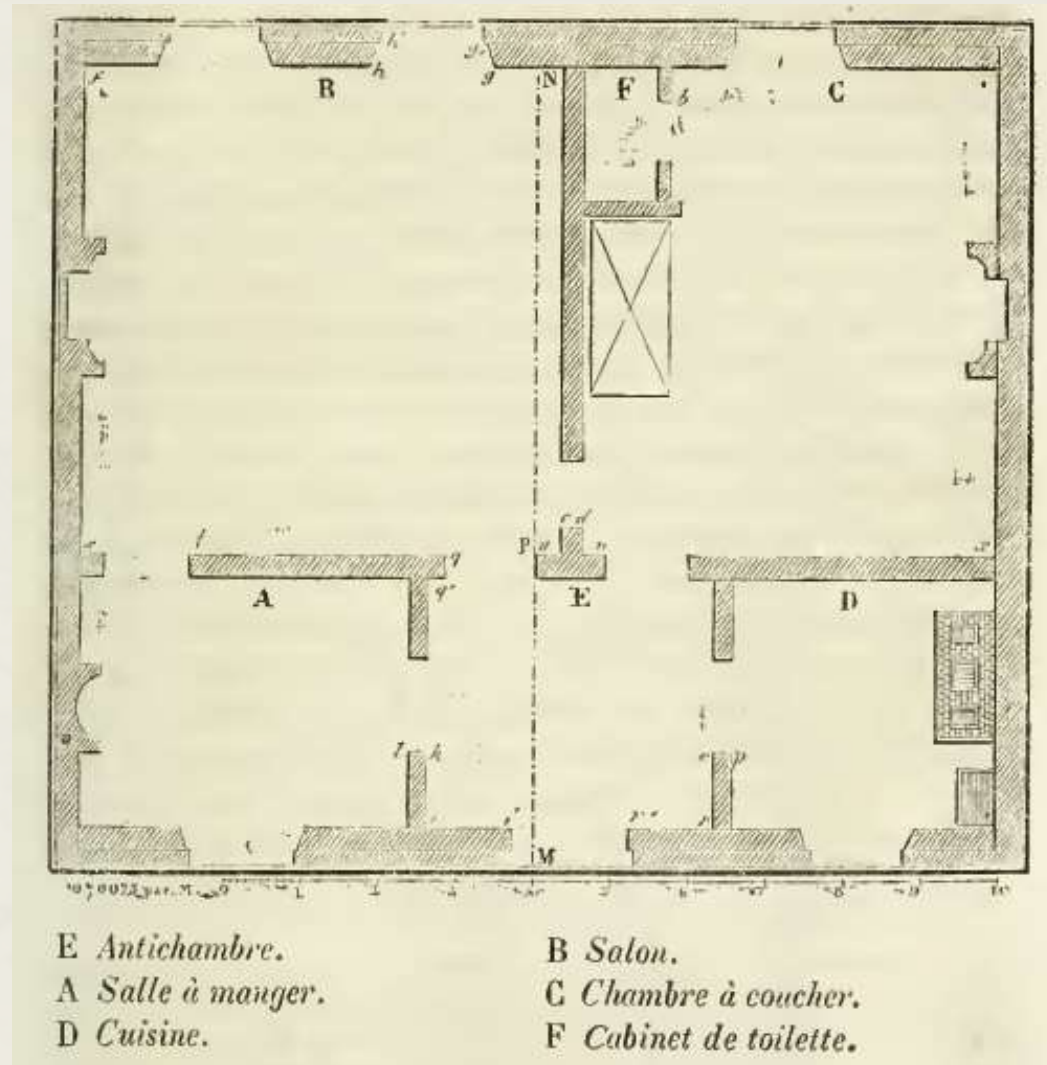
VI Expériences en cycle 3: quels problèmes?

Le levé au mètre :

Exemple : Lever le plan d'une pièce

Méthode : mesure directe au décamètre

Guilmin A., *Cours de mathématiques appliquées, levé de plans, arpentage, nivellement, notions de géométrie descriptive, à l'usage des lycées et des collèges et de tous les établissements d'instruction publique*, Paris, Auguste Durand, 1861, p 51



VII Expériences en cycle 3: quels problèmes ?

Mesurer l'aire de terrains :

Hue et Vagnier A., *géométrie plane, arpentage et levé de plan*, Paris, Delagrave, 1893, p 320 à 322

Problème.

523. Mesurer un terrain de forme triangulaire.

Soit le triangle ABC (fig. 355). On place des jalons à chacun des sommets et on trace le croquis. On mesure un côté AB, pris pour base; du sommet C, on mène CP

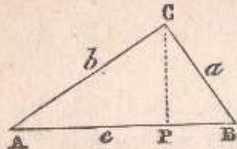


Fig. 355.

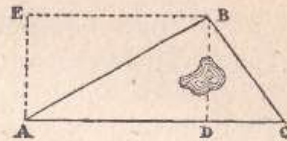


Fig. 356.

perpendiculaire à AB et on mesure cette perpendiculaire, qui est la hauteur du triangle.

