IREM de Grenoble, Septembre 2002

RECHERCHE DE CENTRES

Document mis au point par un atelier de recherche “Géométrie et statistiques”,
rédigé par Luc Bouttier,
avec une contribution de Michèle Gandit,
avec la collaboration de Bernard Genevès et Sylvestre Gallot.

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques,
100 rue des maths, BP 41, 38402 SAINT-MARTIN D'HÈRES
Téléphone : 04 76 51 46 62, Télécopie : 04 76 51 42 37, E.mail : direm@ujf-grenoble.fr

C'est une équipe d'enseignants de l'IREM de Grenoble qui a mis au point ce document, après avoir travaillé pendant 3 ans sur le thème. Cette équipe comprend par ordre alphabétique, outre les rédacteurs, Marie-Claire Demongeot, Claire Helmstetter, Christiane Serret, et elle a été aussi aidée dans son travail par Rodney Coleman, Jean-Pierre Demailly... Mais l'ensemble des animateurs de l'IREM a aussi observé et apporté une critique constructive à ce travail.

Nous remercions chacun d'entre d'eux pour son aide.

Michèle Gandit a rédigé tout ce qui concerne la "Fête de la science" et les "Narrations de recherches".

Sylvestre Gallot et Bernard Genevès ont aussi apporté leur contribution, en produisant à tous les deux un paragraphe sur les liens entre certaines des problématiques posées dans cette brochure et les développements plus récents de la recherche en géométrie, et en particulier sur la théorie de Morse.

Problématique

L'idée de départ est la recherche d'un centre : centre-ville, centre de secours, centre commercial, centre de tri, centre culturel, centre d'examen. Où est donc le centre ? Comment le définir ? Quel critère va-t-on choisir ?

Il s'agit de la recherche d'un point qui possède des propriétés intéressantes par rapport à un ou des critères choisis au départ. Nous abordons ainsi des problèmes liés à la modélisation.

Nous avons choisi de décliner ce problème de la recherche d'un centre :

- d'une part, suivant la géographie du lieu, nous chercherons un centre dans une vallée, puis dans une région qui n'est pas trop montagneuse ;

- d'autre part, suivant le type de centre souhaité, s'agit-il d'un centre de secours, d'un centre culturel, d'un centre laitier ?

Nous nous éloignons ensuite un peu des espaces de dimension 1 et 2 en proposant un regard géométrique sur la recherche d'un centre d'une série statistique, c'est-à-dire en nous plaçant dans un espace de dimension n. Il est ainsi donné un nouvel éclairage sur des notions statistiques connues.

Nous réservons une large place à l'activité heuristique engendrée par ces problèmes, en présentant des comptes-rendus de recherche de ces problèmes par des personnes de cultures mathématiques différentes, dans différents cadres : recherche à un stand IREM lors de la fête de la science par des personnes de tous âges, recherche en stage de formation continue par des enseignants de collège ou de lycée, recherche en classe par des étudiants de classe préparatoire.

A la lecture des problèmes qui suivent, accordez-vous un moment de réflexion et repérez comment vous entrez, dans chacun des problèmes. Vous pouvez même faire votre propre narration de recherche.

Nous donnerons malgré tout, dans un dernier chapitre, des éléments de réponse aux différentes questions que nous avons posées, et à différentes démarches qui avait pu être esquissées mais qui n'avaient pas été encore menées jusqu'à leur terme. Nous donnerons également en annexes quelques réponses à des questions plus générales, et des éléments qui permettent de prolonger la réflexion en lien avec des théories récentes en géométrie.

RECHERCHE DE CENTRE

Table des matières

QUELQUES QUESTIONS

Le centre de secours

Dans une région se trouvent quatre villages de même importance. Ceux-ci veulent se doter d'un centre de secours commun.

Le centre de secours abritera un hélicoptère qui pourra être chargé des interventions.

Où placer le centre de secours ?

A propos du centre de secours

Voici quelques propositions de dessins

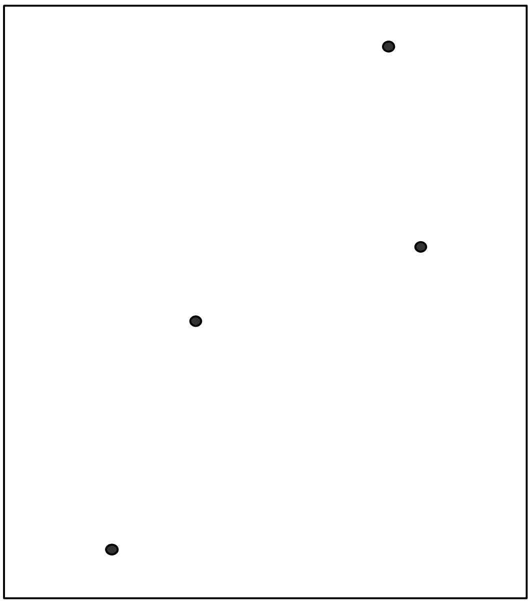


Figure n°1

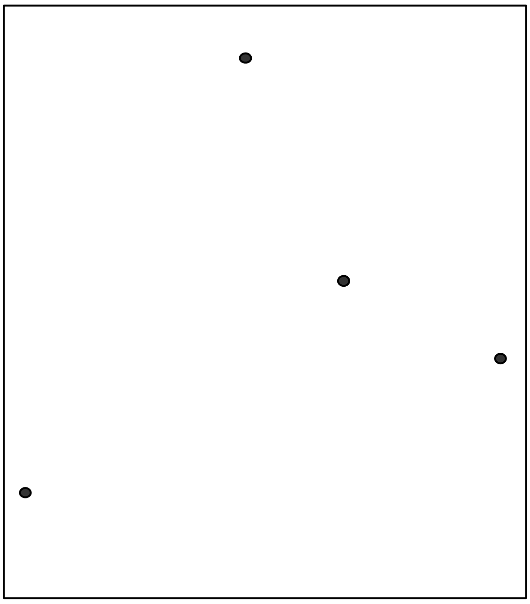


Figure n°2

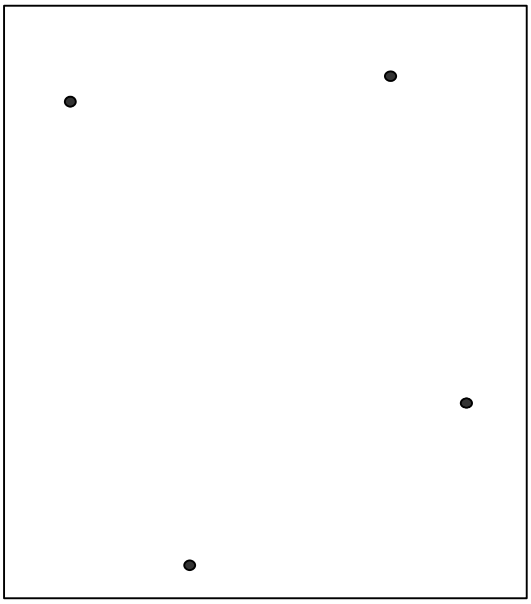


Figure n°3

Ceux qui préfèrent les dessins plus grands, peuvent les retrouver en annexe, pages 107 à 109.

Quelques réponses glanées par-ci ou par-là

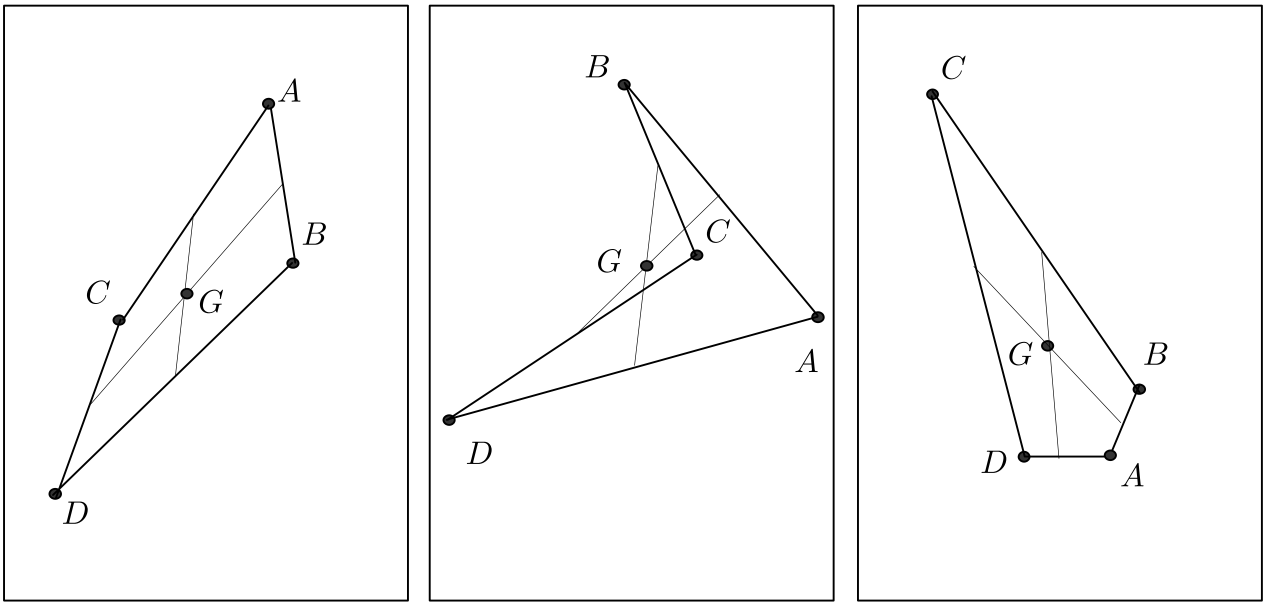
Un groupe d'étudiants en classe préparatoire du lycée Champollion s'approche pour relever le défi de la construction du centre de secours. L'un d'eux prend place autour de la table et les autres restent derrière lui.

“ C'est facile, on cherche le centre de gravité, tombent-ils tous d'accord.

- Vous dites que c'est le centre de gravité qui permet de secourir le plus rapidement les personnes qui habiteraient un peu à l'écart ?

- Ben, oui, c'est un problème de centre de gravité, répondent-ils sans avoir vraiment écouté la question. ”

Et ils se lancent dans l'écriture d'égalités vectorielles. Ils veulent construire des points, qui tombent en dehors de la feuille. Ils cherchent, se demandent pourquoi leur centre de gravité n'a pas l'air de répondre à la question.



Etude de centres de gravité...

Pendant ce temps, une personne s'est assise : elle ne rejette pas le problème, mais elle commence par se déclarer tout à fait étrangère à toute question mathématique.

“ Je veux bien essayer ...”

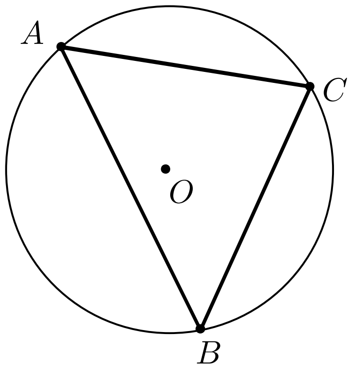
Elle essaie un point et affirme qu'il est trop loin de ce point-là, qu'il faut alors qu'elle trouve un autre point plus proche des autres, et, en montrant avec la main, elle dit :

“ Par-là, oui, c'est par-là que je mettrais le centre de secours...”

On peut l'encourager dans sa démarche. Les chercheurs de centre de gravité ne ricanent plus, ils lèvent le nez, écoutent les idées de la personne étrangère aux mathématiques. Ils commencent à se dire que ce n'est peut-être pas un problème de centre de gravité, mais comme il s'agit de trouver un centre de secours, c'est peut-être un problème de centre... de cercle circonscrit. Et ils repartent dans leur recherche...

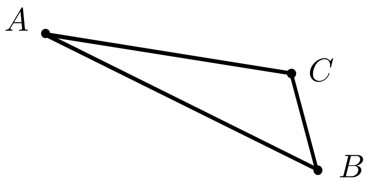
“ On doit pouvoir secourir les gens qui sont loin du centre le plus rapidement possible même s’ils sont loin du centre.

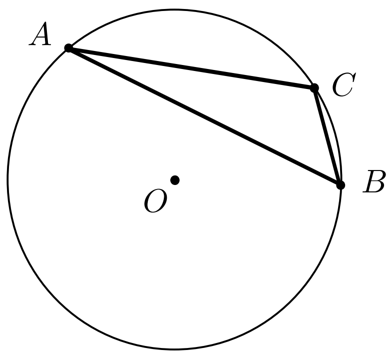
- On le met à peu près au milieu...
- C’est où le milieu de quatre villages ?
- S’il n’y avait que trois villages, ce serait évidemment le centre du cercle circonscrit !
- Vous croyez que c’est vrai à tous les coups ? Essayez avec l’autre triangle ! ”



O est-il le centre ?

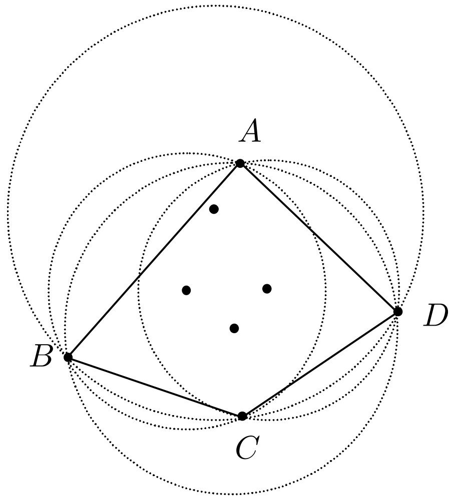
Certes, le cercle circonscrit ne devient plus la solution si évidente !





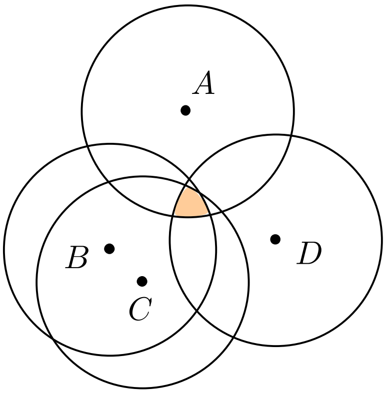
Un autre triangle...   *O est-il le centre ?*

Ceci dit, rien n’interdit de tracer tous les cercles circonscrits possibles avec 4 points !

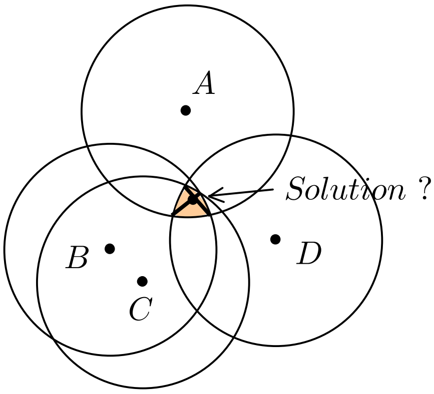


4 points, 4 cercles circonscrits, 4 centres, comment choisir ?

Un enfant a tracé quatre cercles de même rayon, centrés en chacun des points A, B, C, D. Les quatre disques ont une zone commune. Il obtient un "quadrilatère" aux côtés curvilignes. Il trace les diagonales et montre leur point d'intersection : "C'est ici qu'il faut placer le centre de secours".



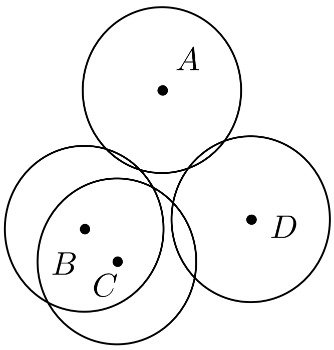
Il y a une zone commune



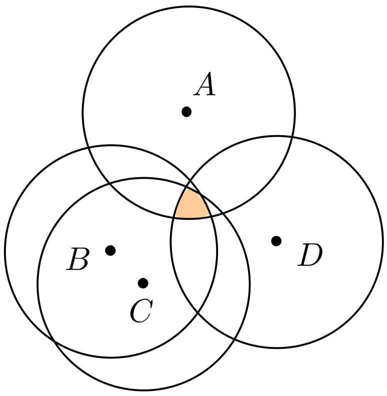
Proposition pour le centre

Un autre utilise des disques en plastique transparent posés sur la table. On lui suggère que chaque disque peut représenter la zone d'intervention de l'hélicoptère à partir de chacun des villages.

Il commence par choisir les petits disques et place le centre de chacun d'eux sur chaque village, il constate qu'il n'y a pas de zone commune à tous les quatre. Il remplace les petits disques par d'autres plus grands, ils n'ont toujours pas de zone commune. Il utilise enfin les grands disques, qui montrent une zone commune assez importante.



Pas de zone commune

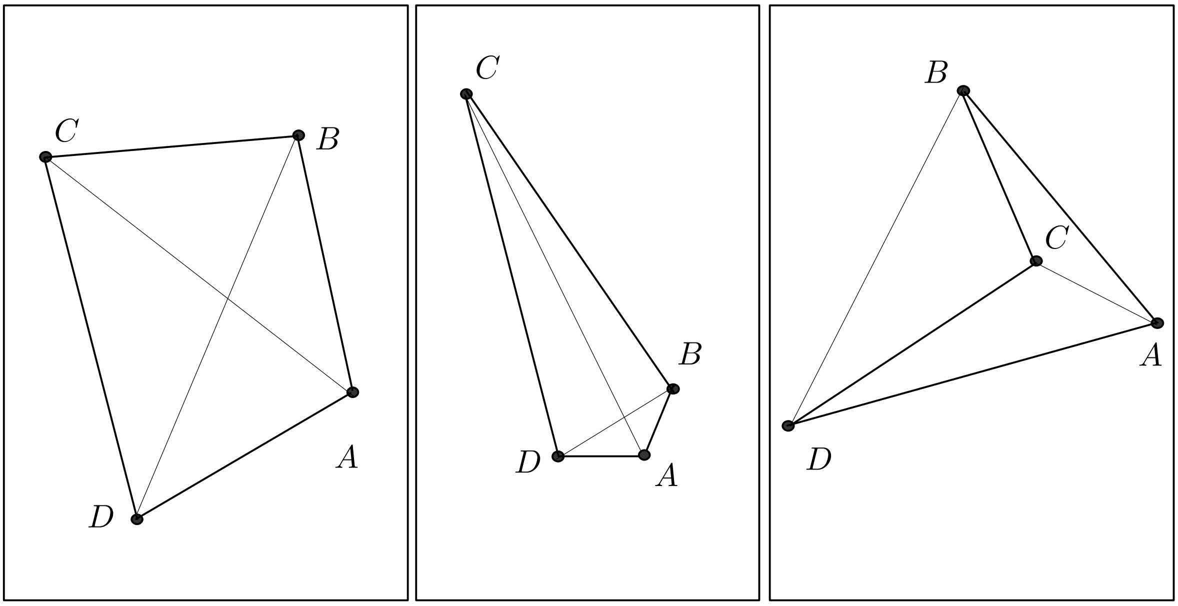


Il y a une zone commune

"Serait-il possible de trouver une zone commune réduite à un point ?
- Oui, et c'est là que l'on construit le centre de secours, répond l'un des enfants. "

Un groupe de lycéens prend place autour de la table, ils sont en première S. S'approchent en même temps plusieurs filles de la même classe (elles sont en série STT), elles se mettent à chercher le problème tout en nous disant que, d'habitude, ce n'est pas ce genre de choses qu'elles font en mathématiques...

" C'est là que je place le centre de secours", dit quelqu'un en montrant le point d'intersection des diagonales.



Intersection de diagonales...
Mais au fait, où sont les diagonales avec la dernière configuration ?

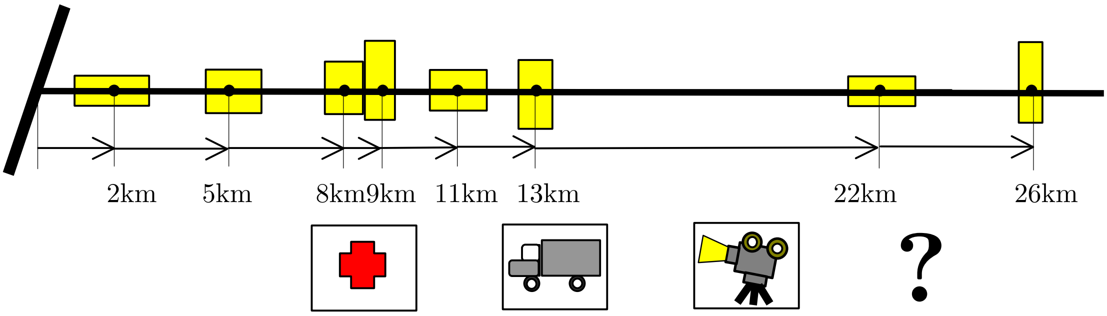
D'autres personnes avancent des arguments d'une autre nature : certains souhaitent que ce soit le plus près possible de chez eux ; mais se rendent-ils compte des nuisances que cela peut occasionner notamment au niveau sonore ? D'autres prétendent que ce sont les politiques qui décident dans tous les cas, et qu'il faudrait bien que ceux-ci s'expliquent un peu plus sur la façon dont ils prennent des décisions...

En conclusion, y a-t-il un modèle qui s'impose ? Comment être à la fois au plus près des personnes et ne pas sacrifier ceux qui sont trop loin ?

Une vallée alpine

Dans une longue vallée alpine, se succèdent plusieurs villages de même importance. Ces villages veulent se doter de structures communes : un centre de secours, une laiterie chargée de collecter le lait de la vallée et de fabriquer les fromages, un centre culturel (avec notamment une salle de cinéma).

