Chasse à la bête

Introduction. Cette situation de recherche a été créée par Éric Duchêne. Elle est expérimentée depuis sa création par des collègues de Maths à Modeler et de l'IREM de Grenoble. C'est une situation très stable qui, quand elle est menée comme elle a été prévue, ne présente pas de risque didactique. Elle peut venir assez naturellement après la situation des « pavages de polyminos ». Elle est adaptée pour les élèves de la fin de cycle 2 jusqu'à l'université.

Problèmes

Problème 1. On se donne un carré 5x5 qu'on appellera jardin, des carrés 1x1 qu'on appellera des pièges et des dominos 2x1 qu'on appellera des taupes. De combien de pièges a-t-on besoin au minimum pour protéger le jardin des taupes, c'est à dire pour empêcher une seule taupe de se poser dans le jardin.

Problème 2. Même jardin, mêmes pièges, mais les taupes sont maintenant des triminos 3x1. Même question.

Problème 3. Même jardin, mêmes pièges, mais les taupes sont maintenant des triminos coudés. Même question.

Il y a une vraie progression en terme de complexité et les problèmes 2 et 3 permettent de réinvestir les raisonnements et méthodes utilisées au problème 1.

Matériel pour la situation

Matériel. Pour chaque groupe, un plateau 5x5 (jardin), 13 dominos (petites taupes), 9 triminos droits (grandes taupes), 9 triminos coudés (grandes taupes tordues), 25 carrés 1x1 (pièges). Et donc un « cahier de recherche ».

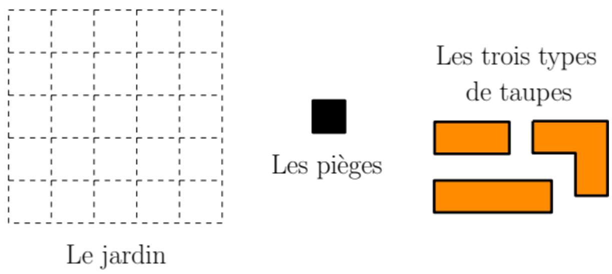


Figure 1. Le matériel de chaque groupe

Organisation didactique

Gestion. Comme dans la plupart des SiRC, il faut donner du temps aux élèves si l'on veut qu'ils entrent dans un travail de recherche (2 à 3 heures). On place les élèves par groupes de 3 ou 4. Il est fortement recommandé de proposer aux groupes de remplir un cahier de recherche et de noter au fur et à mesure leurs découvertes, leurs observations et leurs résultats partiels.

Cheminement expérimental et éléments de résolution mathématique

Pour le problème 1

On les lance sur le problème 1. Certains groupes proposent tout de suite une solution à 12 pièges, d'autres à 13 (et ils ont l'impression de ne pas pouvoir faire mieux). D'autre avec plus de pièges encore. Nous proposons dans un premier temps, pour tous les groupes, de leur enlever un piège et d'essayer de trouver une nouvelle solution sans donner aucune indication sur la faisabilité ou en affirmant que c'est possible (même si ça ne l'est peut-être pas). Il est important de faire vérifier la validité des solutions proposées (le jardin ne doit pas pouvoir accueillir une taupe).

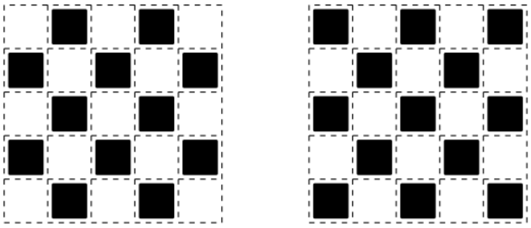


Figure 2. Solutions à 12 et 13 pièges

Pour les élèves qui ont trouvé une solution à 13 pièges ou plus, une fois qu'on leur a demandé de chercher avec un piège de moins, ils arrivent en général à trouver une solution à 12 pièges, quitte à continuer de retirer un piège pour chaque solution valide proposée.
Pour ceux qui ont trouvé une solution à 12 pièges, et à qui on enlève un piège, ils cherchent puis se persuadent qu'il n'y a pas de solution. Au bout d'un moment, s'ils s'obstinent à chercher, on peut demander quelle est leur conviction : « possible ou pas possible avec 11 pièges ». En général ils finissent par se convaincre qu'avec 11 pièges ce n'est pas possible et il faut donc leur proposer de chercher par eux-même pourquoi ce n'est pas possible.

