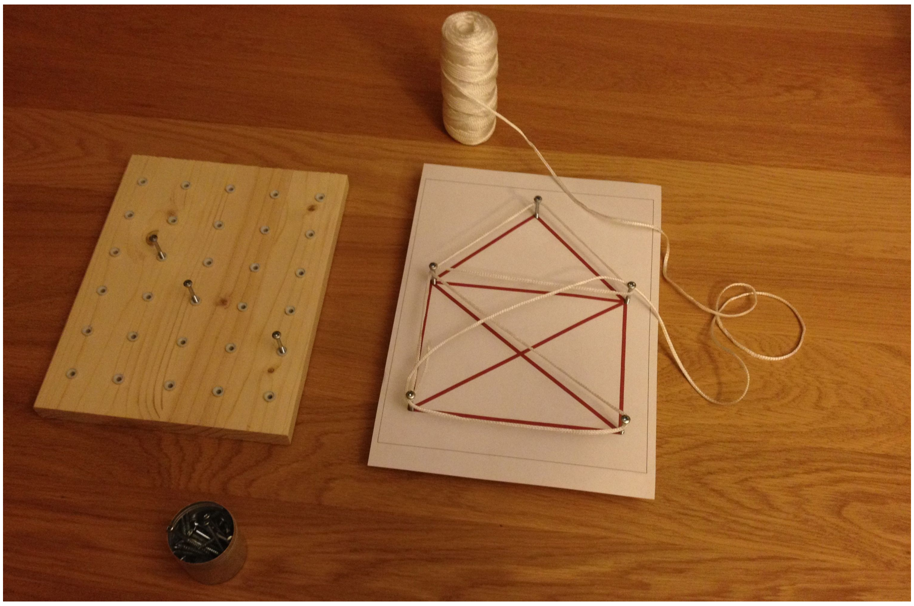
Auteur : Jean-Marc.Vincent@imag.fr
Université Joseph Fourier, UFR IM^{2}AG, Inria Rhône-Alpes, IREM-Grenoble

Préambule

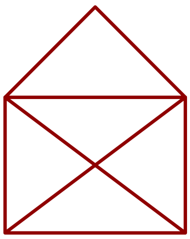
Cette activité permet, par la manipulation de ficelle et de planche à clou, de découvrir la notion de chemin et de circuit dans un graphe non orienté. Ensuite, par essais successifs, de trouver un chemin eulérien, c'est à dire passant par toutes les arêtes du graphe. La démarche proposée est de réfléchir à un problème, admet-il une solution ? Peut-on vérifier facilement qu'il admet au moins une solution ? S'il admet au moins une solution, comment en construire une ? Les construire toutes ? Est-ce facile ?

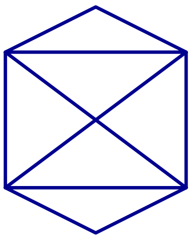
Le problème : trouver le chemin du facteur qui part de la poste, passe une et une seule fois dans chaque rue pour distribuer son courrier, et finalement revient à la poste.



Exploration classique

À partir d'une planche (simple) trouver avec la ficelle le chemin du facteur

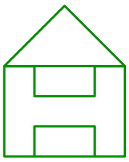
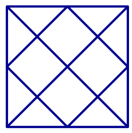
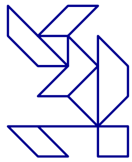




Questions : Est-ce possible ? Est-ce que cela dépend du point de départ ? Si c'est possible est-ce que c'est facile ?

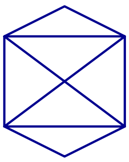
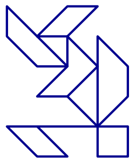
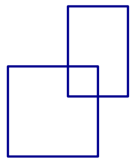
Existence d'au moins une solution

Questions : À quelles conditions n'y aura-t'il pas de une solution ? Qu'est que le degré d'un nœud du graphe ? Que se passe-t'il si on prend les exemples suivants :

Construction de la solution

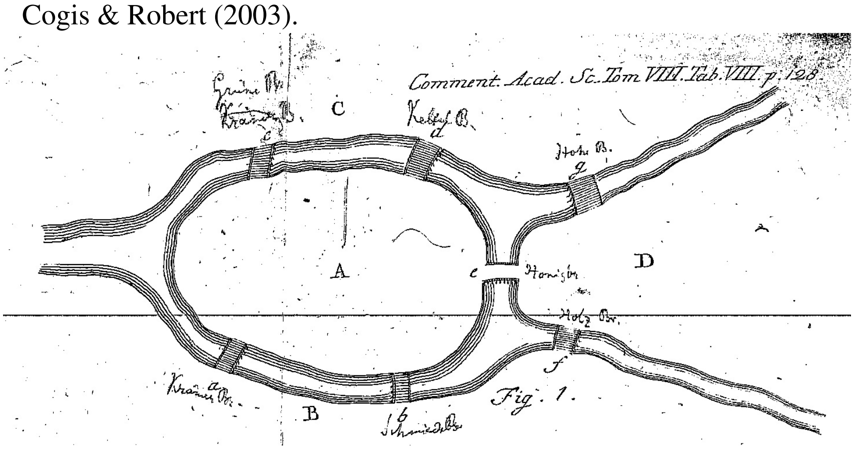
Questions : La parité du degré des sommets garantit que si la ficelle arrive sur un sommet elle peut en repartir (sauf peut-être si c'est le début du chemin eulérien). Un premier algorithme consiste à avancer avec la ficelle jusqu'à retomber sur ses pieds. Est-ce que cela marche ?

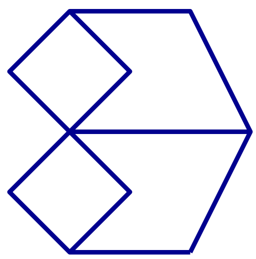




Questions : Si cela ne marche pas, que faut-il faire ?

Un peu d'histoire ...

Le problème de parcours de graphe en utilisant une et ne seule fois chaque arête a été résolu par Euler (1736) à propos de promenade dans la ville de Koenigsberg passant une et une seule fois par chacun des ponts. On trouvera une traduction de l'article d'Euler dans l'introduction à la théorie des graphes par Cogis & Robert (2003).





Références

Cogis, O. & Robert, C. (2003), *Au-delà des ponts de Königsberg, Theorie des graphes, Problèmes, Théorèmes et Algorithmes*, VUIBERT.

Euler, L. (1736), 'Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis', *Opera Omnia* **7**, 128–140.