Voici le schéma de la vallée :



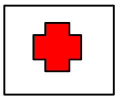
Où situer le centre de secours, la laiterie, le centre culturel ?

On dispose du schéma de la vallée : l'entrée de la vallée est située à gauche sur ce schéma, les différents villages sont repérés par leur "centre". Les tournants de la route n'ont pas été reproduits...mais on suppose que ce schéma s'applique aussi bien pour le transport du lait (le camion ne peut pas faire une tournée, il faut qu'il fasse un aller-retour entre la laiterie et chacun des villages chaque jour) que pour l'hélicoptère chargé des secours, ou pour les personnes qui se rendront au centre culturel.

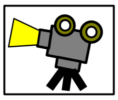
Quelques remarques sur ces différents centres

Nous pensons déjà que les critères des uns et des autres ne sont pas les mêmes.

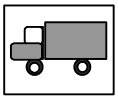
- L'hélicoptère risque d'être appelé n'importe où, mais il doit être prêt aussi à intervenir dans les pires situations, c'est à dire dans les lieux les plus éloignés.



- Le centre culturel favorise forcément ceux qui n'habitent pas trop loin, autour du "centre de la vallée". Mais il ne faudrait pas favoriser ceux qui habitent en amont plutôt que ceux qui habitent en aval.



- Le camion de la laiterie doit s'occuper de chacun des villages, mais peut être a-t-il envie de faire en sorte que les trajets à parcourir ne soient pas trop longs...



Ceci dit, vous pouvez aussi imaginer d'autres centres et décliner encore d'autres critères.

Centre d'une série statistique

On considère une série statistique simple, rangée dans l'ordre croissant : $a_1, a_2, ..., a_n$. C'est aussi un tableau de n nombres réels :

a_1	a_2	a_3	...	a_{n-1}	a_n

Chercher un centre de cette série consiste à chercher un nombre c qui permette de résumer, le mieux possible à lui seul, l'information multiple donnée par la série de départ.

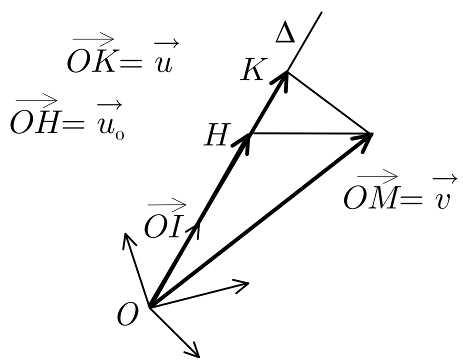
On peut se ramener à un problème géométrique en interprétant ce n-uplet $(a_1, a_2, ..., a_n)$ comme les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^n$ dans la base canonique $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_n}\right)$ de $\mathbb{R}^n$ ou comme celles d'un point M de l'espace espace affine naturellement associé à $\mathbb{R}^n$, chercher un centre c consiste alors en la recherche d'un vecteur $\overrightarrow{u_0}$ de $\mathbb{R}^n$, ou d'un point H, de coordonnées $(c, c, ..., c)$.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{e_i} \quad , \quad \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{u_0} = \sum_{i=1}^{n} c\, \overrightarrow{e_i}$$

D'après quel critère c va-t-il être considéré comme un centre ? Cette valeur c doit être la plus proche possible des éléments de la série statistique, mais " proche " en quel sens ?

On construit ce critère sur ce qui permet de mesurer la plus ou moins grande proximité des éléments de $\mathbb{R}^n$, à savoir les normes sur $\mathbb{R}^n$.

Ainsi on utilise un vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathbb{R}^n$ ou un point K, de coordonnées $(x, x, ..., x)$, qui varie sur la "diagonale Δ" du repère : $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{u} = x\overrightarrow{OI} = x \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{e_i}$ et on cherche à rendre minimale une norme...



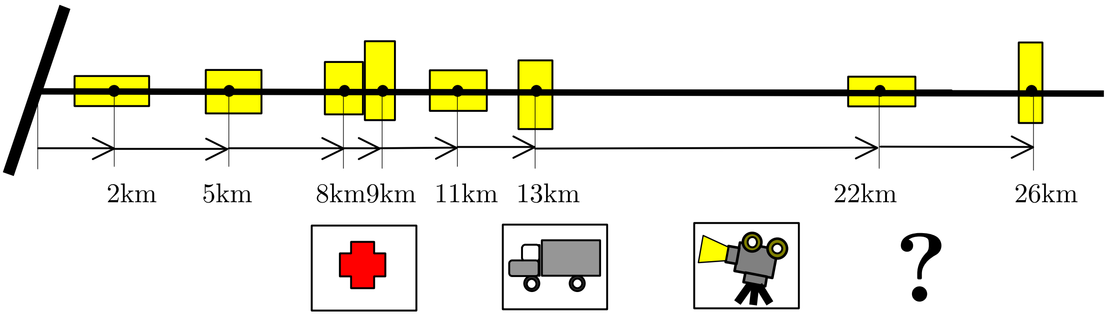
Mais de quelle norme s'agit-il ?

COMPTES-RENDUS, NARRATIONS DE RECHERCHE

Recherche de ce problème d'urbanisme

Dans une longue vallée alpine, se succèdent plusieurs villages de même importance. Ces villages veulent se doter de structures communes :

- un centre de secours tel que le temps d'intervention dans les pires situations (c'est à dire les villages les plus éloignés) soit minimal pour des secours héliportés.
- une laiterie chargée de collecter le lait de la vallée et de fabriquer les fromages : le camion de transport du lait devra faire chaque jour un aller-retour entre chacun des villages et la laiterie, et l'emplacement idéal de la laiterie correspondrait à un nombre de kilomètres minimum pour le camion.
- un centre culturel (avec notamment une salle de cinéma), situé au "coeur" de la vallée, de façon que ceux qui habitent en amont du centre culturel, aient au total autant de trajet à faire que ceux qui habitent en aval.



Où situer le centre de secours, la laiterie, le centre culturel ?

Des enseignants en stage et le problème

Nous avons proposé plusieurs fois ce problème au cours de stages de formation en probabilités-statistiques, pour des enseignants de collèges ou lycées, au titre de la formation continue.

Le temps nécessaire est d'environ une heure pour la recherche, une petite demi-heure pour les compléments théoriques.

Le problème a été proposé aussi à d'autres publics (étudiants au niveau Bac+2, en DEUG B ou en classe Préparatoire ECS2) : la modélisation nous a paru pertinente pour illustrer l'intérêt de l'existence de plusieurs normes sur $\mathbb{R}^n$. Aussi bien pour les enseignants en stage de formation en probabilités-statistiques que pour les étudiants, la présentation de la problématique comme recherche d'une distance minimale entre un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et la diagonale de $\mathbb{R}^n$ a été reçue avec beaucoup d'intérêt (*voir page 97)*. Les exercices proposés sur ces normes sont presque toujours des exercices qui portent sur des espaces vectoriels de fonctions et des questions de convergences de suites de fonctions, et qui sont des vrais exercices d'école.

Où sont les statistiques ?

Suivant les stages, l'énoncé est très critiqué ou peu critiqué. Certains disent que l'énoncé est mal posé, nous avons écouté les critiques... Mais qu'est-ce qu'un énoncé mal posé ?

Pourquoi a-t-on écrit "ceux qui habitent en amont ont au total autant de trajet à faire que ceux qui habitent en aval" ? Que signifie ce "au total" ?

Est-ce que la phrase est lourde, redondante ou maladroite ? Après réflexion, la formulation est acceptée, il n'y a pas de propositions pour reformuler la question.

Le problème n'est pas perçu comme un problème de statistiques : certains ne s'y intéressent pas dans un premier temps, avec comme prétexte "qu'est-ce que vient faire ce problème dans le stage ?" D'autres s'y intéressent parce que "ça au moins, c'est de la géométrie, et on sait faire" et ça motive.

La résolution du problème semble aisée pour presque tout le monde parce que la traduction analytique des données, les études de fonctions numériques qui semblent en découler, la mise en "équation" sont des choses qu'on sait faire, bref, "on trouvera bien un moyen d'y arriver"...

A la simple lecture de l'énoncé, le centre de secours est perçu comme répondant à des critères différents des autres centres. Il est traité généralement en premier, assez rapidement et correctement. Très vite on entend dire qu'il ne se situe pas à la même place que les autres centres. Par contre, le problème de minimisation de sommes de distances et celui de l'équilibre des "distances à parcourir pour ceux qui sont en amont et en aval" sont perçus de façon plus énigmatique : cela exigera plus de réflexion, une mise en place rigoureuse des calculs, pour bien traiter la différence entre les énoncés.

Au niveau des résultats, un barycentre (ou une moyenne) est la solution la plus attendue. Certains pensent aussi à la médiane : est-ce parce que la médiane fait partie des centres usuels ou est-ce parce qu'il s'agit d'un problème proposé lors d'un stage de statistiques ?

Les méthodes analytiques sont privilégiées

La recherche du centre de secours surprend : "où est le problème ?", la solution paraît trop facile. Cela déclenche parfois des critiques, qui ne sont pas d'ordre mathématique, dont nous reparlerons par la suite.

Pour la recherche des deux autres centres, la différence entre les situations n'apparaît pas évidente au premier coup d'oeil, il faut plus de temps pour formuler les choses. Les calculs sont faits en général par une méthode analytique, on utilise une abscisse x, et on recherche le minimum d'une fonction f de cette abscisse x.

Pour les calculs de sommes de distances, tout le monde sait qu'il s'agit d'une somme de valeurs absolues, et tout le monde sait que les sommes de valeurs absolues ne sont pas toujours faciles à simplifier. Certains stagiaires ont osé franchir le pas (mais il s'agit d'exceptions) : "il suffit de remplacer par la somme des carrés des distances" (quand on a des valeurs absolues, on élève au carré pour les faire disparaître...). Du coup, la solution est le barycentre, et elle est tout à fait satisfaisante !

Certains utilisent une calculatrice, qui fait immédiatement un tracé de la courbe relative à la somme des valeurs absolues. L'utilisation de la calculatrice laisse toutefois insatisfait pour plusieurs raisons :

- le fait qu'elle ne donne pas clairement une solution unique,
- un certain doute sur la capacité de la calculatrice à donner la solution ou sur le fait d'avoir bien programmé,
- l'habitude de chercher d'autres arguments que la calculatrice...

Ceux qui l'ont utilisée ajoutent "on va vérifier autrement".

Avec une calculatrice moins perfectionnée, des stagiaires remarquent que la fonction f prend les mêmes valeurs en $x = 9$ et $x = 11$, et en déduisent que "la solution cherchée est entre ces deux valeurs, 10 sans doute", avant de s'apercevoir que la fonction est constante sur tout l'intervalle, et que $x = 9$ et $x = 11$ sont déjà des solutions. Il y a l'idée a priori, que la fonction f ne change qu'une fois de sens de variation, c'est à ce moment qu'elle prend sa valeur minimale.

L'idée qu'une dérivée de la fonction numérique f va donner facilement le résultat est certes présente. Mais peu de stagiaires osent dériver une somme de valeurs absolues, "ça n'est pas [partout] dérivable". Était-ce un obstacle pour trouver la solution ? Ceux qui remplacent la somme des valeurs absolues par la somme des carrés n'ont pas de problèmes pour dériver...

En général, on essaye de supprimer des valeurs absolues et de donner une expression affine par intervalles de la fonction f pour minimiser la somme des distances. Il y a des virtuoses, d'autres sont plus lents. On essaye ensuite de résoudre une ou plusieurs équations du premier degré pour trouver le point qui permet d'équilibrer les sommes de distances d'un côté ou de l'autre (en faisant attention au domaine de validité des solutions), et le résultat finit par arriver.

On remarquera que très peu d'enseignants osent se lancer dans une recherche par "tâtonnements" successifs : si je place le centre là ou là, qu'est-ce que je gagne et qu'est-ce que je perds au niveau de ma somme de distances...

Les solutions purement géométriques sont rarement abordées, sauf après coup, lorsque les sommes des distances pour ceux qui habitent en amont et pour ceux qui habitent en aval ont été transformées en sommes de vecteurs de sens contraires, le recours au barycentre finit par s'imposer.

Tout le monde sait (parmi les stagiaires) que la médiane d'une série statistique s'obtient à partir d'un classement des données (suivant un ordre croissant ou décroissant). Dans la solution du problème de recherche du minimum de la somme des distances, il faut faire abstraction des distances elles-mêmes, pour retenir uniquement une disposition ordinale, et c'est un pas difficile à franchir. Il y a une appréhension sans doute de perdre de l'information en négligeant les données numériques. Cela fait penser au problème de calcul mental du train qui s'arrête dans des gares : on indique pour chaque gare le nombre de voyageurs qui sont montés dans le train et le nombre de voyageurs qui sont descendus du train, et on demande au moment où le train arrive à son terminus, combien de fois le train s'est arrêté !

Une étude critique des solutions trouvées

La définition du centre culturel et le principe d'équilibre entre la somme des distances à parcourir pour ceux qui sont en amont et ceux qui sont en aval sont finalement bien acceptés et la solution est trouvée. Cette question est jugée pertinente, aussi bien au niveau des outils mathématiques qui sont utilisés, qu'au niveau de la solution - puisqu'il s'agit de moyenne ou de barycentre. C'est une solution qu'on s'attend à trouver depuis le début du problème à un moment ou un autre, et elle est suffisamment "familière" pour ne pas être discutée.

La laiterie est sans doute le point qui interroge le plus, c'est une question à laquelle on est moins habitué, tant au niveau des outils de calculs, qu'au niveau des solutions : il n'y a pas unicité de la solution. Le traitement analytique est un peu lourd. Une approche géométrique utilisant de bons regroupements, est très rarement faite. Le caractère ordinal de la médiane n'est pas perçu comme un caractère "naturel" pour un problème de minimisation.

Ceux qui avaient situé, dans un premier temps, la laiterie au même endroit que le centre culturel, ont eu des doutes, la coïncidence semblait suspecte : deux énoncés différents donnent en général des solutions différentes. La logique scolaire agit en plein. En vertu de cette logique toute scolaire, beaucoup ont repris alors leurs calculs, ont pu modifier la mise en équation et les solutions. Le fait de découvrir une erreur, le fait d'avoir eu raison de douter, est quelque chose de bien rassurant !

Quand il y a trois questions différentes, "il doit y avoir trois réponses différentes", et c'est le cas avec notre problème.

En tant que concepteurs de l'énoncé, nous avons cherché un moment à modéliser une situation pour laquelle il faut minimiser une somme de carrés de distances, et nous n'avons trouvé aucune situation claire et satisfaisante : les problèmes de "consommation d'énergie" font intervenir une proportionnalité aux distances et pas aux carrés des distances, les problèmes de "zones d'influence" consistent à minimiser des distances maximales. C'est pourquoi nous avons timidement proposé en question subsidiaire un centre d'information en imposant en force une minimalisation de la somme des carrés, mais sans aucune conviction quant à la validité du critère... Est-ce la solution qui rend le critère valide ? Nous n'avons pas su non plus trouver de situations où il faille minimiser une somme de cubes de distances ou toute autre somme de puissances de distances.

Une étude critique du problème posé

L'énoncé du problème de la vallée alpine est posé a priori de façon fermée, on ne demande pas de définir ici les critères d'une implantation idéale pour le centre de secours, pour la laiterie, ou le centre culturel, ce qui n'interdit pas de discuter les critères (nous vous avons bien proposé de réfléchir à ces critères dès le début du document.

Généralement les critères proposés dans l'énoncé sont acceptés sans discussion au départ, il a juste fallu décoder le sens de la phrase "ceux qui habitent en amont ont au total autant de trajet à faire que ceux qui habitent en aval"...

La discussion est plutôt intervenue après coup, sous forme d'une critique du résutat obtenu. Par exemple, le fait qu'on trouve très facilement, et peut-être trop facilement le centre de secours, induit une critique des critères : "ce centre ne devrait-il pas être plus proche des lieux où il y a le plus de monde", "ne risque-t-on pas de sacrifier pour quelques habitants excentrés ou excentriques tous ceux qui sont bien regroupés ?" Il y a sans doute une vision a priori d'une zone dans laquelle on devrait trouver ces centres ou une confrontation à une réalité : est-ce que je connais des vallées alpines ? Où sont placés les centres de secours ? Quant aux critères d'implantation des centres proposés dans le problème, "les responsables politiques ne raisonnent pas comme ça !" Là-dessus on peut beaucoup épiloguer...

Autre source de discussion, dans le cas de la laiterie : il y a un moment de doute sur les calculs et le résultat : comment se fait-il qu'il puisse y avoir plusieurs solutions ? Le fait que l'on n'arrive pas à définir une médiane de façon unique et universelle est gênant, une reformulation de la définition de la médiane afin d'éliminer les ambiguïtés, est un exercice auquel même les programmes officiels s'efforcent de répondre, et à laquelle nous avons dû aussi répondre pendant le stage ! Du coup, certains auraient envie de rapprocher la médiane de la moyenne qui paraît mieux située. Certains engagent une discussion sur d'autres critères possibles pour le choix de l'emplacement de la laiterie, ce qui se conçoit parfaitement ...

La reconnaissance d'une problématique statistique

Le problème est reconnu a postériori comme étant un problème de statistique, il y a bien une série statistique, même si, il faut bien le dire, elle n'est pas bien grande. Il y a une bonne illustration des principaux paramètres statistiques : milieu, moyenne, médiane. Sans doute après les quelques réticences du départ, les stagiaires ont dit aux organisateurs du stage "on vous fait confiance" et y ont trouvé leur compte !

Ceci nous amène à repenser que l'un des obstacles au départ, par rapport à l'aspect statistique, est le suivant : "on ne peut pas faire des statistiques si on a peu de données". Or on aurait pu mettre encore moins de villages, 4, 6 villages pouvaient suffire au niveau de l'énoncé ! (Le choix d'un nombre impair de villages n'est pas exclu, mais cela change un peu le type de résultat au niveau de la laiterie).

Il y a certainement l'idée chez certains que la statistique n'a de sens que si on manipule de grands effectifs - et si les effectifs qu'on propose parfois dans le secondaire ne sont pas trop élevés, c'est pour qu'il n'y ait pas trop de calculs et que les résultats soient compréhensibles et accessibles aux élèves. Même en 2002, certaines calculatrices refusent de travailler avec des effectifs supérieurs à 100.

Nous avons pu rassurer les collègues quand nous avons abordé les statistiques inférentielles pour lesquelles, à la différence des statistiques descriptives, la nécessité d'effectifs suffisants (ce qui ne veut pas dire grands nombres) est un critère important au niveau de la confiance pour tout ce qui est estimation, test ...

La fête de la science

L'histoire commence un vendredi, dans la semaine de la Fête de la Science. Une belle journée ensoleillée du mois d'octobre sur Grenoble, les arbres roussis de la place Victor Hugo, des tentes blanches dressées entre les arbres, une table entourée de chaises, garnie de compas, de crayons, de gommes, de disques transparents.

Sur une grille à côté de la table, un titre s'affiche en gros caractères :

Problème d'urbanisme

Et on lit le problème :

Dans une région se trouvent quatre villages de même importance. Ceux-ci veulent se doter d'un centre de secours tel que le temps d'intervention dans les villages les plus éloignés soit minimal pour des secours héliportés.
Où placer le centre de secours ?

Les gens sont attirés par le matériel posé sur la table : les petits se retrouvent comme à l'école, les très grands se rappellent leur enfance. Il faut dire que les gommes ont de belles couleurs. Ils s'approchent, ils aperçoivent le titre, puis le problème. La lecture n'est pas longue, la question les intrigue. Ils hésitent, ils ont bien envie de s'asseoir à la table, d'autant plus que les animatrices leur proposent des plans de régions comportant quatre villages : il s'agit simplement de feuilles sans ligne sur lesquelles figurent quatre points, trois types de figure sont proposés : voir les figures n°1, 2, 3 ci-dessous.