Enfin, on fait le demi-produit des nombres mesurant la base et la hauteur.

526. Mesurer un terrain ayant la forme d'un quadrilatère.

Si le quadrilatère est un rectangle ou un parallélogramme, on mesure la base et la hauteur, et on fait le produit des nombres obtenus; si c'est un trapèze, on fait la demi-somme des nombres mesurant les deux bases et on la multiplie par le nombre mesurant la hauteur.

Soit ABCD un quadrilatère quelconque (fig. 357). On met un jalon à chaque sommet et on trace le croquis.

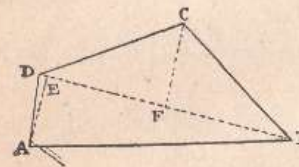


Fig. 357.

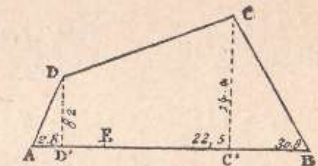


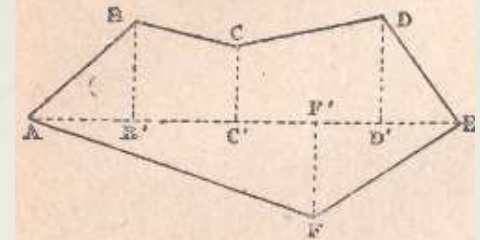
Fig. 358.

Connaissances du cycle 3 :

Proportionnalité : problèmes relatifs aux échelles,

Géométrie : se repérer, figures, constructions,

Grandeurs et mesures : aire du triangle, pavages de figures, aires obtenues par assemblage



528. Mesurer un terrain de forme polygonale.

VI Expériences en cycle 3: quels problèmes ?

Mesurer l'aire de terrains :

Hue et Vagnier, *géométrie plane, arpentage et levé de plan*, Paris, Delagrave, 1893

529. *Mesure d'un terrain limité par une ligne courbe irrégulière.* — Soit le terrain ABCDEF (fig. 361). Inscrivons dans cette figure un polygone quelconque, un triangle par exemple.

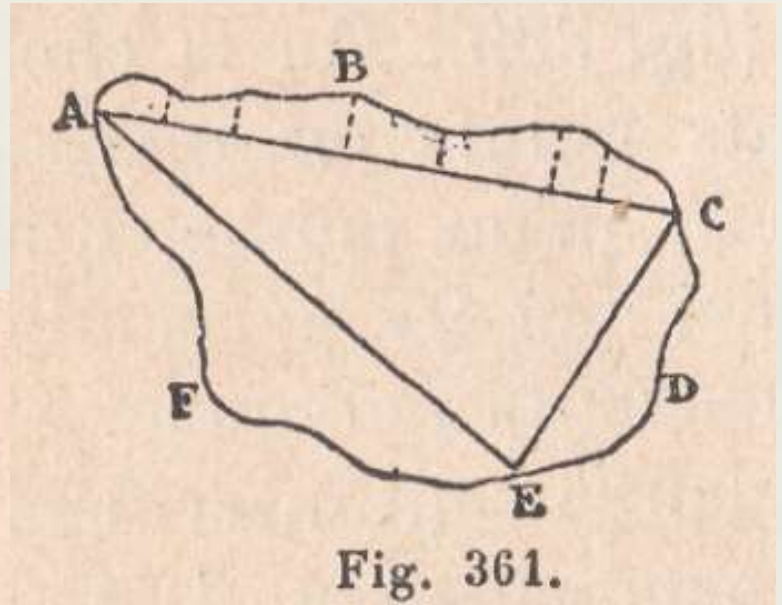


Fig. 361.

Jacquet et Laclef, *cours de géométrie théorique et pratique*, F. Nathan, Paris, 1923

Arpenter un terrain dont l'intérieur est inaccessible (comme un bois)

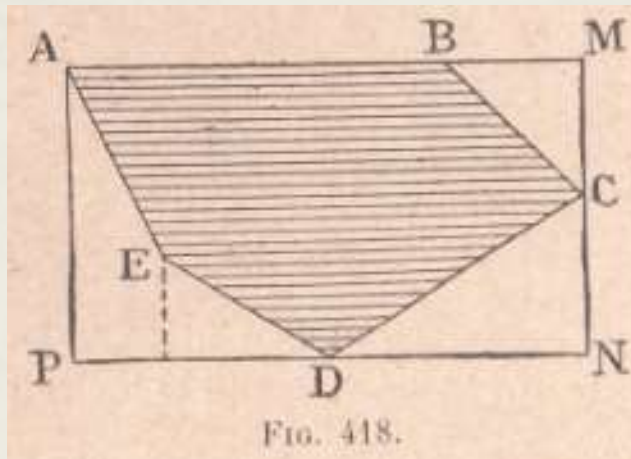


Fig. 418.

Connaissances du cycle 3 :

Proportionnalité : problèmes relatifs aux échelles,

Géométrie : se repérer, figures, constructions,

Grandeurs et mesures : aire du triangle, pavages de figures, aires obtenues par assemblage

Merci pour votre attention !