Si aucune idée de preuve ne vient (il faut leur laisser le temps de tester des choses et de chercher par eux-même), on peut leur poser une question pour changer de point de vue : combien peut-on poser au plus de taupes dans le jardin ? En général tous les groupes arrivent à poser 12 taupes. On demande d'essayer d'en poser 13 et ils sont souvent capables de dire qu'on ne peut pas (le jardin contient 25=12x2+1 cases).

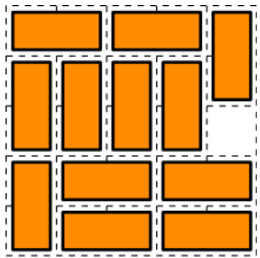


Figure 3. Jardin envahi

On peut relancer alors les élèves sur la question de la preuve que : « avec 11 pièges on ne peut pas protéger le jardin ». Une fois posées 12 taupes, ils devraient trouver qu'il faut placer au moins un piège par taupe pour chasser l'ensemble des taupes du jardin.

Institutionnalisation à la fin du problème 1
Quand on a réussi à protéger le jardin avec 13 pièges (par exemple), on a montré qu'il suffit de 13 pièges. Et que comme on l'a montré aussi pour 12 on a aussi montré qu'il suffit de 12 pièges. On dira qu'avoir 13 pièges et avoir 12 pièges sont des conditions suffisantes (en terme de nombre de pièges) pour protéger le jardin. D'autre part 12 et 13 apparaissent comme des majorants du nombre minimal de pièges nécessaires pour protéger le jardin.
Quand on a réussi à rentrer 12 taupes sur le jardin et qu'on a compris qu'il fallait un piège pour chaque taupe posée, on a montré qu'il faut avoir au moins 12 pièges pour protéger le jardin. Avoir au moins 12 pièges est donc une condition nécessaire pour protéger le jardin. D'autre part 12 est un minorant du nombre de pièges minimal nécessaire pour protéger le jardin.
Puisque poser 12 pièges est nécessaire et suffisant pour protéger le jardin, le nombre minimal de piège recherché est donc 12.
On pourra récapituler au tableau le lien entre conditions nécessaires/suffisants, au moins/au plus et ≤/≥.
On pourra faire remarquer aussi que lorsqu'on a posé des pièges sur les emplacements de taupes, on a empêché des positions de taupes, ou des zones dans lesquelles on ne peut plus a posteriori poser de taupe.

Remarque. Si on veut faire travailler les notions de condition suffisante/nécessaire, on peut aussi faire débattre sur les phrases :

- il faut au moins 10 pièges pour protéger le jardin. VRAI ou FAUX ?
- le nombre cherché est inférieur ou égal à 13. VRAI ou FAUX ?
- 10 pièges suffisent. VRAI ou FAUX ?
- il suffit de 14 pièges pour protéger le jardin. VRAI OU FAUX ?

Nous conseillons aux enseignants de n'engager ce débat que s'ils se sentent au clair sur ces notions car il faudra finir en institutionnalisant correctement. Par exemple les réponses aux quatre questions sont : VRAI, VRAI, FAUX et VRAI.

Pour le problème 2 (triminos 1x3)

Une fois résolu le problème 1, on peut proposer aux élèves le problème 2 en les laissant plus autonomes.

Les groupes ont souvent des idées sur les conditions nécessaires ou suffisantes et trouvent des solutions pour protéger le jardin avec 8 ou 9 pièges. Ceux qui arrivent à 9 pièges (souvent placés en forme de croix) se rendent compte qu'un des pièges ne sert à rien vu la disposition des autres pièges et finissent par arriver à 8.

Quand ils cherchent la condition nécessaire, souvent les groupes arrivent à poser 7 taupes mais pas 8 dans le jardin. Ceci ne leur permet donc pas d'appliquer directement le raisonnement du problème pour conclure quant-à la solution optimale. Il est important de leur faire remarquer qu'ils ont un résultat partiel mais que c'est un résultat (le nombre est 7 ou 8). Il arrive souvent que de tels résultats soient publiés en recherche.