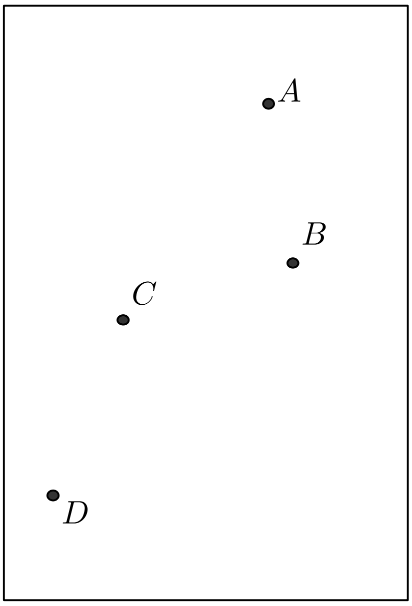


Figure n°1

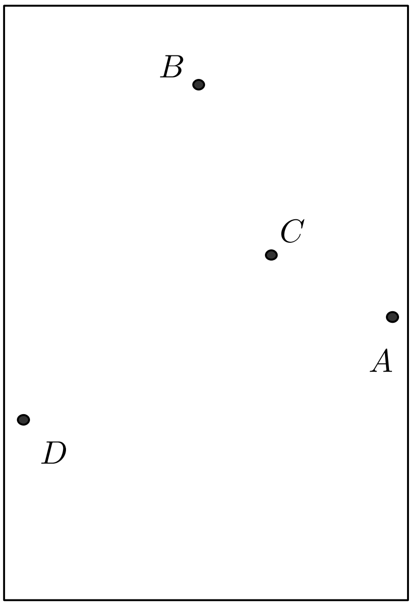


Figure n°2

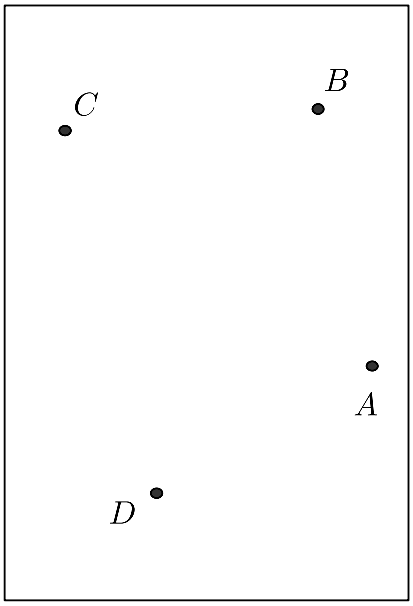


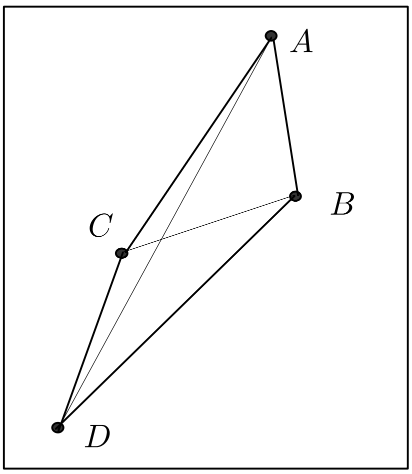
Figure n°3

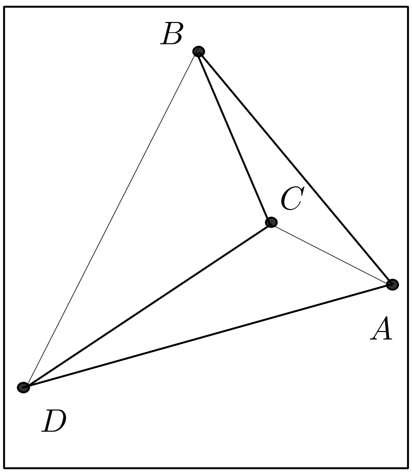
Chère lectrice, cher lecteur, avant d'aller plus loin dans cette histoire, accordez-vous un moment de recherche du problème à partir de ces figures [1] !

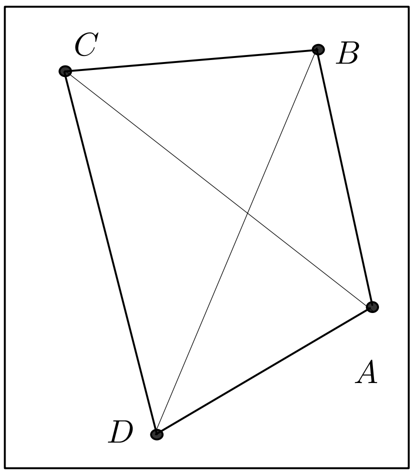
[1] Ceux qui préfèrent voir les dessins en plus grand, peuvent les voir en annexe, pages 107 à 109.

Revenons à la place Victor Hugo où les conversations commencent à s'animer.
“ Mais ce centre de secours, comment le place-t-on ?
- On doit pouvoir secourir les gens qui sont les plus loin du centre le plus rapidement possible, répond Claire.
- Puisque c'est moi qui dois décider de la place du centre de secours, si je suis un homme politique, je le mets tout près du village où j'habite, entend-on.
- Bon, mais si vous ne faites pas de politique ? ”
Tout en tendant une feuille blanche où les quatre villages sont représentés par quatre points, Michèle essaie d'amener la réflexion sur un terrain plus mathématique.
“ On le met à peu près au milieu, dit une personne.
- Mais c'est où le milieu de quatre villages ? relance Christiane.
- Par là...
- Vous voulez essayer de trouver précisément avec quatre de ces villages ? Choisissez la configuration qui vous plaît le mieux. ”

Le passant choisit la configuration n°3, elle lui paraît plus rassurante, il voit un bon quadrilatère. Il s'assied à la table, trace les côtés du quadrilatère $ABCD$, puis les diagonales.
“ C'est là que je place le centre de secours, dit-il en montrant le point d'intersection des diagonales.
- Mais pourquoi ? dit Claire. Vous êtes sûr que c'est le point le plus près des quatre points A, B, C, D ? ”
Regard interrogatif. La personne prend une règle graduée et mesure. Elle ne répond rien, se replonge dans son dessin.







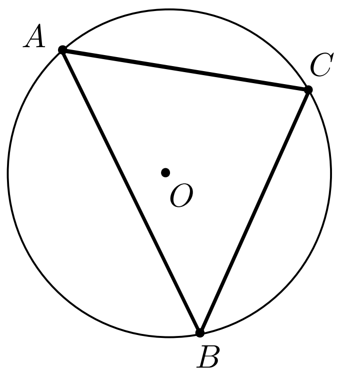
Pendant ce temps, d'autres badauds se sont arrêtés devant le stand, ils lisent la question, regardent les gens qui dessinent, mesurent, gomment, manipulent les disques de plastique posés sur la table. Plusieurs enfants se sont assis et attendent qu'on leur donne une feuille : les parents, intrigués eux aussi, mais n'osant pas s'asseoir, restent debout derrière eux. Michèle leur propose d'abord la configuration n°1. Les uns répondent aussitôt en montrant un endroit ” à peu près au milieu ”, d'autres disent immédiatement que c'est le milieu des deux points les plus éloignés et expliquent pourquoi. Les premiers, indécis, prêtent une oreille attentive à ces derniers et sont bientôt convaincus.

Encouragés par l'aboutissement de leur recherche du centre de secours dans la configuration n°1, les gens demandent une autre configuration de villages. On leur propose alors la configuration n°2.

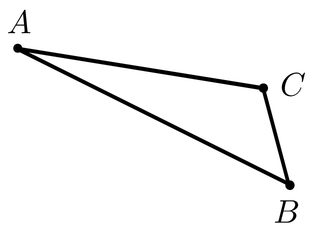
Un des promeneurs, devant la description du problème, répond immédiatement, très sûr de lui :

" S'il n'y avait que trois villages, ce serait évidemment le centre du cercle circonscrit.

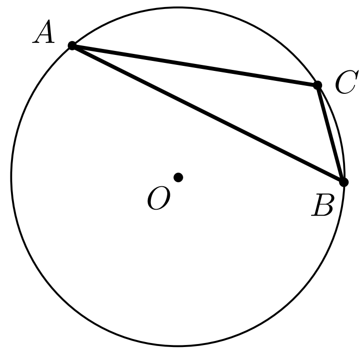
- Vous croyez que c'est vrai à tous les coups ? Essayez avec l'autre triangle."



O est-il le centre ?



Un autre triangle...



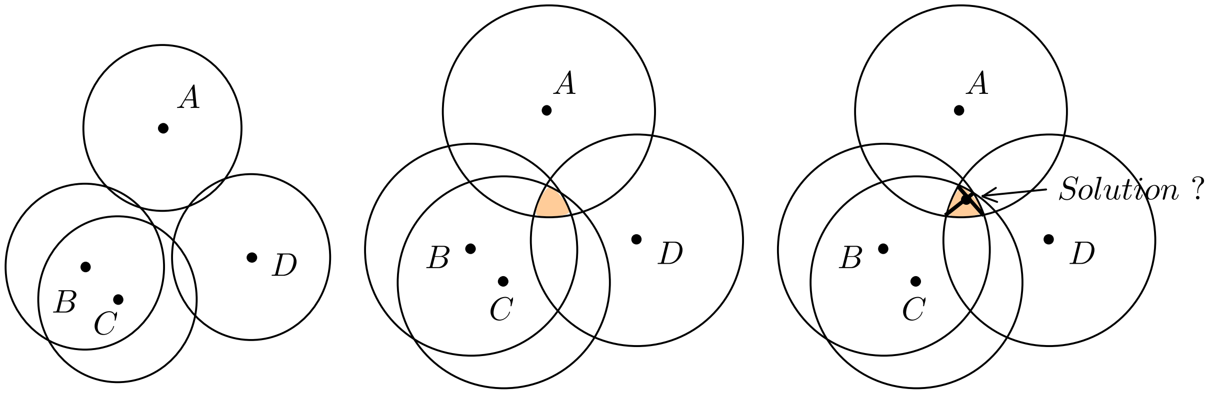
O est-il le centre ?

L'interrogation lui enlèvant toute assurance, la personne s'approche et commence à regarder les gens qui sont en train de dessiner. La mère de l'un des enfants qui trace des cercles approuve ce qu'il fait et l'encourage. On voit bien qu'elle aurait envie, elle aussi, de s'asseoir, mais elle n'ose pas. Le promeneur très sûr de son cercle circonscrit se voit proposer un triangle pour lequel il reconnaît que le centre du cercle circonscrit n'est pas le point le plus proche des points les plus éloignés. Il existe donc des points pour lesquels le point le plus proche des trois sommets est le centre du cercle circonscrit et d'autres pour lesquels ce n'est pas le centre du cercle circonscrit.

Sur la feuille n°3, l'un des enfants a tracé quatre cercles de même rayon, centrés en chacun des points A, B, C, D. Les quatre disques ont une zone commune. Il obtient un "quadrilatère" aux côtés curvilignes. Il trace les diagonales et montre leur point d'intersection en disant qu'il s'agit de la position du centre de secours. Claire lui répond qu'il n'est pas loin.

Un autre utilise les disques en plastique transparent posés sur la table, quatre grands disques, numérotés 1, de rayon 7,3 cm, quatre disques moyens, numérotés 2, de rayon 5,5 cm, quatre disques un peu plus petits, numérotés 3, de rayon 5,2 cm, enfin quatre petits disques, numérotés 4, de rayon 4 cm. On lui suggère que chaque disque peut représenter la zone d'intervention[2] de l'hélicoptère à partir de chacun des villages. Il commence par choisir les petits disques et place le centre de chacun d'eux sur chaque village, il constate qu'il n'y a pas de zone commune à tous les quatre. Il remplace les petits disques par ceux qui sont numérotés 3, ils n'ont toujours pas de zone commune. Il utilise enfin les grands disques, qui montrent une zone commune assez importante.

[2] On remarquera qu'il y a un renversement du problème. On dit que le retour est équivalent à l'aller.



Pas de zone commune *Il y a une zone commune* *Une proposition de construction*

“ Alors avec quatre disques de rayons compris entre 7,3 cm et 5,5 cm, serait-il possible de trouver une zone commune réduite à un point ? lui est-il demandé.

- Oui, et c'est là que l'on construit le centre de secours, répond l'un des enfants. ”

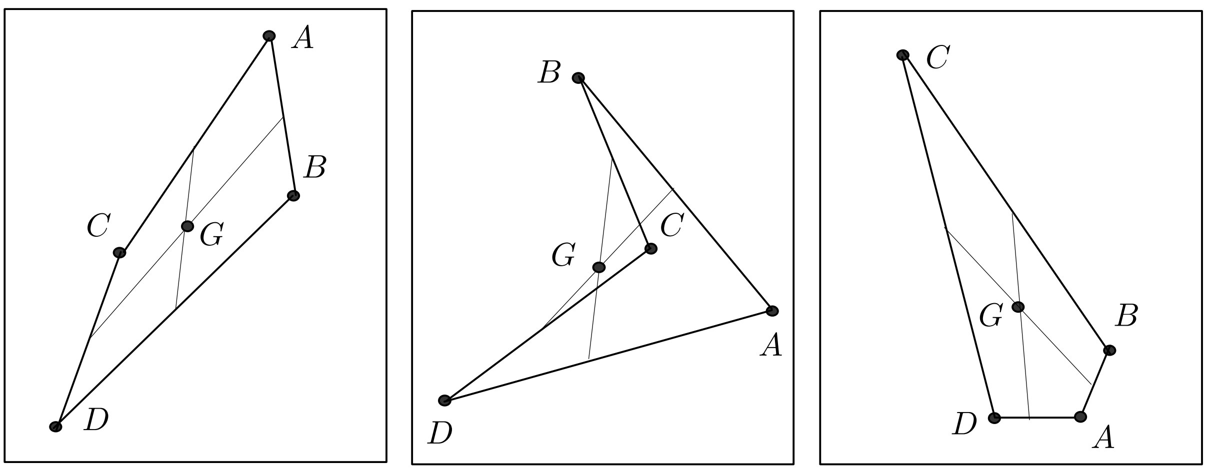
L'attroupement se faisant plus dense, une autre table et des chaises sont ajoutées. Un groupe d'étudiants en classe préparatoire du lycée Champollion s'approche pour relever le défi de la construction du centre de secours. L'un des quatre prend place autour de la table et les autres restent derrière lui.

“ C'est facile, on cherche le centre de gravité, tombent-ils tous d'accord.

- Vous dites que c'est le centre de gravité qui permet de rendre la plus petite possible la plus grande des distances à parcourir ? demande Michèle.

- Ben, oui, c'est un problème de centre de gravité, répondent-ils sans avoir vraiment écouté la question. ”

Et ils se lancent dans l'écriture d'égalités vectorielles. Ils veulent construire des points, qui tombent en dehors de la feuille. Ils cherchent, se demandent pourquoi leur centre de gravité n'a pas l'air de répondre à la question.



Étude de centres de gravité...

Pendant ce temps, une personne s'est assise : elle ne rejette pas le problème, mais elle commence par se déclarer tout à fait étrangère à toute question mathématique. Ce type d'attitude se retrouvera chez beaucoup de personnes, tout au long de l'après-midi.

" Peu importe, ce qui nous intéresse, c'est d'observer votre démarche de recherche, lui répond-on.

- Bon, je veux bien essayer alors. "

Lui est présentée la configuration n°1 : elle essaie un point et affirme qu'il est trop loin de ce point-là, qu'il faut alors qu'elle trouve un autre point plus proche des autres, et, en montrant avec la main, elle dit :

" Par là, oui, c'est par là que je mettrais le centre de secours..."

Nous l'encourageons dans sa démarche. Les chercheurs de centre de gravité ne ricanent plus, ils lèvent le nez, écoutent les idées de la personne étrangère aux mathématiques. Ils commencent à se dire que ce n'est peut-être pas un problème de centre de gravité, mais comme il s'agit de trouver un centre de secours, c'est peut-être un problème de centre... de cercle circonscrit. Et ils repartent dans leur recherche. Ils finiront par trouver.

Un groupe de lycéens prend place autour de la table, ils sont en première S. S'approchent en même temps plusieurs filles de la même classe (elles sont en série STT), elles se mettent à chercher le problème tout en nous disant que, d'habitude, ce n'est pas ce genre de choses qu'elles font en mathématiques... Sylvestre et Jean-Pierre, qui tenaient des stands voisins s'approchent...

Sur les figures n°1 et n°2, les centres sont assez rapidement trouvés.

Pour la configuration n°1, les villages les plus éloignés l'un de l'autre sont A et D. Les points B et C sont proches du segment $[AD]$. On n'a pas envie[3] de placer le centre de secours à l'extérieur du quadrilatère $ABDC$. Certains le placent à l'intersection de (AD) et de (BC). Ce n'est pas mal, mais si on bouge[4] un peu B et C vers A, le cas de figure semble être le même, cependant l'intersection de (AD) et de (BC) ne convient plus, car elle est trop loin de D. On construirait bien le centre de secours à égale distance de A et de D, donc sur la médiatrice de $[AD]$, et à l'intérieur du quadrilatère $ABDC$. Eh bien, pour que A et D soient le moins loin possible, il n'y a plus qu'à placer le centre de secours au milieu de $[AD]$.

En ce qui concerne la figure n°2, personne n'a l'idée de placer le centre de secours en dehors du triangle ABD. On pourrait même le placer au point C, mais il est alors un peu loin de D. On pourrait le rapprocher de D tout en ne l'éloignant pas trop des autres points. Et si on le plaçait à égale distance des points A, B, D, il ne serait pas loin de C. On construit donc le centre de secours au centre du cercle circonscrit au triangle ABD.

La configuration n°3 est beaucoup plus difficile à traiter.

" On place le centre de secours au centre du cercle qui contient les quatre points, dit un des passants attirés par le problème.

- Vous êtes sûr qu'il y ait toujours un cercle qui passe par quatre points donnés ? interroge Christiane.

- Non, je n'en suis pas sûr, mais alors ..."

[3] On pourrait envisager une variante de la figure n°1 où C et D se trouvent toujours proches de $[AD]$, mais du même côté, pour montrer que le centre de secours peut se trouver sur les bords du quadrilatère $ABCD$.

[4] Les gens se rendent compte que leur solution doit résister aux variations des points A, B, C, D.

Nul doute que le centre de secours est à situer à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$. Les uns repèrent que les deux plus grandes distances sont AC et BD. Ils cherchent à placer le centre de secours à égale distance de B et D, d'une part, et à égale distance de A et C, d'autre part. Ils le construisent donc à l'intersection K des médiatrices de $[AC]$ et de $[BD]$. C'est KD la plus grande distance à parcourir du centre de secours au village le plus éloigné.

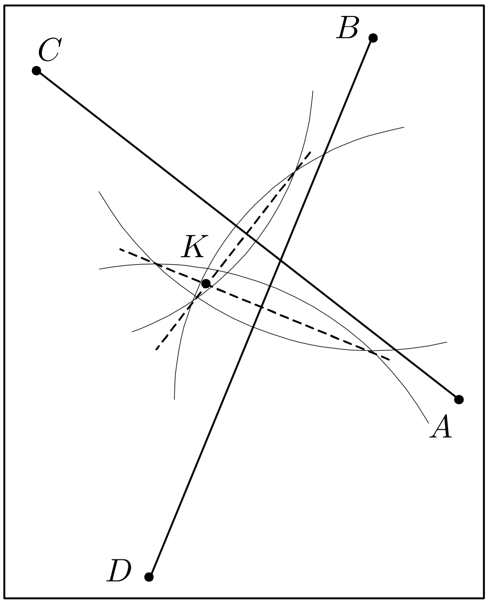


Figure n°4

D'autres personnes construisent le centre E du cercle circonscrit au triangle BCD. On constate alors que EA est inférieure au rayon r de ce cercle et la plus grande distance à parcourir en partant de E est $r = ED$, elle est donc inférieure à KD. Ainsi E est "meilleur" que K (voir la figure n°5, à la page suivante).

D'autres encore commencent par construire le centre F du cercle circonscrit au triangle ABD, mais celui-ci est à l'extérieur du triangle ABD. Le milieu I de $[BD]$ semble plus proche des trois points A, B, D que F, mais il est plus loin de C et IC est plus grande que EC, qui est la plus grande distance à parcourir en partant de E, comme nous l'avons vu ci-dessus ; le point E reste le meilleur (voir la figure n°6).

A ceux qui placent le centre de secours au centre L du cercle circonscrit au triangle ABC, on peut répondre que la plus grande longueur à parcourir en partant de L, LD, est encore supérieure à EC (la plus grande distance à parcourir en partant de E) (voir la figure n°7).

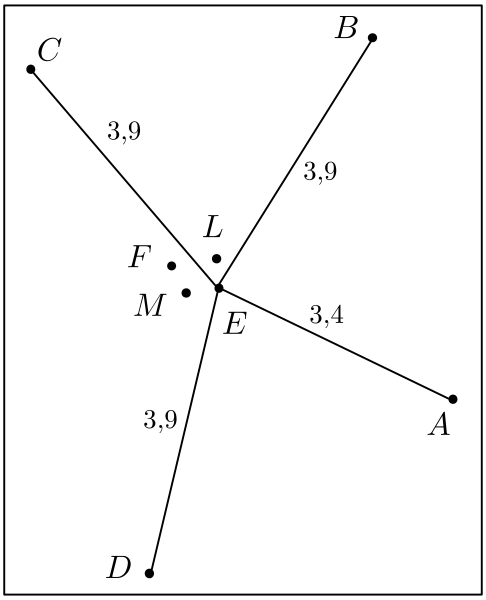


Figure n°5

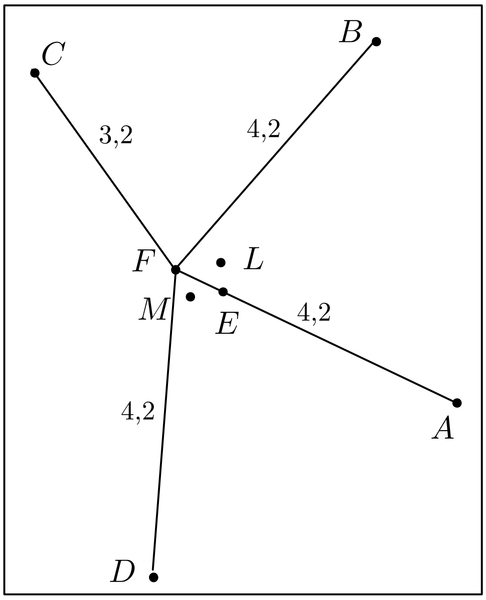


Figure n°6

E et F sont les centres des cercles circonscrits aux triangles BCD et ABD.

Il reste encore une possibilité de centre de cercle circonscrit, celui du triangle ADC, soit M son centre (voir la figure n°8). La plus grande distance à parcourir en partant de M, MB, est aussi supérieure à EC. C'est bien le point E qui reste le meilleur.

Y a-t-il meilleur que E ?

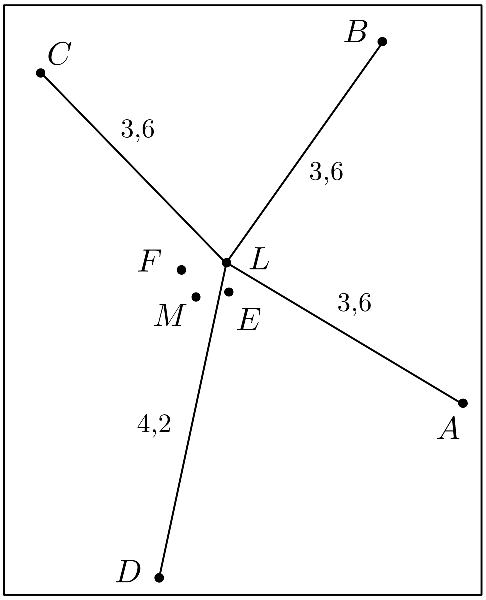


Figure n°7

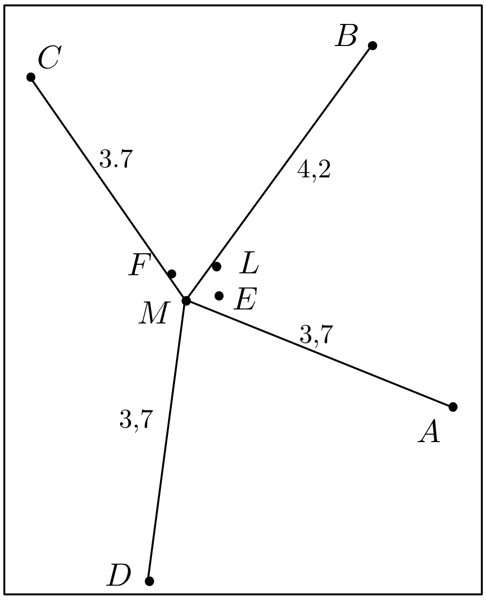


Figure n°8

L et M sont les centres des cercles circonscrits aux triangles ABC et ABD.

Les trois médiatrices des côtés du triangle BDC partagent l'intérieur du triangle en six zones triangulaires de sommet commun E. En considérant n'importe quel point dans l'une de ces zones, celui-ci est nécessairement plus loin d'au moins un des trois sommets de ce triangle. La plus grande distance à parcourir étant alors supérieure au rayon du cercle, un tel point est moins bon que E. De même un point à l'extérieur du triangle BCD, plus proche de A, ne convient pas car il ne fait qu'augmenter sa distance de C.

C'est donc bien E le meilleur[5].

La fête se poursuit le lendemain !

Profitant d'une accalmie et de la présence d'un professeur de mathématiques, une mère de famille demande quelques révisions sur les droites remarquables dans un triangle, elle va en effet en avoir besoin pour aider sa petite fille qui vient de faire sa rentrée au collège.

Les mêmes pistes sont empruntées à propos de la figure n°3 : recherche d'une intersection de quatre disques centrés sur les villages, construction des quatre centres de gravité des quatre triangles formés par les quatre points, puis intersection des diagonales du quadrilatère convexe obtenu, intersection des médiatrices des deux segments les plus grands. Lorsque, par hasard, le premier centre de gravité construit est celui du triangle BCD, l'évaluation de sa distance au point A permet de conclure qu'il s'agit de la réponse cherchée. Durant ces deux jours, aucune question n'a cependant été posée, sur la modélisation par un quadrilatère de la position des villages. Les gens auraient pu se demander pourquoi on ne tenait pas compte de la forme de la surface occupée par les habitations, certains villages pouvant s'allonger le long de la route, d'autres pouvant se regrouper autour d'un centre, par exemple.

Beaucoup d'enthousiasme s'est manifesté autour de ce problème. De la part des passants, envie de se replonger dans des mathématiques, qu'ils croyaient simples, peut-être à cause des instruments proposés, papier, crayons, gommes, compas, règles, peut-être à cause de l'énoncé court. De la part des animatrices, étonnement devant le nombre de personnes qui avaient envie de chercher, qui voulaient renouer avec la géométrie, qui étaient prêtes à passer un bon moment de cette fin de semaine ensoleillée à faire des mathématiques, juste pour le plaisir.

[5] Pour preuve que E est bien le meilleur, voir pages 76 à 78, par exemple.

Narrations de recherche en stage

Cela se passe lors d'un stage de formation continue intitulé " Situations-problèmes, problèmes ouverts, débat scientifique ". Les stagiaires, tous professeurs de mathématiques, neuf en collège, un en lycée, sont invités à chercher, par groupes de deux ou trois, le problème suivant.

Le problème du centre de secours

Dans une région se trouvent quatre villages de même importance ; on veut construire un centre de secours muni d'un hélicoptère de façon à pouvoir atteindre le plus rapidement possible le village le plus éloigné.
Où placer le centre de secours ?

La consigne

Le temps imparti est de deux heures, sans communication entre les groupes. Les stagiaires doivent écrire sur transparents la narration de recherche de leur groupe, qui sera présentée ensuite à tous.

L'animatrice rassure les participants ; c'est bien la démarche de recherche qui est à mettre en valeur :

- il faut noter toutes les pistes suivies, même si elles sont abandonnées par la suite, et dans ce cas, il faut donner la raison de leur abandon ;
- il faut écrire toutes les conjectures, mêmes si elles ne sont que très partielles, même si elles se sont révélées fausses ; dans ce cas, un contre-exemple doit être donné pour prouver qu'elles sont fausses ;
- peu importe si une solution complète n'est pas trouvée.

Aucune configuration de village n'est proposée, aucun matériel non plus, à part les transparents et les feutres.

Voici les comptes-rendus de recherche proposés au bout de deux heures et quelques remarques sur chacun d'eux.

Le groupe n°1

*** Compte-rendu**

Un village est un point, et non une zone.

- La construction du centre fait que le village est éloigné ou non.
- Recherche d'une méthode par itération ?

Piste 1 (5 min) : est-ce que le point cherché correspond au minimum de la somme des distances ? Réponse : non. En effet, si trois des villages sont agglutinés autour du même point E et le quatrième A plus loin, on construira le centre au milieu de $[EA]$.

Piste 2 (6 min) : on considère les deux villages les plus éloignés (qui sont désignés par A et B) et on place le centre de secours au milieu I de $[AB]$. Cela ne convient pas, car les deux autres villages, C et D, peuvent être situés dans l'intersection du disque de centre A et de rayon AB et du disque de centre B et de rayon AB, mais en dehors du disque de diamètre $[AB]$: les longueurs IC et ID, supérieures à IA, ne seront pas les plus petites possibles.

Piste 3 : on ordonne les distances, il y en a 6. Cette piste est abandonnée rapidement.

... Beaucoup de temps se passe, où il n'y a rien de vraiment précis à raconter...
Soudain une idée.

Piste 4 : il faut trouver le plus petit disque qui contient les quatre villages, on placera le centre de secours en son centre (ce n'est pas démontré, mais n'est-ce-pas trivial par définition du cercle ?).

Piste 5 : Et si on commençait par ne considérer que trois villages ? On voit alors deux cas : le premier est celui où le triangle des villages a un angle obtus, le plus petit disque qui contient les trois villages est alors celui qui a pour diamètre le côté opposé à l'angle obtus (c'est-à-dire le plus grand côté du triangle) ; le second cas est celui où le triangle des trois villages n'a pas d'angle obtus, le cercle cherché est alors celui qui est circonscrit aux trois villages.

Retour à une conjecture-solution sur la piste 4 : quatre villages définissant quatre triangles, donc quatre cercles, la solution cherchée est l'un des ces quatre cercles. Cette conjecture n'est pas démontrée, mais nous ne trouvons pas de contre-exemple. Mais une question est posée : étant donnés quatre points, existe-t-il un cercle circonscrit à trois de ces points qui contient le quatrième ?

*** Commentaires sur le compte-rendu du groupe n°1**

Contrairement à ce qui s'est passé lors de la fête de la science, il est fait allusion à la modélisation d'un village par un point. Dès le début est posée la question du critère qui va permettre de décider de la position du centre de secours. L'initiative de ne considérer d'abord que trois villages va permettre l'émergence de la conjecture concernant les quatre. Le doute subsiste un peu sur la vérité de cette conjecture[6]. En ce qui concerne le cas des trois villages, la configuration où le triangle est rectangle n'est pas citée, mais, dans ce cas, le milieu du côté opposé à l'angle droit est confondu avec le centre du cercle circonscrit.

Groupe n°2

*** Compte-rendu du groupe n°2**

Piste 1 : en appelant A, B, C, D les quatre villages et S le centre de secours, on cherche à minimiser $SA + SB + SC + SD$, cette piste est abandonnée au bout de 5 minutes car cela ne correspond pas à l'énoncé.

Piste 2 : on cherche d'abord dans le cas où SA, SB, SC, SD sont peu différentes l'une de l'autre. Si les quatre points A, B, C, D sont cocycliques, on sait faire. S'ils ne sont pas cocycliques, on trace les quatre médiatrices, on obtient quatre cercles circonscrits. On observe une figure plus petite. Une conjecture : cette figure est-elle une réduction[7] du quadrilatère de départ ? Sont recherchées des égalités d'angles, des égalités de longueurs, des proportionnalités de longueurs de côtés, aucune conclusion pertinente n'apparaît. L'idée persiste cependant d'arriver à prouver la réduction, ce qui permettrait de recommencer en traçant à nouveau les médiatrices des côtés plus petits. Trois essais sont faits sur des figures différentes, et le doute naît, générant bientôt la conclusion que l'itération du procédé est une fausse piste.

[6] Un contre exemple est donné par la figure 1 de la page 13, mais cette figure n'était pas donnée aux participants.
[7] Ce mot est à comprendre au sens dans lequel il est utilisé au collège.

Piste 3 : l'idée est d'utiliser un repère orthonormal du plan, de calculer les distances entre les villages en fonction de leurs coordonnées et de déterminer le minimum de la plus grande des distances SA, SB, SC, SD.

Piste 4 : on repart sur une figure à quatre points A, B, C, D et on mesure toutes les distances entre deux points, on choisit la plus grande, par exemple CD, et on trace le cercle de diamètre $[CD]$, on limite la position possible de A et de B en traçant deux cercles, tous deux de rayon CD, celui de centre C et celui de centre D.

Et c'est la fin des deux heures.

*** Commentaires sur le compte-rendu du groupe n°2**

Le critère pour déterminer la position du centre de secours est déterminé tardivement (à partir de la piste 3). Pour le cas des points cocycliques de la piste 2, le centre de secours n'est pas nécessairement à placer au centre du cercle qui contient les quatre points. S'il existe un même demi-cercle qui contient les quatre points, extrémités exclues, le milieu de la plus grande corde formée par les quatre points sera bien meilleur que le centre du cercle.

Groupe n°3

*** Compte-rendu du groupe n°3**

Piste 1 : on examine des cas particuliers (10 min).

- Si les quatre villages sont alignés, A et D étant les plus éloignés, on place le centre de secours au milieu de $[AD]$.
- Si trois seulement des villages sont alignés, par exemple A, D, C, avec D appartenant à $[AC]$, on a alors un triangle ABC. Si les trois angles de ce triangle sont aigus, on place le centre de secours au centre du cercle circonscrit, mais on a du mal à le prouver. Si le triangle ABC a un angle obtus, on construit le centre de secours au milieu du côté opposé à l'angle obtus, on le démontre facilement.

Piste 2 : on veut étudier le cas général d'un quadrilatère $ABCD$ (10 min). On a l'idée des médiatrices. On repart cependant sur des cas particuliers, mais de quadrilatères cette fois-ci.

- Si le quadrilatère est un parallélogramme, on place le centre de secours en son centre. Pour le démontrer, on se reporte au cas des triangles avec un angle obtus.
- Si le quadrilatère est inscrit dans un cercle, on rejette l'idée de l'intersection des médiatrices, on ne prendra pas en effet nécessairement le centre du cercle circonscrit.
- Si le quadrilatère est concave, on est ramené au cas d'un triangle qui contient le quatrième point, on reprend alors les deux cas vus pour les triangles.

Retour à la démonstration : pour un triangle aux trois angles aigus, on veut démontrer que c'est le centre du cercle circonscrit qui est la meilleure position pour le centre de secours ; cela n'aboutit pas bien.

Etape suivante : on reprend l'idée d'examiner différents cas de quadrilatères convexes.

- Si le quadrilatère a deux angles obtus opposés, on se ramène au cas du triangle : on place le centre de secours au milieu de la diagonale, qui est aussi le côté opposé à chacun des angles obtus.
- Si le quadrilatère a deux angles obtus consécutifs, ... Sont faits toutes sortes de dessins, mais pas de résultat. On repasse par les triangles avec un angle obtus, mais cela

n'aboutit pas. *Doute énorme sur la pertinence de la démarche*, au bout de 1 h 30 : “

Si ça se trouve, on se plante complètement, mais on continue. ”

Étape suivante : un point à l'extérieur du quadrilatère ne présente pas d'intérêt, car son symétrique par rapport à un côté est au moins aussi bon. On repart sur la piste des médiatrices des côtés du quadrilatère.

Pour finir une conjecture : si le quadrilatère $ABCD$ a deux angles obtus consécutifs, par exemple l'angle DAB et l'angle ABC, le second étant inférieur au premier, on considère les deux cas suivants : le premier est celui où le triangle BDC a trois angles aigus, on construit alors le centre de secours au centre du cercle circonscrit au triangle BDC ; le second cas est celui où l'angle BDC est obtus, le centre de secours est alors situé au milieu de $[DC]$. Cette conjecture n'est pas démontrée, et on ne sait pas conclure si les deux angles obtus consécutifs du quadrilatère sont égaux.

*** Commentaires sur le compte-rendu du groupe n°3**

On remarque que la conjecture finale est fausse, voici un contre-exemple :

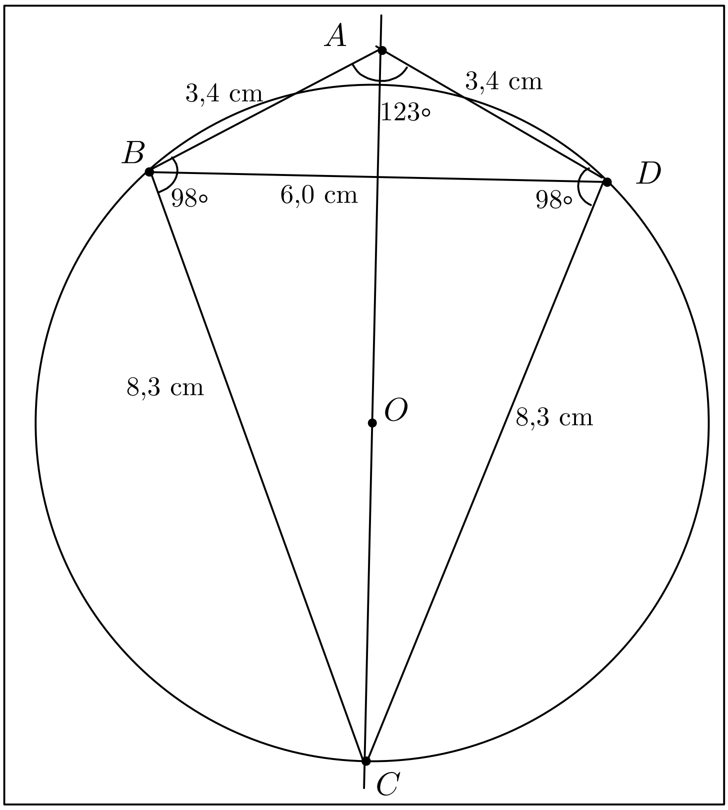


Figure n°9

Contre-exemple à la conjecture du groupe 3 :

Le quadrilatère $ABCD$ a bien comme angles obtus consécutifs les angles $\widehat{DAB}$ et $\widehat{ABC}$, l'angle $\widehat{DAB}$ est plus grand que l'angle $\widehat{ABC}$, et O désigne le centre du cercle circonscrit au triangle BDC. Cependant A n'appartient pas au disque correspondant au cercle circonscrit au triangle BDC : le centre de secours n'est donc pas en O.

On voit cela aussi en faisant tendre C vers l'infini en suivant la médiatrice de $[BD]$: le cercle circonscrit au triangle BCD tend vers la droite passant par B et D, et le point

A se trouve alors à l'extérieur. Le bon point n'est pas le centre du cercle circonscrit à BDC, mais (ici) le milieu de $[AC]$.

La volonté de faire les démonstrations des conjectures, notamment celle qui concerne le triangle aux angles aigus, freine la recherche. Le critère de sélection du centre n'est pas donné. L'idée de chercher un disque qui contient les quatre points est sous-jacente, mais c'est plutôt la forme des quadrilatères qui est mise en avant.

Groupe n°4

* Compte-rendu du groupe n°4

Etape 1 (10 min) : on appelle H le point cherché et A, B, C, D les quatre villages. On cherche à minimiser la somme $HA + HB + HC + HD$. Cette piste est abandonnée à cause du contre-exemple de quatre villages alignés. De plus, on ne privilégie pas dans ce problème le côté économique (minimisation de consommation, etc...), ce n'est pas un problème de tuyauterie, mais de vies humaines.

Etape 2 : on adopte un critère, celui de trouver le disque de plus petit rayon contenant les quatre points.

Etape 3 : on propose une méthode.

- D'abord une remarque : le disque recherché contient au moins deux points (les plus éloignés).
- Si c'est possible, on trace les cercles circonscrits aux triangles formés par les quatre points et ayant tous des angles aigus ; un de ces disques contient le quatrième point, celui qui a le rayon le plus petit est notre solution n°1.
- Sinon, on détermine les deux villages les plus éloignés l'un de l'autre et le cercle dont le diamètre est le segment d'extrémités ces deux villages est notre solution n°2.
- Entre la solution n°1 et la solution n°2, on détermine celle qui a le rayon le plus petit, et on construit le centre de secours en son centre.

* Commentaires sur le compte-rendu du groupe n°4

Dès le début, le choix du critère est mis en avant. C'est un algorithme de détermination du centre qui est proposé. Il n'est pas démontré que la méthode conduit à la solution du problème

Or un contre-exemple montrant que cet algorithme ne donne pas la “ bonne solution ” est proposé à la page précédente : concernant le quadrilatère $ABCD$ proposé à la figure 9 (page 43), seul le triangle BDC a tous ses angles aigus, le centre de son cercle circonscrit est O. Or l'algorithme dit que c'est alors ce point O qui est le bon candidat à être le centre de secours. Ceci est faux puisque le point A n'appartient pas au disque de centre O.

Une narration de la recherche du plus petit disque contenant 4 points

Le problème du centre de secours peut être considéré comme celui de la recherche du plus petit disque qui contient quatre points donnés. Le groupe n°4 des stagiaires, évoqué dans la partie précédente, l'a d'ailleurs parfaitement explicité sous cette forme dans sa deuxième étape. Mais ce qu'ils proposent ensuite est une méthode pour le construire où l'on ne retrouve pas directement cette idée de la recherche du plus petit disque.

Quelle stratégie adopter qui soit directement liée à cette idée ?

Considérons donc un quadrilatère. La recherche de stratégie est grandement facilitée par un logiciel de géométrie.

Première étape : à partir d'un disque contenant les quatre points, construire un disque de rayon plus petit qui contient deux points en son bord et les deux autres à l'intérieur.

On commence par tracer un cercle dont le disque correspondant contient les quatre points.

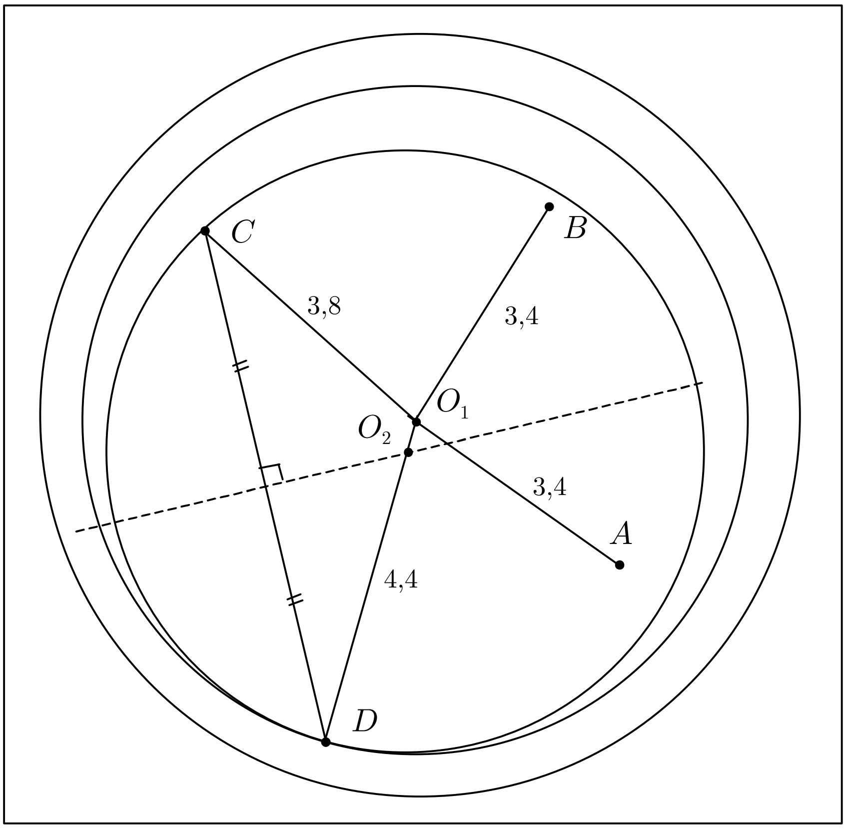


*Figure n°*10

On appelle O_1 le centre de ce cercle et D celui des quatre points qui est le plus éloigné de O_1, on trace le cercle de centre O_1 passant par D. Les trois autres points restent dans le disque et, parmi ces trois points, celui qui est le plus éloigné de O_1 est nommé C.