On peut les relancer en leur affirmant qu'on peut poser 8 taupes. On peut aussi demander d'essayer de poser 9 taupes. L'objectif étant de faire prendre en compte la taille du jardin (comme pour le problème 1) ou d'invoquer la solution suffisante à 8 pour justifier qu'on ne peut poser 9 taupes.

Il convient, si les élèves ne le font pas, d'institutionnaliser que le nombre optimal est 8 et correspond aux deux solutions ci-après.

Il est intéressant de remarquer que quand on essaie de construire la solution, on a l'impression que poser un piège sur la case centrale semble favorable car cela empêche de nombreuses positions de taupes (6), pourtant aucune solution optimale n'a de piège posé au centre. De même, poser un piège dans un coin semble moins favorable puisque cela n'empêche que deux positions de taupes et pourtant une des deux solutions optimales a un piège dans un coin. Dit autrement, un optimum local ne correspond pas forcément à une solution globalement optimale.

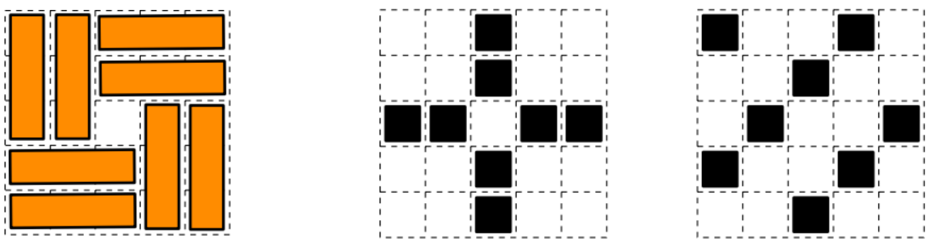


Figure 4. Jardin envahi et jardins protégés avec 8 pièges

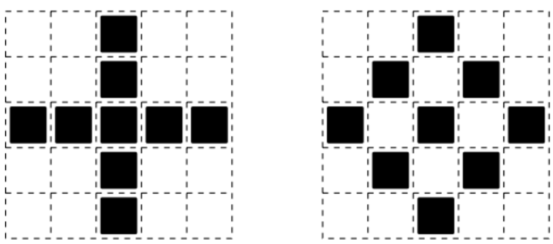


Figure 5. Jardins protégés avec 9 pièges

Pour le problème 3 (triminos coudés)

Ce problème permet de réinvestir les raisonnements des problèmes 1 et 2 mais nécessite d'aller plus loin. Les élèves partent avec l'idée de faire fonctionner le même type de preuves mais cette fois on ne peut poser que 8 taupes et on ne peut pas protéger le jardin avec 8 pièges. Par contre ils montrent qu'on peut protéger le jardin avec 10 pièges. On a donc un résultat partiel : le nombre optimal est 8, 9 ou 10.

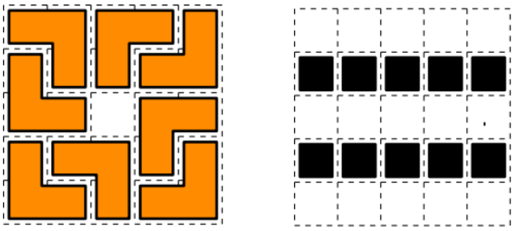


Figure 6. Jardin envahi et jardin protégé

Pour décider quel est le nombre optimal, on peut demander de protéger le jardin en l'explorant par parties : combien de pièges pour protéger un carré 2x2 ? Une fois observé qu'il faut au moins 2 pièges pour protéger un carré 2x2, on peut les renvoyer vers le jardin et ils arrivent souvent à montrer qu'il faut au moins 9 pièges. Voir figure ci-contre.

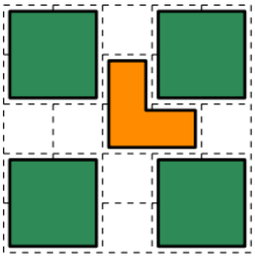


Figure 7. Jardin zoné pour prouver qu'il faut au moins 9 pièges

Cependant, différents essais de pavages avec 9 pièges convainquent que 9 n'est pas suffisant. En effet, 10 pièges sont nécessaires (donc 9 pièges ne sont pas suffisants) mais les pavages qui le prouvent sont difficiles à trouver.
On ne peut pas espérer que tous les groupes arrivent à finir cette preuve et si aucun groupe n'y arrive on peut faire plusieurs choix : soit les laisser chercher seuls « à la maison », soit leur proposer d'observer la figure 8 ci-dessous.