On cherche alors, à la fois, à rapprocher le centre du disque de D (on veut diminuer le rayon) et à attraper le point C sur le cercle. On construit donc la médiatrice de $[DC]$, on nomme O_2 le point d'intersection de cette médiatrice et de $[O_1D]$. On trace le cercle de centre O_2 qui contient maintenant les deux points D et C et son rayon est bien plus petit que le disque centré en O_1 du début.

Mais le disque correspondant contient-il nécessairement les deux autres points ? C'est ce que suggère la figure 10.

Eh bien, non !

Autrement dit, la conjecture suivante est fausse :

“ Quel que soit le point O_1, centre d'un disque qui contient les quatre points A, B, C, D tel que $O_1D > O_1A$, $O_1D > O_1B$, $O_1D > O_1C$, en désignant par O_2 le point d'intersection de $[O_1D]$ et de la médiatrice de $[DC]$, alors le disque de centre O_2 contient les quatre points A, B, C, D. ”

Voici en effet un contre-exemple donné par la figure 11 :

- le point O_1 est le centre d'un disque qui contient les quatre points,
- des quatre points, c'est D qui est le plus éloigné de O_1,
- des points A, B, C, c'est C qui est le plus éloigné de O_1,
  car $O_1A < O_1C$ et $O_1B < O_1C$.
- le point O_2 est situé à l'intersection de $[DO_1]$ et de la médiatrice de $[DC]$,
- le cercle de centre O_2 qui passe par D passe aussi par C et a un rayon plus petit que le premier disque,
- mais le disque correspondant à ce cercle centré en O_2 ne contient pas le point A car $O_2A > O_2C$.

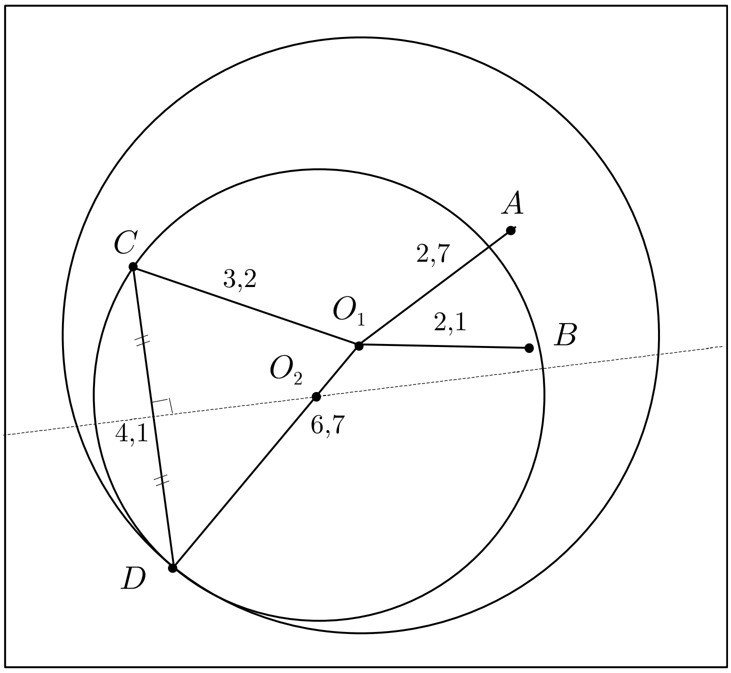


Figure n°11

Comment rectifier cette stratégie ?

Reprenons le début du programme de construction précédent relativement à un nuage de quatre points du plan : se reporter à la figure 12.

- On trace un cercle de centre O_1 dont le disque correspondant contient les quatre points, et de ces quatre points, le plus éloigné de O_1 est nommé D.
- On trace le cercle de centre O_1 passant par D. Des trois autres points, celui qui est le plus éloigné de O_1 est nommé C.
- On construit le point C_1, à l'intersection de $[DO_1]$ et de la médiatrice de $[DC]$: en effet, si on considère un point mobile M sur $[O_1D]$ et que l'on calcule pour chaque position de M la valeur $MD - MC$, cette valeur est positive pour $M = O_1$ et strictement négative si $M = D$. Il existe donc au moins un point de $[DO_1]$ où se fait le changement de signe. Ce point est unique et situé à l'intersection de $[DO_1]$ et de la médiatrice de $[DC]$, c'est donc C_1.
- On nomme A et B les deux points non encore nommés du nuage de quatre points. De la même manière, on construit les points A_1 et B_1 à l'intersection de $[DO_1]$ avec les médiatrices de $[DA]$ et $[DB]$ respectivement : la quantité $(MD-MA)$ (respectivement $(MD-MB)$) est positive ou nulle si M est situé sur $[O_1A_1]$ (respectivement sur $[O_1B_1]$) et négative ou nulle sur $[DA_1]$ (respectivement sur $[DB_1]$).

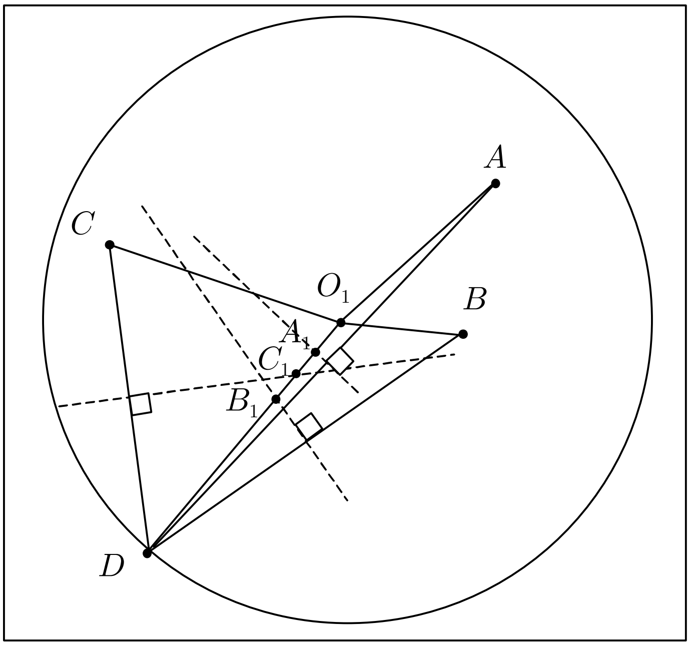


Figure n°12

- Entre les trois points A_1, B_1, C_1, on retient celui qui est le plus proche de O_1 et on le note O_2. Quitte à intervertir les noms des points, on peut supposer que $O_2 = A_1$ (cf. figure 13, page suivante).
- On trace le cercle de centre O_2 passant par D ; ce cercle passe par A et le disque correspondant contient les deux autres points B et C. En effet, comme O_2 appartient à $[O_1A_1]$, $[O_1B_1]$, $[O_1C_1]$, les quantités $(O_2D - O_2C)$, $(O_2D - O_2A)$ et $(O_2D - O_2B)$ sont toutes positives (ou nulles) et la quantité $(O_2D - O_2A)$ est nulle car $O_2 = A_1$ (d'après la convention ci-dessus).

Le disque de centre O_2 et de rayon O_2D a son rayon inférieur à celui du disque initial de centre O_1 et contient nécessairement les quatre points A, B, C, D.

Existe-t-il un disque de rayon plus petit, qui contienne les quatre points ?

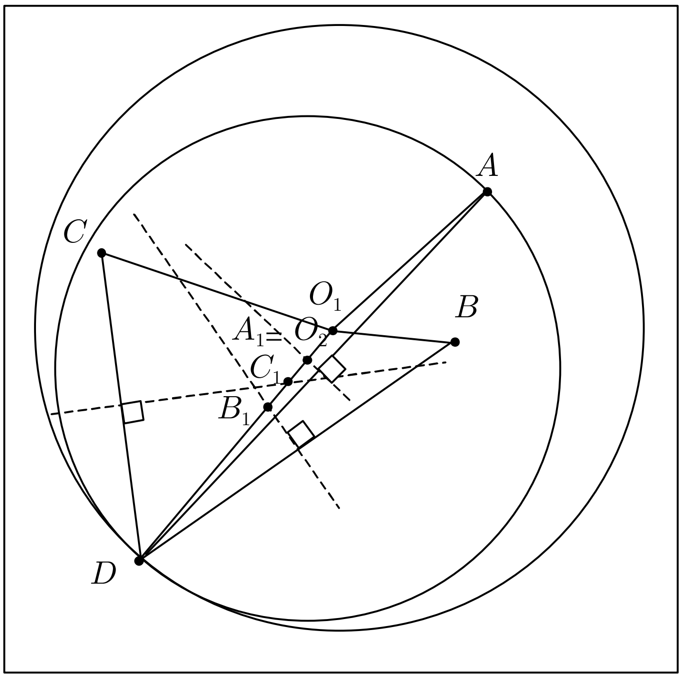


Figure n°13

Le disque de centre O_1 contient A, B, C, D ; des points A, B, C, c'est C qui est le plus éloigné de O_1. Le point C_1 est situé à l'intersection de $[DO_1]$ avec la médiatrice de $[DC]$, le point O_2 est situé à l'intersection de $[DO_1]$ avec la médiatrice de $[DA]$, le point B_1 est situé à l'intersection de $[DO_1]$ avec la médiatrice de $[DB]$: $O_2O_1 < C_1O_1, O_2O_1 < B_1O_1$.

Comme O_2 appartient à $[O_1A_1]$, à $[O_1B_1]$, $[O_1C_1]$, $O_2D \geq O_2A$, $O_2D \geq O_2B$ et $O_2D \geq O_2C$, et $O_2D = O_2A$ car $O_2 = A_1$. Donc le cercle de centre O_2 passant par D passe aussi par A et le disque correspondant contient les points C et B, et son rayon est plus petit que le disque centré en O_1 ci-dessus.

Deuxième étape : construction d'un disque de rayon plus petit qui contienne les quatre points

Supposons qu'entre B et A, le point le plus éloigné de O_2 soit B (ce n'est pas le cas de la figure 13, mais cf. figure 14, page suivante). On cherche donc à diminuer le rayon du disque tout en conservant A à l'intérieur et D et C au bord, et en attrapant en plus B au bord. On déplace donc le centre du cercle sur la médiatrice de $[DC]$ jusqu'à ce qu'il contienne B : le mieux est donc de tracer la médiatrice de $[BC]$ (ou celle de $[BD]$), on nomme O_3 le point d'intersection des deux médiatrices déjà tracées. Ce point O_3 est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD.

On pourrait penser que le disque correspondant contient A.

Eh bien, pas nécessairement ! Comme le montre le contre-exemple de la figure 14, voir page suivante : ce contre-exemple montre bien une configuration des quatre points telle que le point O_2, construit d'après le programme de construction de la première partie, est plus éloigné de B que de A ; cependant, si l'on construit O_3, comme indiqué ci-dessus, on obtient $O_3A > O_3B$, donc A n'appartient pas au disque correspondant au cercle circonscrit au triangle BCD.

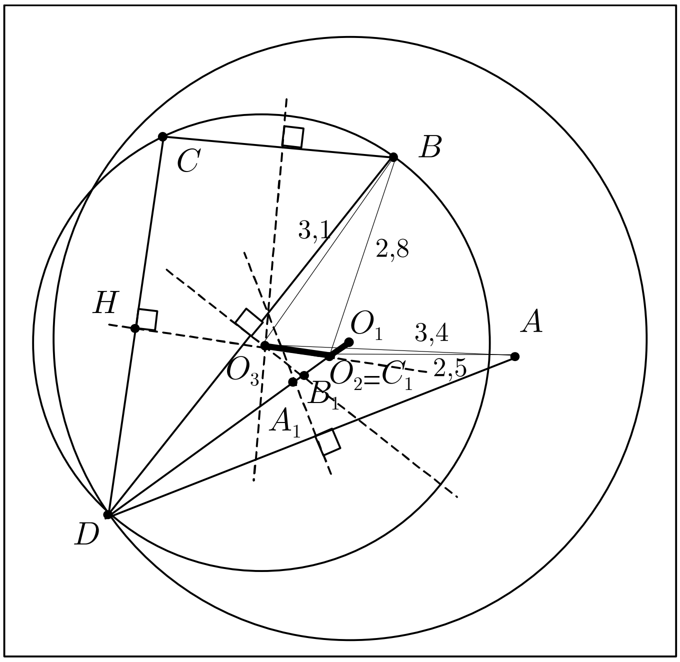


Figure n° 14

Des 3 points A_1, B_1, C_1, c'est C_1 qui est le plus proche de O_1. On a donc ici $O_2 = C_1$.

On a bien O_2 plus éloigné de B que de A. On construit O_3 à l'intersection de la médiatrice de $[BC]$ et de la médiatrice de $[DC]$.

On a $O_3A > O_3B$, donc A n'est pas à l'intérieur du disque correspondant au cercle circonscrit au triangle BCD.

Comment rectifier l'algorithme ?

Considérons donc O_2 construit comme indiqué à la première étape et désignons par H le projeté orthogonal de O_2 sur $[CD]$. Soit M un point de la médiatrice de $[CD]$, astreint au segment $[HO_2]$. La quantité $(MD - MB)$ (respectivement $(MD - MA)$) est positive ou nulle si $M = O_2$.

Trois cas sont alors possibles :

1. Les quantités $(MD - MB)$ et $(MD - MA)$ sont toutes les deux positives (ou nulles) si $M = H$.
   Dans ce cas, les points B et A appartiennent au disque de diamètre $[CD]$ et centré en H. Donc H est le " bon centre de secours ".
2. Une seule des quantités $(MD - MB)$ et $(MD - MA)$ est négative si $M = H$.
   Dans ce cas, quitte à intervertir les noms des points A et B, on peut supposer que l'on a $HD - HB \leq 0$; la quantité $(MD - MB)$ s'annule alors en un point (unique) du segment $[HO_2]$, nous désignons ce point par O_3. Ce point O_3 est donc l'intersection de $[HO_2]$ et de la médiatrice de $[DB]$. Dans ce cas, le cercle de centre O_3 qui passe par D passe aussi par C et B, et, comme $O_3D - O_3A \geq 0$, le point A est à l'intérieur du disque correspondant.

3. Les quantités $(MD - MB)$ et $(MD - MA)$ sont toutes les deux négatives si $M = H$. Elles s'annulent alors respectivement aux points A_2 et B_2 d'intersection de $[HO_2]$ et des médiatrices de $[DA]$ et $[DB]$. On nomme alors O_3 celui des deux points A_2 et B_2 qui est le plus proche de O_2. Quitte à intervertir les noms des points A et B, on peut supposer que $O_3 = B_2$. De même que dans le cas précédent, le cercle de centre O_3 qui passe par D passe aussi par C et B, et, comme $O_3D - O_3A \geq 0$, le point A est à l'intérieur du disque correspondant.

Résumons cette deuxième partie de l'algorithme.

- Si $(HD - HB)$ et $(HD - HA)$ sont positives, alors on a trouvé le centre de secours, c'est H. On note alors O_3 le point H.
- Si l'une seule des quantités $(HD - HB)$ et $(HD - HA)$ est négative, supposons que cela soit $HD - HB$, on construit O_3, point d'intersection de $[HO_2]$ et de la médiatrice de $[DB]$.
- Si $(HD-HB)$ et $(HD-HA)$ sont toutes les deux négatives, on construit alors le point A_2 d'intersection de $[HO_2]$ et de la médiatrice de $[DA]$ et le point B_2 d'intersection de $[HO_2]$ et de la médiatrice de $[DB]$. On nomme O_3 celui des deux points A_2 ou B_2 qui est le plus proche de O_2.

Le disque de centre O_3, ainsi construit dans les deux derniers cas, a son rayon inférieur à celui du disque de centre O_2 précédemment construit, et il contient nécessairement les quatre points A , B, C, D.

Mais ce point O_3 est-il le meilleur choix pour le centre de secours ?

Eh bien, pas nécessairement, comme le montre le contre-exemple de la figure 15, où le milieu de $[BD]$ est un bien meilleur candidat pour le centre de secours que le point O_3. Cependant, il faut noter que l'algorithme proposé repose sur le choix initial du point O_1, qui, rappelons-le, est le centre d'un disque quelconque qui contient les quatre points. Si, dans le cas de la figure 15, on était parti d'un point O_1, assez proche du milieu de $[BD]$, on aurait obtenu pour point O_3 le milieu de $[BD]$ et l'on aurait alors trouvé le centre de secours.

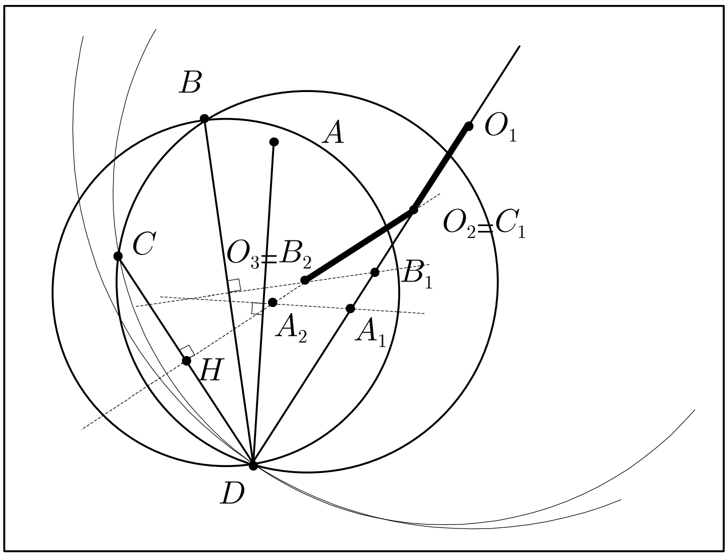


Figure n° 15

Encore une question ! Si un triangle ABC a tous ses angles aigus (au sens large), existe-t-il un point M, plus proche de A, B, C que le centre du cercle circonscrit à ABC ?

Considérons un point M, différent du centre O du cercle circonscrit au triangle ABC. Traçons la demi-droite $[OM)$; cette demi-droite fait un angle supérieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$ avec l'une des demi-droites $[OA)$, $[OB)$ ou $[OC)$: sinon, $[OA)$, $[OB)$, $[OC)$ seraient toutes dans le même demi-plan déterminé par la perpendiculaire en O à (OM), ce qui impliquerait que O est extérieur au triangle ABC (une autre preuve consiste à dire que trois demi-droites situées dans un même demi-plan ne déterminent pas des secteurs angulaires (inférieurs à π) disjoints).

Quitte à intervertir les noms des points A, B, C, on peut supposer que c'est l'angle $\widehat{AOM}$ qui est supérieur à $\frac{\pi}{2}$, ce qui implique que $MA > OA$, donc que M est un moins bon candidat à être le centre de secours.

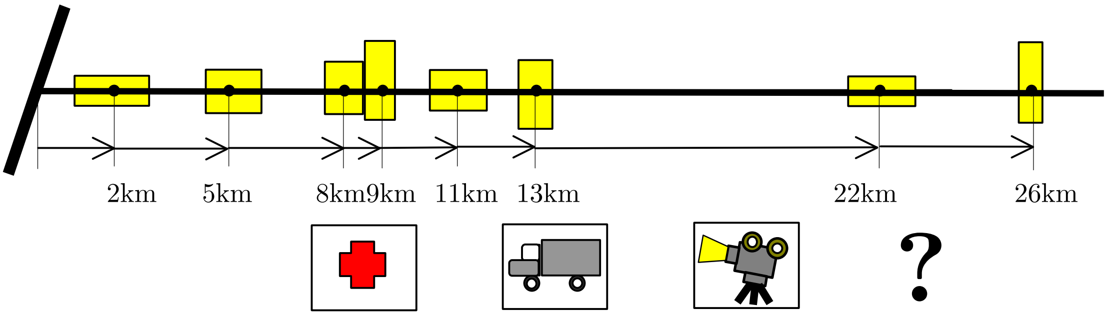
Figure n° 16

RÉSOLUTION DES PROBLÈMES

LA VALLÉE ALPINE

Rappel du problème

Voici le schéma de la vallée :



Où situer le centre de secours, la laiterie, le centre culturel ?

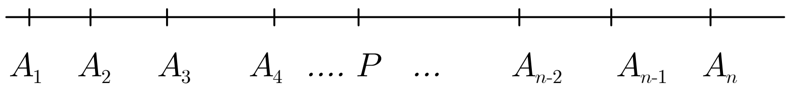
On se place dans un cadre un peu plus général que celui des données de l'énoncé.

Le problème peut être posé avec d'autres valeurs numériques et le nombre de villages peut être modifié : on notera donc n le nombre de villages et $(a_1, a_2, ..., a_n)$ les abscisses des n villages (et on supposera $n \geq 2$).

Le cas proposé dans le dessin est le cas :

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8) = (2, 5, 8, 9, 11, 13, 22, 26)\,.$$

On peut penser à une suite de n points, $A_1, A_2, ..., A_n$, situés sur un axe, d'abscisses respectives $a_1, a_2, ..., a_n$ (avec $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$).



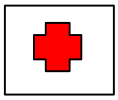
Remarque :

Dans cet exposé, on a choisi de ne pas mettre de "pondération" : les villages proposés en introduction sont supposés de même importance.

Ceci dit, dans toutes les explications, la suite des valeurs $(a_1, a_2, ..., a_n)$ est supposée croissante, pas strictement croissante : le simple fait de "répéter k fois" la même valeur dans cette suite revient à coefficienter par l'entier k l'importance d'un village, on peut avoir $a_{i-1} < a_i = a_{i+1} = ... = a_{i+k-1} < a_{i+k}$.

Le centre de secours de la vallée

- Où situer un centre de secours tel que le temps d'intervention dans les pires situations (c'est à dire les villages les plus éloignés) soit minimal pour des secours héliportés ?



Le centre cherché est un point d'abscisse c, qui réalise un minimum au niveau d'une certaine fonction des distances.

Il faut définir cette fonction ϕ de x, abscisse d'un point P quelconque, et c'est à partir du sens de variation de cette fonction ϕ, qu'on déterminera le minimum.

On veut que la distance du point P au point le plus éloigné de P parmi les n points, $A_1, A_2, ..., A_n$, soit la plus petite possible.

Si x représente l'abscisse du point P, la fonction ϕ cherchée est celle qui au réel x associe le plus grand des écarts $|x - a_1|, |x - a_2|, ..., |x - a_n|$.

Il s'agit de chercher le minimum de la fonction $\phi : x \mapsto \sup\limits_{i\in\{1,...,n\}} PA_i = \sup\limits_{i\in\{1,...,n\}} |x - a_i|$.

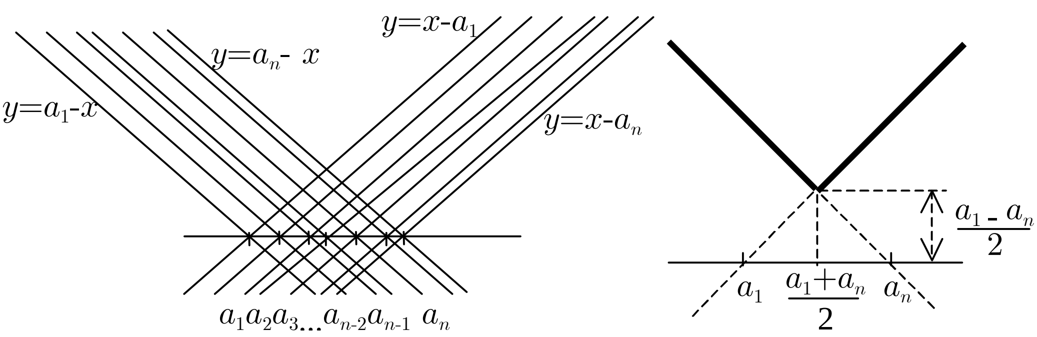
Une première présentation analytique

Chaque terme $|x - a_i|$ s'écrit $\sup(-x + a_i, x - a_i)$, il s'agit de chercher en définitive le plus grand terme parmi les $2n$ différences de la forme $x - a_i$ ou $-x + a_i$.

La suite $(a_1, a_2, ..., a_n)$ étant ordonnée, on a d'un côté : $-x + a_1 \leq -x + a_2 \leq ... \leq -x + a_n$ et de l'autre $x - a_1 \geq x - a_2 \geq ... \geq x - a_n$.

Il s'agit donc de chercher le minimum de la fonction $\phi : x \mapsto \sup(-x + a_n, x - a_1)$, qui est affine par intervalle.

On obtient facilement une représentation graphique de cette fonction ϕ à partir des tracés des droites d'équation $y = -x + a_n$ et $y = x - a_1$, et on en déduit celle de ϕ.



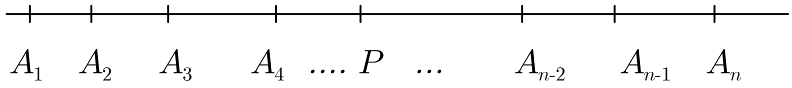
les droites d'équations $y = x - a_i$ ou $y = a_i - x$ *la courbe représentative de ϕ*

- si $x \leq \frac{a_1+a_n}{2}$, $\phi(x) = -x + a_n$ (c'est la valeur a_n qui est la plus éloignée de x),
- si $x \geq \frac{a_1+a_n}{2}$, $\phi(x) = x - a_1$ ...
- la plus petite valeur possible pour cette fonction ϕ est donc $\phi\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right) = \frac{a_n-a_1}{2}$.

Le "centre" de la série est le milieu $c = \frac{a_1+a_n}{2}$ du segment $[a_1, a_n]$, a_1 et a_n étant les valeurs extrêmes.

Autre présentation plus géométrique

Si P est un point de cette droite on veut que la plus **grande** des n distances $PA_1, PA_2, ..., PA_n$ soit la plus **petite** possible.



On remarque que (le sens de parcours de gauche à droite étant le sens habituel...) :

- si P est à "gauche" de A_i alors $PA_i \leq PA_{i+1} \leq ... \leq PA_n$
- si P est à "droite" de A_i alors $PA_1 \geq PA_2 \geq ... \geq PA_{i-1} \geq PA_i$

Conclusion : **la plus grande distance** parmi $PA_1, PA_2, ..., PA_n$ est

$$\max(PA_1, PA_2, ..., PA_n) = \max(PA_1, PA_n)$$

Or la droite, comme le plan ou l'espace, est divisée en deux parties, d'un côté les points P qui sont plus près de A_1 que de A_n, de l'autre côté les points P qui sont plus près de A_n que de A_1. Le partage se fait par un milieu, une médiatrice, un plan médiateur, on note H le milieu du segment $[A_1A_n]$.

Ce milieu réalise le minimum "pour la plus grande des deux distances PA_1 et PA_n", donc le minimum "pour la plus grande des n distances $PA_1, PA_2, ..., PA_n$", et la solution géométrique est tout de même beaucoup plus simple que la solution analytique !

Conclusion

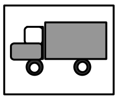
Le centre est le milieu H du segment $[A_1A_n]$ déterminé par les deux points extrêmes.

Pour la localisation de ce centre (le centre de secours dans le problème initial), seuls les termes extrêmes a_1 et a_n comptent .

La laiterie

Où situer une laiterie chargée de collecter le lait et de fabriquer les fromages ?

Le camion de transport du lait devra faire chaque jour un aller-retour entre chacun des villages et la laiterie, et l'emplacement idéal de la laiterie correspondrait à un nombre de kilomètres minimum pour le camion ...



Si on choisit pour situer la laiterie un point P d'abscisse x, alors le trajet que devra parcourir le camion chaque jour sera le double de la somme des distances $S(P)$ de la laiterie à chacun des n villages (repérés par leurs abscisses $a_1, ..., a_n$), ce qui s'écrit à l'aide des points $P, A_1, A_2, ...A_n$ ou des abscisses correspondantes :

$$S(P) = PA_1 + PA_2 + ... + PA_n = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i| .$$

Il faut déterminer une valeur de x qui minimise la fonction

$$\phi : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|$$

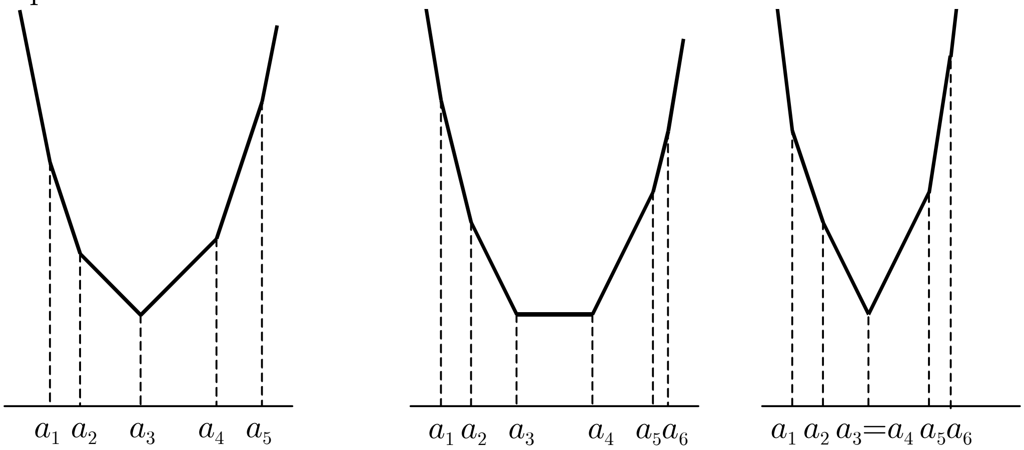
ou une position de P qui minimise la fonction S qui à chaque point P de la droite associe la somme des distances $PA_1 + PA_2 + ... + PA_n$.

Une première présentation analytique

Pour l'étude de la fonction $\phi : x \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} |x - a_i|$, voici des résultats généraux rapides.

1. **La suppression des valeurs absolue**
La fonction ϕ est une fonction continue affine par intervalle, sa courbe représentative est une réunion de 2 demi-droites (formées de points d'abscisses appartenant à $]-\infty, a_1]$ ou $[a_n, +\infty[$) et de $n-1$ segments (formés de points d'abscisses appartenant à l'un des $n-1$ intervalles $[a_i, a_{i+1}]$).
Plus précisément
   a. sur l'intervalle $]-\infty, a_1]$, $\phi(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} (a_j - x) = -nx + \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$
   b. sur l'intervalle $[a_i, a_{i+1}]$, $\phi(x) = \sum\limits_{j=1}^{i} (x - a_j) + \sum\limits_{j=i+1}^{n} (a_j - x) = ix - \sum\limits_{j=1}^{i} a_j$
   $- (n-i)\, x + \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_j = (2i - n)x - \sum\limits_{j=1}^{i} a_j + \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_j$
   c. sur l'intervalle $[a_n, +\infty[$, $\phi(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} (x - a_j) = nx - \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$.
2. **Le sens de variation de la fonction**
On peut déduire le sens de variation des différents "coefficients directeurs" de l'expression précédente.
Ces coefficients directeurs sont des nombres dérivés, la dérivée ϕ' est définie lorsque $x \in D = \mathbb{R} - \{a_1, ..., a_n\}$. On remarque que lorsque x croît dans D, $\phi'(x)$ est constant sur chaque intervalle mais croissante au sens large.

En chacune des valeurs a_i il y a un point "anguleux", le nombre dérivé à gauche étant inférieur au nombre dérivé à droite, la différence entre les deux nombres dérivés est un entier pair non nul.
Les trois types de tableaux de variation possibles correspondent aux trois types de graphiques ci-dessous.



La fonction ϕ, cas n impair *ϕ, cas n pair, $a_{\frac{n}{2}} \neq a_{\frac{n}{2}+1}$* *$\phi$, cas n pair, $a_{\frac{n}{2}} = a_{\frac{n}{2}+1}$*

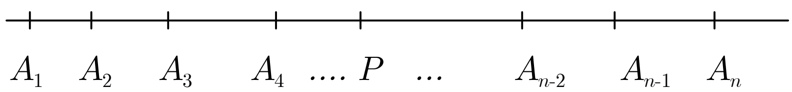
Certains segments peuvent être réduits à un seul point si, pour certains indices i, on a une égalité : $a_i = a_{i+1}$.

3. **Conclusion**
Le minimum se situe en un centre $c = \mu$ de la série qui s'appelle la **médiane**.
Une médiane μ possède comme propriété caractéristique : il y a autant de termes inférieurs à μ qu'il y a de termes supérieurs à μ dans la série.
Le partage en deux pose un problème de parité qui se résume ainsi (les termes de la série étant rangés dans l'ordre croissant) :

- **Lorsque n est impair, il y a un centre unique, la médiane est $\mu = a_{\frac{n+1}{2}}$**
- **Lorsque n est pair, tout réel μ de l'intervalle $\left[a_{\frac{n}{2}}, a_{\frac{n}{2}+1}\right]$ est une médiane, il y a une infinité de médianes si $a_{\frac{n}{2}} \neq a_{\frac{n}{2}+1}$.**

Une autre présentation plus géométrique

On veut que la **somme** des n distances $S(P) = PA_1 + ... + PA_n$ soit la plus **petite** possible.



1. **Le minimum est atteint à l'intérieur de $[A_1 A_n]$**
On remarque que (le sens de parcours de gauche à droite étant le sens habituel...) :
   - lorsque P, point d'abscisse x, est à "gauche" de A_1 :
   $\phi(x) = S(P) = PA_1 + PA_2 + ... + PA_n = PA_1 + (PA_1 + A_1A_2) + ... + (PA_1 + A_1A_n)$
   donc $S(P) = nPA_1 + A_1A_2 + ... + A_1A_n = nPA_1 + S(A_1) \geq S(A_1)$
   - lorsque P, point d'abscisse x, est à "droite" de A_n :
   $S(P) = PA_1 + PA_2 + ... + PA_n = nPA_n + S(A_n) \geq S(A_n)$
   Dans tous les cas le minimum est dans le segment $[A_1 A_n]$.

2. **Comment situer un minimum dans** $[A_iA_{i+1}]$ (lorsque $1 \leq i < n$)
$S(P) = PA_1 + ... + PA_n = iPA_i + A_1A_i + ... + A_{i-1}A_i - (n-i)PA_i + A_iA_{i+1} + ... + A_iA_n = S(A_i) + (2i-n)PA_i$
le minimum est donc pour $P = A_i$ si $2i - n > 0$, $P = A_{i+1}$ si $2i - n < 0$, et si $2i - n = 0$, tous les choix sont équivalents.

3. **Le choix du bon point** A_i
On a donc $S(A_{i+1}) = S(A_i) + (2i-n)A_iA_{i+1}$, la suite $(S(A_i))_{i\in\{1,...,n\}} = (\phi(a_i))_{i\in\{1,...,n\}}$ croît tant que $i < \frac{n}{2}$ puis décroît dès que $i > \frac{n}{2}$.

4. **Conclusion**
Le minimum est réalisé :

- lorsque n est pair, en prenant un point P quelconque de l'intervalle médian $\left[A_{\frac{n}{2}}A_{\frac{n}{2}+1}\right]$ (qui peut être réduit éventuellement à un seul point), en remarquant que la somme $S(P)$ est constante sur cet intervalle et que tout point de cet intervalle correspond au meilleur choix.
- lorsque n est impair, en prenant $P = A_{\frac{n+1}{2}}$, le point médian.

Une présentation ordinale, par segments emboîtés

1. Préliminaire :
Soit P un point de la droite (AB).
La somme des distances $PA + PB$ est constante égale à AB, lorsque P appartient au segment $[AB]$.
La somme $PA + PB$ est minimale lorsque P appartient à $[AB]$ (sinon il faut ajouter à AB soit $2PA$ soit $2PB$).

2. A présent on regroupe par 2 les termes de la somme $S(P)$:
$S(P) = PA_1 + ... + PA_n = (PA_1 + PA_n) + (PA_2 + PA_{n-1}) + ... + (PA_k + PA_{n+1-k}) + ...$
On minimise cette somme lorsqu'on minimise chaque terme de la somme ! On prend ici un point P dans l'intersection des intervalles emboîtés, donc lorsque
$$P \in [A_1A_n] \cap [A_2A_{n-1}] \cap ... \cap [A_kA_{n+1-k}] \cap ....$$

- Si n est pair le regroupement des points par 2 donne un minimum :
$$\begin{aligned} S(P) &= (PA_1 + PA_n) + (PA_2 + PA_{n-1}) + ... + \left(PA_{\frac{n}{2}} + PA_{\frac{n}{2}+1}\right) \\ &= A_1A_n + A_2A_{n-1} + ... + A_{\frac{n}{2}}A_{\frac{n}{2}+1} \end{aligned}$$
lorsque $P \in [A_1A_n] \cap [A_2A_{n-1}] \cap ... \cap \left[A_{\frac{n}{2}}A_{\frac{n}{2}+1}\right] = \left[A_{\frac{n}{2}}A_{\frac{n}{2}+1}\right]$.
- Si n est impair, le regroupement par 2 laisse isolé le terme “médian” $A_{\frac{n+1}{2}}$:
$$S(P) = (PA_1 + PA_n) + (PA_2 + PA_{n-1}) + ... + \left(PA_{\frac{n-1}{2}} + PA_{\frac{n+3}{2}}\right) + PA_{\frac{n+1}{2}}$$
Ici $P = A_{\frac{n+1}{2}} \in [A_1A_n] \cap [A_2A_{n-1}] \cap ... \cap \left[A_{\frac{n-1}{2}}A_{\frac{n+3}{2}}\right] = \left[A_{\frac{n-1}{2}}A_{\frac{n+3}{2}}\right]$

et $P = A_{\frac{n+1}{2}}$ minimise tous les termes de la somme : $S\left(A_{\frac{n+1}{2}}\right) = A_1A_n + ... + A_{\frac{n-1}{2}}A_{\frac{n+3}{2}}$.

Conclusion

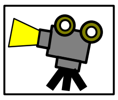
Cette dernière présentation est celle qui fait le mieux apparaître sans doute

la dualité des résultats : suivant la parité on a juste un point médian, ou bien un intervalle de points médians.

A une valeur médiane correspond un paramètre de dispersion, égal à la somme de distances d'une valeur médiane aux différentes valeurs de la série, ce paramètre correspond au minimum de la somme des distances des valeurs de la série à un réel x.

Le centre culturel

Où situer un centre culturel, situé au “coeur” de la vallée, de façon que ceux qui habitent en amont du centre culturel, aient au total autant de trajet à faire que ceux qui habitent en aval ?



On peut représenter par les points $A_1, A_2, ..., A_i$ les villages situés en aval, $A_{i+1}, A_{i+2}, ..., A_n$ ceux qui sont situés en amont : on veut que le point P qui correspond au centre culturel vérifie l'égalité :

$$A_1P + A_2P + ... + A_iP = PA_{i+1} + PA_{i+2} + ... + PA_n$$

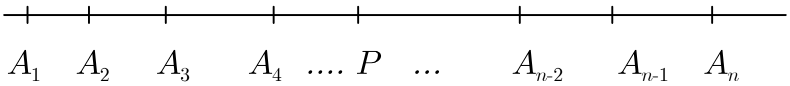
Une présentation analytique

L'égalité s'écrit, compte tenu de l'ordre présupposé $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$:
$(x - a_1) + (x - a_2) + ... + (x - a_i) = (a_{i+1} - x) + (a_{i+2} - x) + ... + (a_n - x)$.
On pourrait se demander d'abord comment choisir l'intervalle $[A_iA_{i+1}]$ contenant P.

La transformation de l'égalité en une égalité $(x - a_1)+(x - a_2)+...+(x - a_n) = 0$ rend cette question sans objet : la solution s'écrit $x = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_j$, x est la moyenne arithmétique, et on n'a pas à se préoccuper du choix de i et de l'intervalle $[A_iA_{i+1}]$.

Une présentation géométrique

On veut que les **sommes** de distances $A_1P+A_2P+...+A_iP = PA_{i+1}+PA_{i+2}+...+PA_n$ soient égales.



Un passage à une égalité entre mesures algébriques (notion obsolète ?) ou une égalité entre vecteurs de même sens, permet de retrouver la définition de l'isobarycentre :

$$\overrightarrow{A_1P} + \overrightarrow{A_2P} + ... + \overrightarrow{A_iP} = \overrightarrow{PA_{i+1}} + \overrightarrow{PA_{i+2}} + ... + \overrightarrow{PA_n} \Leftrightarrow \overrightarrow{A_1P} + \overrightarrow{A_2P} + ... + \overrightarrow{A_nP} = \overrightarrow{0}$$

$\Leftrightarrow P$ est l'isobaycentre.

Conclusion

L'emplacement idéal P de ce centre culturel est celui du centre de gravité ou isobarycentre des différents villages, l'abscisse de ce centre est la moyenne arithmétique des abscisses des villages.

Minimum d'une somme de carrés

On sait en mathématiques que le barycentre minimise aussi une somme de carrés.

La définition de l'emplacement idéal pour le centre culturel comme correspondant au minimum de la somme des carrés, aurait semblé arbitraire a priori : il est sûr que les déplacements des habitants vers ce centre culturel sont d'autant plus probables que le lieu *d'habitation est proche du centre, le nombre de kilomètres à parcourir intervient dans les comportements... Le choix du carré est arbitraire pour modéliser ces "probabilités", l'hypothèse est-elle déraisonnable ?*

On cherche donc à choisir P de façon à minimiser la somme $S(P) = \sum\limits_{i=1}^{n} PA_i^2$.

- **Une présentation analytique**

Cela revient à déterminer un minimum de la fonction $\phi : x \mapsto S(P) = \sum\limits_{i=1}^{n} (x - a_i)^2$

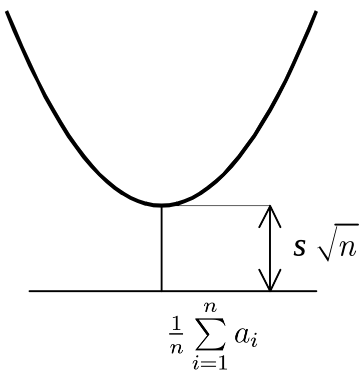
On peut développer : $\forall x, \phi(x) = nx^2 - 2\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$: ϕ est un trinôme du second degré, son minimum est atteint en $x = m = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, m est la moyenne arithmétique.