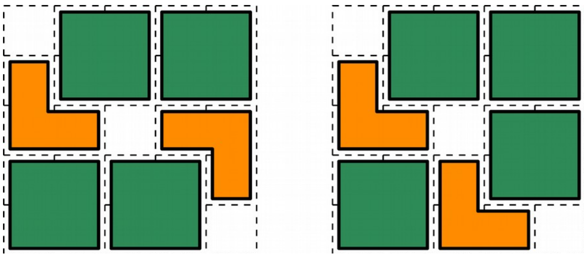


Figure 8 : jardins zonés pour prouver qu'il faut au moins 10 pièges

Connaissances et compétences.

La situation a pour objectif de placer les élèves en situation de recherche. Elle permet de travailler la compréhension d'un énoncé, l'expérimentation, la formulation et l'étude de conjectures, la communication de résultats d'expérimentation.
Elle permet de mettre en lumière la nécessité de la preuve, et de travailler plusieurs types de raisonnements et notions de logique : validité d'une preuve par l'exemple pour les théorèmes d'existence, intuition de l'invalidité d'une preuve par la démultiplication des exemples pour les théorèmes de non existence, l'exhaustivité des cas et le raisonnement par l'absurde.
Elle permet de travailler les notions de symétrie et de pavage.
Etant un problème d'optimisation, elle fait aborder, ce qui est rare, la recherche de majorants et de minorants d'une quantité recherchée, en lien avec les notions de condition nécessaire et de condition suffisante.

La chasse à la bête

fiche élève

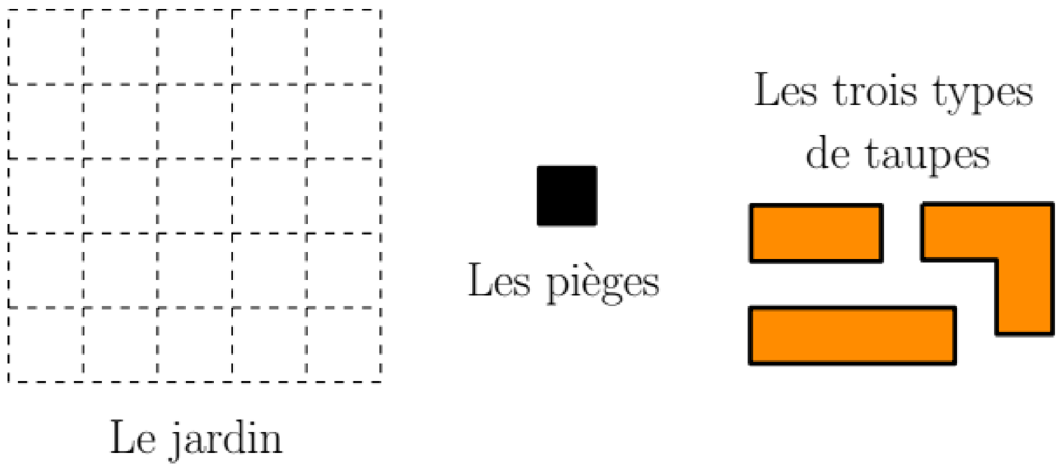
On veut protéger un jardin (grille quadrillée 5x5) des taupes qui veulent s’y introduire. On dispose pour cela de pièges (de taille 1x1). Les taupes comme les pièges se posent exactement sur les cases (et non en travers). Si une case est occupée par un piège, aucune taupe ne peut occuper l’emplacement.

Question : quel est le plus petit nombre de pièges qui pourra protéger le jardin ?

Il y a **trois problèmes distincts** correspondant aux trois types de taupes (elles ne se mélangent pas), à étudier dans l’ordre

Problème 1 : avec les taupes 2x1 (les dominos)
Problème 2 : avec les taupes 3x1 (les triminos droits)
Problème 3 : avec les taupes tordues (les triminos coudés)

Le matériel pour expérimenter : un cahier de recherche et



Il faut avec chaque jardin au moins 13 taupes 2x1, 9 taupes 3x1, 9 taupes tordues et 25 pièges.