Sans développer, on peut dériver : $\forall x,\ \phi'(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(x - a_i) = 2\left(nx - \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)$, puis on résout $\phi'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = m = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, et on peut situer en m le minimum.

La valeur prise par ce minimum est :

$$\begin{aligned}\phi(c) &= \sum_{i=1}^{n} (a_i - m)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2m\sum_{i=1}^{n} a_i + m^2\sum_{i=1}^{n} 1 \quad = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2nm^2 + nm^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - nm^2 = n\sigma^2\end{aligned}$$

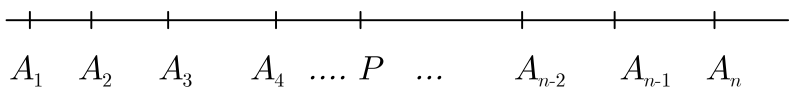
où σ^2 est la variance de la distribution statistique.



Allure de la courbe représentant ϕ

- **Décomposition de la somme des carrés**

On veut que la **somme** des n carrés $S(P) = PA_1^2 + ... + PA_n^2$ soit la plus **petite** possible.



On transforme cette somme (appelée aussi somme des carrés de Leibniz), en utilisant la relation de Chasles, on introduit un point Q :

$$S(P) = \left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA_1}\right)^2 + ... + \left(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QA_n}\right)^2 = n\overrightarrow{PQ}^2 + 2\overrightarrow{PQ}.\left(\overrightarrow{QA_1} + ... + \overrightarrow{QA_n}\right) + S(Q)$$

Si on introduit un point particulier Q tel que $\overrightarrow{QA_1}+...+\overrightarrow{QA_n}=\overrightarrow{0}$ et si $P\neq Q$ alors $S(P)=n\overrightarrow{PQ}^2+S(Q)>S(Q)$

Or l'égalité $\overrightarrow{QA_1}+...+\overrightarrow{QA_n}=\overrightarrow{0}$ caractérise l'isobarycentre $Q=G$ des points $A_1,A_2,...,A_n$, c'est le point d'abscisse $m=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$. $S(G)$ est un minimum d'inertie égal à $n\times\sigma^2$, σ^2 étant la variance de la série statistique.

- **Conclusion**

On retrouve le même site que pour le centre culturel, malgré la différence des définitions.

On obtient aussi une valeur du minimum de la somme des carrés, c'est à un coefficient n près la variance σ^2 de la série statistique.

CENTRES D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

Problématique dans $\mathbb{R}^n$

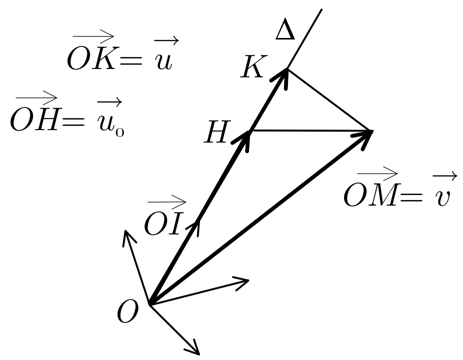
On se donne une série statistique simple, c'est un tableau de n nombres réels :

a_1	a_2	a_3	...	a_{n-1}	a_n

On introduit le vecteur $\overrightarrow{u} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ de $\mathbb{R}^n$, ou un point M de coordonnées $(a_1, a_2, ..., a_n)$ dans espace affine $\mathcal{A}$ de dimension n, muni d'un repère $(O, \overrightarrow{e_1}, ... \overrightarrow{e_n})$.

On suppose toujours que la série est ordonnée, c'est à dire $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$.

On veut chercher une valeur "centrale" c de la série statistique. Cette valeur centrale correspond à un n-uplet $\overrightarrow{u_0} = (c, c, ..., c)$ de $\mathbb{R}^n$ ou un point H de coordonnées $(c, c, ..., c)$ de la diagonale Δ du repère de l'espace $\mathcal{A}$: on remplace l'information multiple $(a_1, a_2, ..., a_n)$ par **une information unique** "c", écrite sous forme d'un n-uplet $(c, c, ..., c)$.



Dessin dans un hyper espace de dimension n

Cette valeur centrale est telle que les vecteurs $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{OH}$ sont les plus proches possible l'un de l'autre.

$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OM}$	a_1	a_2	a_3	...	a_{n-1}	a_n
$\overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{OH}$	c	c	c	...	c	c

- Pour savoir si deux éléments de $\mathbb{R}^n$ sont proches l'un de l'autre ou pas, il faut se donner un instrument de mesure : on choisit donc une norme N sur $\mathbb{R}^n$.
- On introduit une variable x qui permet de repérer le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OK} = (x, ..., x)$, de la bissectrice,
  le choix d'une valeur particulière de x correspondant au choix d'un emplacement pour la structure commune concernée dans l'exemple proposé en introduction, x est proportionnel à la distance algébrique entre l'emplacement choisi et un point O origine du repère.
- On définit une fonction numérique ϕ_N , qui associe à tout réel x la norme
$$N\left(\overrightarrow{MK}\right) = N\left(x - a_1, ..., x - a_n\right).$$

Il restera à chercher un minimum de $\phi_N(x)$, toute valeur de x qui minimise ϕ_N sera une valeur centrale c pour la norme N.

Objectif = chercher le minimum de la norme $N\left(\overrightarrow{MK}\right) = \phi_N(x)$**,**

$\overrightarrow{MK}$	$x - a_1$	$x - a_2$	$x - a_3$	...	$x - a_{n-1}$	$x - a_n$

L'évaluation de cette distance minimale donne un caractère de dispersion de la série statistique.

Remarque sur le repérage

En choisissant une norme pour mesurer les distances, on a l'assurance que les solutions éventuelles sont compatibles avec des changements d'origine ou d'échelle, en effet :

- un changement d'origine se traduit par une "translation", les valeurs $a_1, a_2, ..., a_n$ sont remplacées par $a_1 + h$, $a_2 + h$, ..., $a_n + h$, donc le vecteur $\overrightarrow{MK}$ ne change pas, et la valeur centrale sera remplacée par $c + h$.
- un changement d'échelle se traduit par une "homothétie", les valeurs $a_1, a_2, ..., a_n$ sont remplacées par λa_1, λa_2, ..., λa_n, $\overrightarrow{MK}$ est multiplié par λ et la valeur centrale sera remplacée par λc.

La traduction concrète de ces propriétés mathématiques dans l'exemple proposé en introduction est que l'on aurait pu choisir une autre origine pour repérer les villages, ou une autre mesure que le km, les solutions n'auraient pas changé.

Cas de la norme infinie N_∞

Définition

Si $\overrightarrow{w} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$, on rappelle que

$$N_\infty(x_1, x_2, ..., x_n) = N_\infty\left(\overrightarrow{w}\right) = \left\|\overrightarrow{w}\right\|_\infty = \sup_{i\in[1..n]} |x_i|\,.$$

Il faut rendre minimale la fonction

$$\phi_\infty(x) = N_\infty\left(\overrightarrow{MK}\right) = N_\infty(x - a_1, ..., x - a_n) = \sup_{i\in[1..n]} |x - a_i|\,.$$

Solution

Pour plus de détails, voir page 56.

- si $x \le \frac{a_1+a_n}{2}$, $\phi_\infty(x) = -x + a_n$: x est plus proche de a_1 que de a_n, c'est la valeur a_n qui est la plus éloignée de x.
- si $x \ge \frac{a_1+a_n}{2}$, $\phi_\infty(x) = x - a_1$: x est plus proche de a_n que de a_1, c'est la valeur a_1 qui est la plus éloignée de x.
- ou encore dans tous les cas $\phi_\infty(x) = \sup\left(-x + a_n, x - a_1\right)$ et le minimum est :

$$\phi_\infty\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) = \frac{a_n - a_1}{2}.$$

Le “centre” de la série est le milieu $\frac{a_1+a_n}{2}$ du segment $[a_1, a_n]$, a_1 et a_n étant les valeurs extrêmes.

La distance du vecteur $\overrightarrow{v} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ au vecteur central $\overrightarrow{u_0} = (c, c, ..., c)$ est (avec la valeur $c = \frac{a_1+a_n}{2}$) :

$$\phi_\infty(c) = N_\infty(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u_0}) = N_\infty\left(\overrightarrow{HM}\right) = \frac{a_n - a_1}{2}.$$

C'est la distance de c à a_1 ou à a_n, c'est la moitié de l'amplitude du segment $[a_1, a_n]$ Cette amplitude est un paramètre de dispersion appelé “étendue” de la série.

Si l'on travaille avec cette norme N_∞, seules les coordonnées extrêmes a_1 et a_n comptent.

Cas de la norme N_1

Définition

Si $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$, on sait que

$$N_1(x_1, x_2, ..., x_n) = N_1\left(\overrightarrow{v}\right) = \left\|\overrightarrow{v}\right\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|\,.$$

Il s'agit de rendre minimale la fonction

$$\phi_1(x) = N_1\left(\overrightarrow{MK}\right) = N_1(x - a_1, x - a_2, ..., x - a_n) = \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|\,.$$

Solution

Pour plus de détails, voir page 58.

Il faut déterminer un minimum de la fonction $\phi_1 : x \mapsto \sum_{i=1}^{n} |x - a_i|\,.$

Le minimum se situe en un centre μ qui s'appelle la (ou une) **médiane**.

Cette médiane μ possède comme propriété caractéristique : il y a autant de termes inférieurs à μ qu'il y a de termes supérieurs à μ dans la série.

- Si n est impair, il y a un centre unique, la médiane est $\mu = a_{\frac{n+1}{2}}$
- Si n est pair, tout réel μ de l'intervalle $\left[a_{\frac{n}{2}}, a_{\frac{n}{2}+1}\right]$ est une médiane, il y a une infinité de médianes si $a_{\frac{n}{2}} \neq a_{\frac{n}{2}+1}$.

La distance $\phi_1(\mu)$ est un paramètre de dispersion, égal à la somme de distances d'une valeur médiane aux différentes valeurs de la série, ce paramètre correspond au minimum de la somme des distances des valeurs de la série à un réel x.

Cas de la norme N_2

Définition

Si $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$, on sait que :

$$N_2(x_1, x_2, ..., x_n) = N_2\left(\overrightarrow{v}\right) = \left\|\overrightarrow{v}\right\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

Il s'agit de rendre minimale la fonction

$$\phi_2\left(x\right) = N_2\left(\overrightarrow{MK}\right) = N_2(x-a_1, x-a_2, ..., x-a_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x-a_i\right)^2}.$$

Solution

Cela revient à déterminer un minimum de la fonction $\phi_2\ :\ x \mapsto \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x-a_i\right)^2}$ ou ce qui est équivalent, un minimum de la fonction $\psi : x \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n}\left(x-a_i\right)^2 = nx^2 - 2\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x + \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2$: ψ est un trinôme du second degré, son minimum est atteint en $x = m = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i,$ m est la moyenne arithmétique.

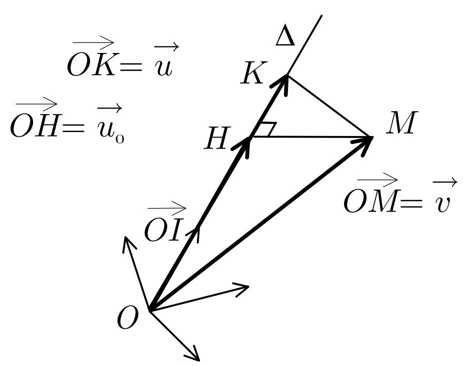
La valeur prise par ce minimum est $\phi_2\left(c\right) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a_i-m\right)^2} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 - nm^2} = \sigma\sqrt{n},$ où σ est l'écart-type de la distribution statistique.

Une approche euclidienne dans $\mathbb{R}^n$

La norme N_2 est la norme enclidienne associée au produit scalaire euclidien (la base de départ est supposée orthonormée) et on peut donc utiliser l'orthogonalité :

$\phi_2(x) = N_2\left(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\right) = \left\|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\right\|_2 = \left\|\overrightarrow{MK}\right\|_2$, distance enclidienne du point M au point variable K de la bissectrice Δ du repère, est **minimale** lorsque le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OK}$ est le vecteur $\overrightarrow{u_0} = \overrightarrow{OH}$, **projeté orthogonal sur** Δ du vecteur $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OM}$.

Ce résultat est une conséquence du théorème de Pythagore : dans le triangle MHK, rectangle en H, le côté MK est plus long que le côté MH.



Projection dans un hyper-espace de dimension n

Analytiquement, cela s'écrit, si $M,\ K,\ I$ ont pour coordonnées respectives $(a_1, ..., a_n)$, $(x, ..., x)$ et $(1, ..., 1)$, dans un repère orthonormé :

· K est le projeté orthogonal de M $\Leftrightarrow \overrightarrow{KM}.\overrightarrow{OI} = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i - x) = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = m$, moyenne de la série.

Donc le projeté orthogonal H de M a pour coordonnées $(m, ..., m)$.

· $\overrightarrow{HM}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i - m)^2 \quad = \overrightarrow{OM}^2 - \overrightarrow{OH}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 - nm^2$

$= \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2 - n\left(\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = ns^2$, s^2 est la variance de la série.

Le triangle rectangle OHM a pour mesures :

$$OM = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\,, \quad OH = |m|\sqrt{n}\,, \quad MH = s\sqrt{n}.$$

En prenant une nouvelle unité de mesure, telle que le vecteur $\overrightarrow{OI}$ de coordonnées $(1, 1, ..., 1)$ de la diagonale Δ soit à présent unitaire, les mesures deviennent

$$OM = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^2},\quad OH = |m|\,, \quad MH = s,$$

l'écart type est alors la distance de la série à la bissectrice...

Séries statistiques doubles, somme de séries statistiques

Centre de la série somme et somme des centres

On considère la série statistique $(x_1, x_2, ..., x_n)$, à laquelle on associe le point M de l'espace $\mathcal{A}$ de coordonnées $(x_1, x_2, ..., x_n)$, un centre I de coordonnées $(c, c, ..., c)$.

On considère une autre série statistique $(y_1, y_2, ..., y_n)$, à laquelle on associe le point N de l'espace $\mathcal{A}$ de coordonnées $(y_1, y_2, ..., y_n)$, un centre J de coordonnées $(d, d, ..., d)$.

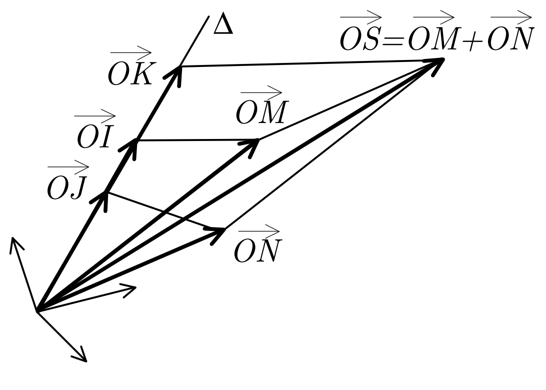
On considère la série somme $(x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$ à laquelle on associe le point S de l'espace $\mathcal{A}$ et un centre K de coordonnées $(e, ..., e)$.

Il n' y aucune raison générale pour qu'on ait une égalité : $(e, ..., e) = (c, ..., c) + (d, ..., d)$ qui traduirait une égalité $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ}$.
Le centre de la série statistique somme n'est pas en général la somme des centres..., la médiane de la série somme n'est pas la somme des médianes des séries (sauf exception).

Mais avec la norme euclidienne N_2, on a une égalité :

$$\text{si } \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,, \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \text{alors} \quad \overline{s} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i) = \overline{x} + \overline{y}.$$

La moyenne $\overline{s}$ de la somme est la somme des moyennes $\overline{x} + \overline{y}$.



Somme de deux séries statistiques

Dispersion de la somme : covariance et corrélation

Avec la norme euclidienne N_2, on peut utiliser des produits scalaires et des angles entre des vecteurs.
Dans la pratique, on ne regarde pas tant l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$, (qui change dès qu'on change l'origine O du repère), mais plutôt l'angle entre les plans Π contenant Δ et M, et Π' contenant Δ et N, c'est à dire l'angle des vecteurs $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{JN}$ (vecteurs orthogonaux à la bissectrice Δ) : cet angle ne change pas si on change l'échelle ou l'origine.
On a un résultat classique intéressant sur le produit scalaire (en supposant la base orthonormale) :

$$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{JN} = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) = \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OI}.\overrightarrow{OJ} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\,\overline{x}\,\overline{y} = n\sigma_{x,y}$$

où $\sigma_{x,y}$ est la covariance des séries statistiques.

En prenant comme vecteur unité $\overrightarrow{OI} = (1, 1..., 1)$, *on aurait même l'égalité :*

$$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{JN} = \sigma_{x,y}$$

Si $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{JN}$ sont non nuls, ce qui revient à dire que les écarts types σ_x et σ_y sont non nuls, le coefficient de corrélation s'écrit

$$\rho_{x,y} = \frac{\sigma_{x,y}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{JN}}{\left\|\overrightarrow{IM}\right\|_2 . \left\|\overrightarrow{JN}\right\|_2} = \cos\left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{JN}\right)$$

La variance de la statistique “somme” $(x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$ vérifie les conditions “d'Al-Kashi ”:

$\sigma^2_{x+y} = \sigma^2_x + \sigma^2_y + 2\sigma_{x,y}$ soit (au facteur $\frac{1}{n}$ près) : $\left\|\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{JN}\right\|_2^2 = \left\|\overrightarrow{IM}\right\|_2^2 + \left\|\overrightarrow{JN}\right\|_2^2 + 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{JN}$

L'écart-type est une distance euclidienne

Les définitions de la covariance et de la variance, qui peuvent paraître tout à fait abstraites dans un premier temps, prennent du sens si on arrive à les interpréter au sens euclidien comme un produit scalaire ou un carré scalaire. L'écart-type devient une distance, et le coefficient de corrélation mesure un angle entre des distributions statistiques (en donnant le cosinus de cet angle).

On peut en particulier utiliser la variance ou l'écart-type de la différence de deux séries statistiques pour mesurer la distance entre deux séries...

Si on veut analyser cette distance en terme de “distance significative ou non”, on plonge dans tous les problèmes de Khi-deux : toute la théorie développée par Fischer à ce sujet est fondée sur une vision très euclidienne des distances !

Conclusion sur statistiques et géométrie

Ces études de séries statistiques et de problèmes de géométrie, posent des problématiques communes : comment situer un centre ?

- Les exercices à développer pour des éléves de lycées sont nombreux, ils ont aussi bien des solutions géométriques qu'analytiques, et une interprétation statistique.
- L'utilisation d'une représentation géométrique, dans un hyper espace de dimension n pour les statistiques, permet de donner du sens au problème de recherche d'un **centre** à partir du choix d'une mesure des **distances**.
  Inversement l'étude de séries statistiques peut être une bonne occasion d'aborder des espaces de dimensions quelconques, même supérieures à 3.

Remarque :

Dans tous les résultats présentés ici, on a fait le choix de ne pas mettre de pondération. Quitte à compter une donnée autant de fois que son coefficient de pondération lorsque les coefficients sont entiers (par exemple, dans l'exemple de la vallée alpine, les coefficients peuvent être les nombres d'habitants de chacun des villages), les résultats (et la théorie sous-jacente) n'auraient pas changé. Plus précisément :

* *Pour le centre de secours ou pour la norme N_∞; les pondérations ne jouent aucun rôle, sauf si on décide de supprimer dans la série les valeurs extrêmes (par exemple celles qui sont en dehors de l'intervalle allant du premier au neuvième décile...)*

* *Pour la laiterie ou pour la norme N_1, le centre est naturellement "attiré" par le point qui a le coefficient le plus élevé, et en particulier si l'un des points a une masse supérieure à la somme des masses des autres points, il est automatiquement point médian ou centre, quelle que soit la disposition des autres points.*
Dans la pratique lorsque le chef-lieu du canton contient à lui seul plus de la moitié de la population du canton, il est tout à fait raisonnable d'y situer beaucoup de services communs à tous les villages du canton - même s'il n'est pas au centre "géographique" du canton.

* *Pour le centre culturel, ou pour la norme N_2, la solution est le "barycentre" du système pondéré.*

CENTRE DE SECOURS EN PLAINE

Dans une région de plaine se trouvent quatre villages de même importance. Ceux-ci veulent se doter d'un centre de secours tel que le temps d'intervention dans les villages les plus éloignés soit minimal pour des secours héliportés. Où placer le centre de secours ?

On vous propose trois configurations pour les 4 villages... *(ça n'est pas exhaustif, il y en a d'autres possibles, mais celles-ci présentent déjà des éléments de discussion).*

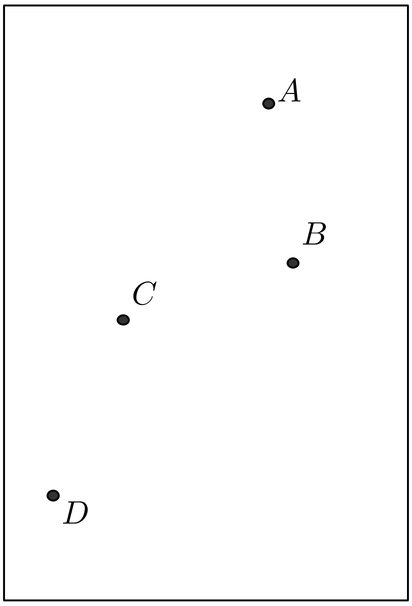


Figure n°1

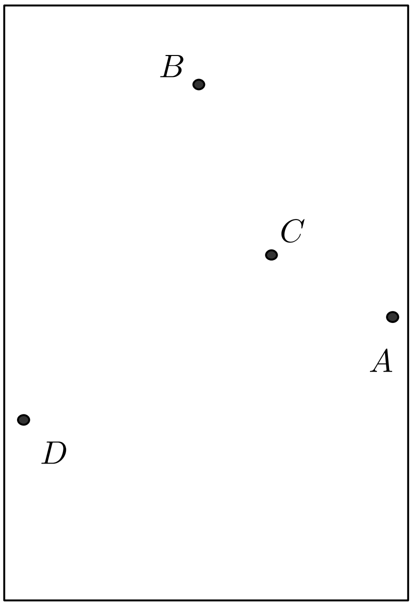


Figure n°2

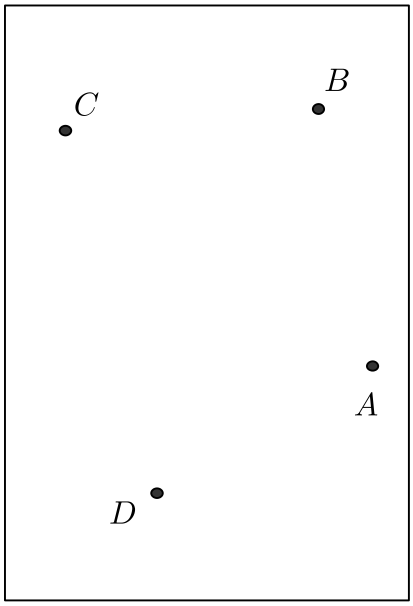


Figure n°3

Problème

Si on reprend les critères qui ont déjà été définis à propos de ce centre, lors de l'étude dans la vallée alpine, en dimension 1, on sait qu'il s'agit de minimiser la plus grande distance d'un point du plan aux différents points du nuage.

Il est clair que ce centre ne peut être obtenu en séparant abscisses et ordonnées, les coordonnées du centre ne s'obtiennent pas (sauf exception) à partir des coordonnées des centres de chacune des séries statistiques.

- Du point de vue de ce centre, cette distance minimale correspond à un "rayon d'action" de l'hélicoptère, on veut que ce rayon soit le plus petit possible. Il s'agit de chercher le plus petit disque qui contient un nuage de points du plan, et on va résoudre d'abord le problème selon une logique centrale.
- On peut aussi construire des zones concentriques autour de chaque village : pour aller du village au centre de secours, il faut minimiser la durée du trajet-retour... qui est naturellement égale à la distance aller. Mais cette fois-ci, il faut imaginer des disques de même rayon, centrés sur chacun des villages qui modélisent ce temps "retour"et étudier leur recouvrement, c'est ce que l'on fera dans un deuxième temps.

Recherche du plus petit cercle contenant un nuage de n points

On laisse le cas évident $n = 2$, où le “milieu” est la solution évidente : tout cercle contenant deux points A et B a un diamètre au moins égal à la distance AB.

Le cas $n = 3$, le nuage est un triangle ABC

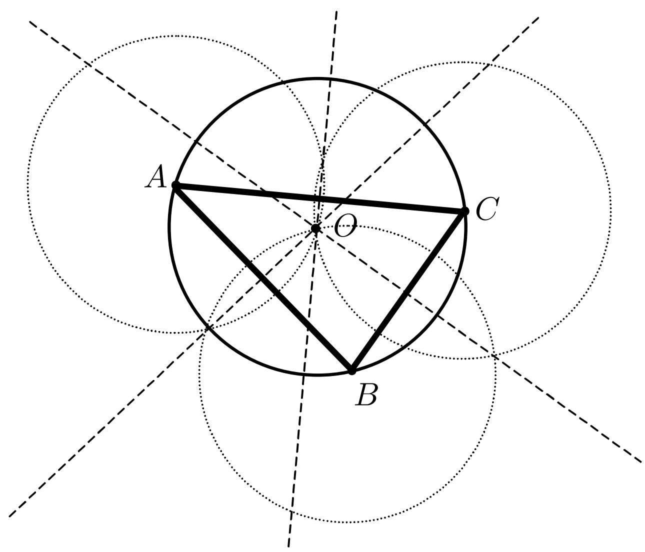
Parmi les cercles qui contiennent le triangle, on peut penser au cercle circonscrit au triangle.

Le cercle circonscrit au triangle ABC est-il le plus petit des cercles qui contient les trois points ?

On peut tenter de justifier une conjecture allant dans le sens d’une réponse positive :

l’intersection des trois cercles centrés en A, B, C ayant comme rayon celui du cercle circonscrit se réduit au point O centre du cercle circonscrit et tout autre point du plan est plus éloigné de A, B ou C que O.

Ou encore, les trois médiatrices partagent le plan en 6 secteurs, un point situé dans chacun de l’un de ces 6 secteurs est plus éloigné que O de l’un des sommets du triangle au moins.

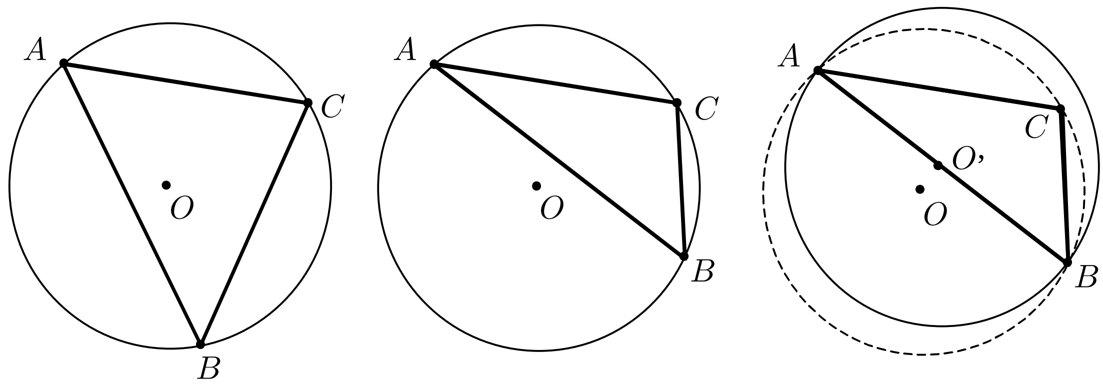


Le cercle circonscrit, meilleure solution.

Cela ne marche pas toujours, comme on le voit sur la figure de la page suivante, c’est la solution pour le premier triangle, mais pas pour le deuxième...

Cela dépend du triangle !

Et la démonstration ne vaut plus dès lors que le triangle possède un angle obtus, on vous laisse regarder les dessins qui suivent.



1er triangle *2ème triangle (le cercle circonscrit)* *2ème triangle (la solution)*

S'il y a un angle obtus (ici en B), la solution est un cercle de diamètre le côté opposé à cet angle obtus, ici $[AC]$, (et il n'existe pas dans tous les cas de cercle plus petit contenant à la fois A et C que celui de centre I, milieu de $[AC]$ passant par A et C).

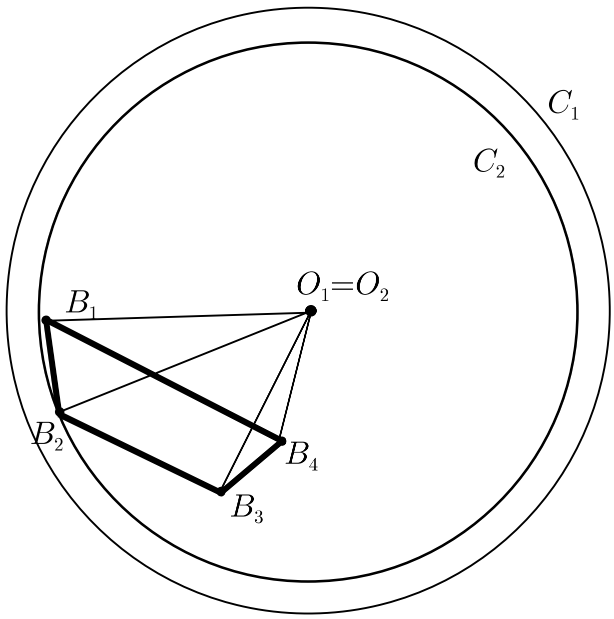
Cas $n = 4$, analyse d'une situation et d'une stratégie

On a un quadrilatère $B_1B_2B_3B_4$, on construit des cercles qui contiennent les 4 points avec une idée : mettre plus de points du quadrilatère sur le cercle.

Le cercle C_1 est un cercle (quelconque), qui contient les 4 points, on note son centre O_1.

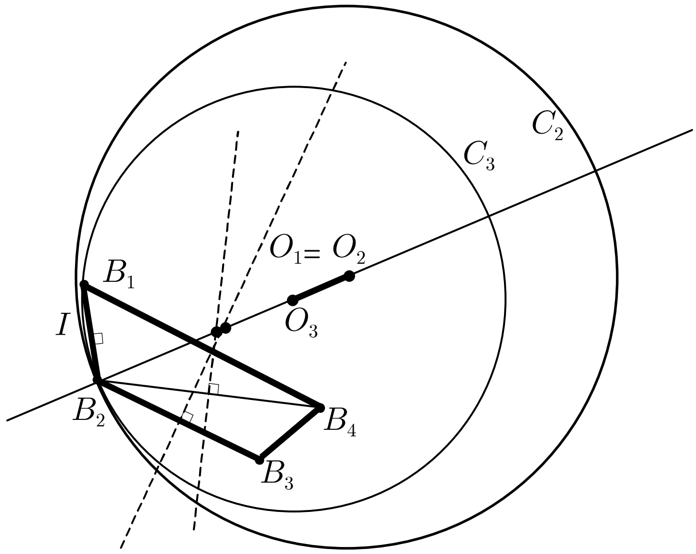
On garde le centre O_1, on diminue le rayon.

Le cercle C_2 a pour centre $O_2 = O_1$, et passe par B_2, son rayon est plus petit que celui du cercle C_1, car $O_1B_2 = \max\limits_{j\in\{1,2,3,4\}} O_1B_j$.



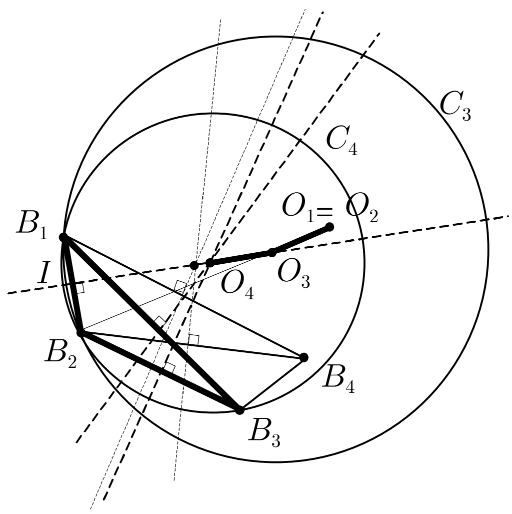
On garde le point B_2 sur le cercle, on déplace le centre sur $[O_1B_2]$ pour diminuer le rayon.

Le cercle C_3 a pour centre O_3, et passe par B_2 et B_1, contient B_3 et B_4, il est “plus petit” que le cercle C_2, cela résulte de l'ordre des points d'intersections des médiatrices de $[B_2, B_1]$, $[B_2, B_3], [B_2, B_4]$ avec $[O_1B_2]$.



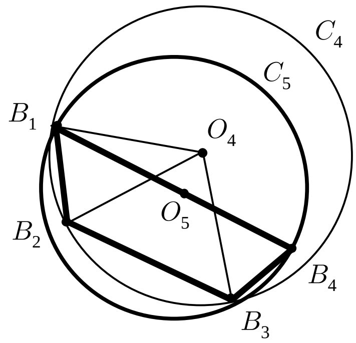
Tout en gardant les points B_1 et B_2 sur le cercle, en notant I le milieu de $[B_1B_2]$, on déplace encore le centre sur $[O_3I]$ en direction de I, pour diminuer le rayon de C_3 .

- Soit on arrive en I, le cercle C_4 de diamètre $[B_1B_2]$ contient tous les points du nuage !
- Sinon ici le cercle C_4 de centre O_4, passe par B_1, B_2, B_3, il contient B_4 et il est “plus petit” que le cercle C_3, tout dépend de l'ordre des points d'intersection avec $[O_3I]$ des médiatrices de $[B_1B_3]$ ou $[B_2B_3]$ et $[B_1B_4]$ ou $[B_2B_4]$.



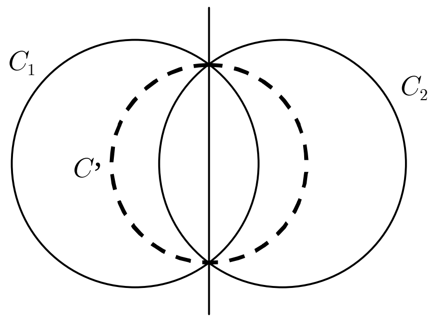
Comme vous l'avez vu avec trois points, il faut se méfier des solutions : il y a mieux ici que le cercle C_4, celui-ci a encore un défaut, son centre est “à l'extérieur du quadrilatère”.

Le cercle C_5 de diamètre $[B_1B_4]$ est plus petit ...



Cas général

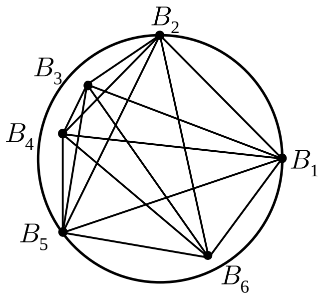
1. S'il existe un cercle qui contient tous les points du nuage $B_1, B_2, ...B_n$, l'algorithme proposé avec les 4 points permet de trouver des cercles plus petits qui contiennent aussi le nuage (et qui passent par 2 points diamétralement opposés ou par 3 points).
2. Il y a d'autres cercles qui contiennent tous les points du nuage, l'algorithme proposé ci-dessus avec les 4 points permet de trouver des solutions du même type que celle qui vient d'être décrite, mais pas forcément la même.
3. En fait le nombre de solutions possibles est fini : c'est soit l'un cercle de diamètre $[B_iB_j]$, soit l'un des cercles circonscrits à un triangle $B_iB_jB_k$ formé de trois points du nuage. On vous laisse dénombrer les possibilités... En attendant parmi ces cercles-solutions en nombre fini, on va classer dans l'ordre les rayons de tous ces cercles solutions, et le premier de la classe sera le "cercle-solution".
4. Il y a unicité de la solution : si C_1 et C_2 sont deux cercles distincts de même rayon qui contiennent tous les points du nuage, le cercle C' dont un diamètre est formé des points d'intersection des cercles C_1 et C_2,contient $C_1 \cap C_2$ donc tous les points du nuage et a un rayon strictement inférieur à celui de C_1 ou C : voir dessin ci-dessous.



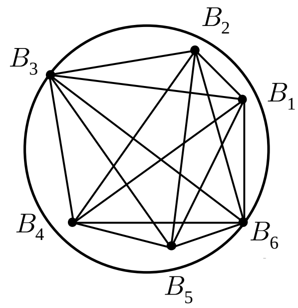
Unicité de la solution

5. S'il existe un cercle dont le diamètre est le segment $[B_iB_j]$ qui contient tous les autres points, alors c'est la solution minimale : dans ce cas, le segment $[B_iB_j]$ est le plus long des segments joignant 2 points, et il ne peut pas exister de cercle contenant B_i et B_j (et tous les autres points) de diamètre plus petit !

6. La solution est le cercle circonscrit au triangle $B_iB_jB_k$ si ce cercle contient tous les autres points du nuage, et si le triangle $B_iB_jB_k$ ne possède aucun angle obtus : aucun cercle de rayon inférieur ne peut contenir les trois points B_i, B_j et B_k !



Exemple de solution cas n°1



Exemple de solution cas n°2

Remarque :

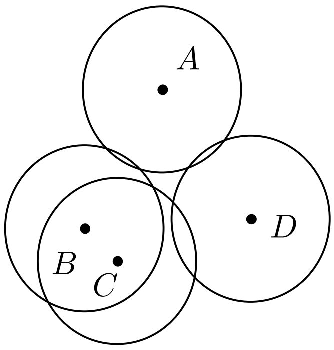
On notera que l'application $F : M \mapsto \sup_{i\in\{1,\dots,n\}} MB_i$ est une application strictement convexe du plan dans $\mathbb{R}^+$, infinie lorsque M part à l'infini, donc F possède un minimum unique, cf. annexe.

Zone de recouvrements de disques pour le centre de secours

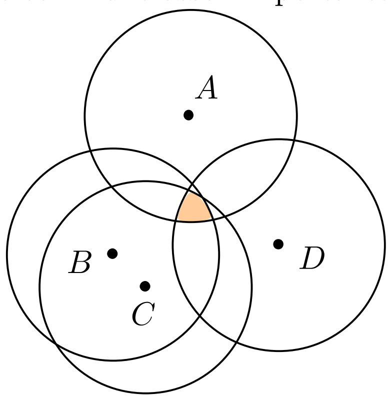
Introduction

Un enfant utilise des disques en plastique transparent posés sur la table. On lui suggère que chaque disque peut représenter la zone d'intervention de l'hélicoptère à partir de chacun des villages - ou encore un temps retour équivalent à partir de chacun des villages.

Il commence par choisir les petits disques et place le centre de chacun d'eux sur chaque village, il constate qu'il n'y a pas de zone commune à tous les quatre. Il remplace les petits disques par d'autres plus grands, ils n'ont toujours pas de zone commune. Il utilise enfin les grands disques, qui montrent une zone commune assez importante.



Pas de zone commune



Il y a une zone commune

“ Alors avec quatre disques de rayons compris entre 7,3 cm et 5,5 cm, serait-il possible de trouver une zone commune réduite à un point ? lui est-il demandé.

- Oui, et c'est là que l'on construit le centre de secours, répond l'un des enfants. ”

Définition de ces zones centrales Z_r et des frontières C_r

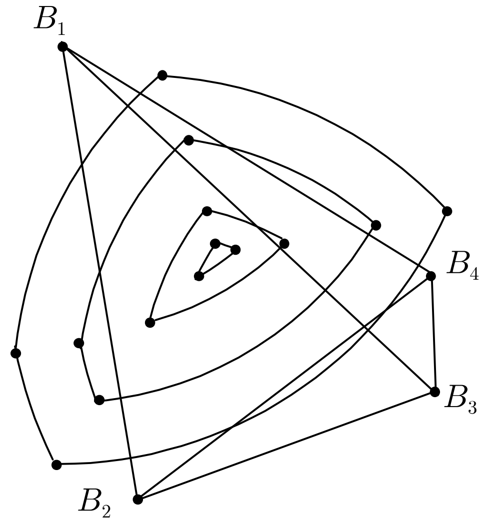
Partant d'un rayon r donné, on peut construire n disques (fermés) de rayon r, de centres respectifs les n points B_1, B_2, ,..., B_n du nuage. L'intersection de ces n disques peut être :

- Soit une région vide.
  Par exemple si $r < \frac{1}{2}d_{\max}$ où $d_{\max} = \max\limits_{(i,j)\in\{1,...,n\}^2} A_iA_j$ est le “diamètre” du nuage, dans ces cas les deux cercles dont les centres sont les points les plus éloignés ne se rencontrent pas.
- Soit une région non vide, notée désormais Z_r, intersection de plusieurs disques de même rayon r.
  Z_r est non vide lorsque $r > d_{\max}$ par exemple, puisque chacun des n disques contient dans ce cas tous les points du nuage.

On remarquera que :

1. Si Z_r est non vide, alors Z_r est une intersection de n disques fermés, donc Z_r est un fermé convexe : tout segment ouvert joignant deux points de Z_r est entièrement inclus dans Z_r puisque qu'il est contenu dans chacun des n disques de centres B_i de rayon r.

2. La frontière de Z_r est une courbe C_r réunion de k arcs de cercles, k étant compris entre 2 et n - sauf si Z_r est réduit à un seul point... cas essentiel qu'on abordera un peu plus tard.
3. Si r et s sont deux réels positifs tels que $r < s$, et si Z_r est non vide, alors la zone Z_r est incluse strictement dans la zone Z_s qui est aussi non vide, cela résulte des inclusions strictes des n disques de rayon r dans les n disques de rayon s. Inversement si Z_s est vide, alors Z_r est vide.



Construction d'une zone Z_r passant par un point M donné

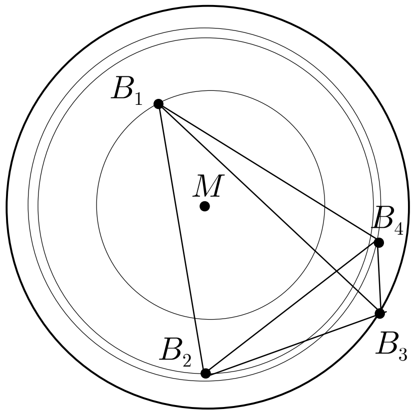
Un point M étant donné, on construit facilement les cercles de centres M passant par les différents points B_1, B_2, B_3, B_4, ..., et on peut repérer celui qui possède le plus grand rayon r : ce rayon r est le maximum des distances : $r = F(M) = \max\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} MB_i$.

Puis on construit les disques de centres B_1, B_2, B_3, B_4... de rayon r : ils contiennent tous le point M, qui appartient donc à la zone Z_r et comme M est sur l'un des cercles, M est sur la frontière C_r de la zone Z_r.

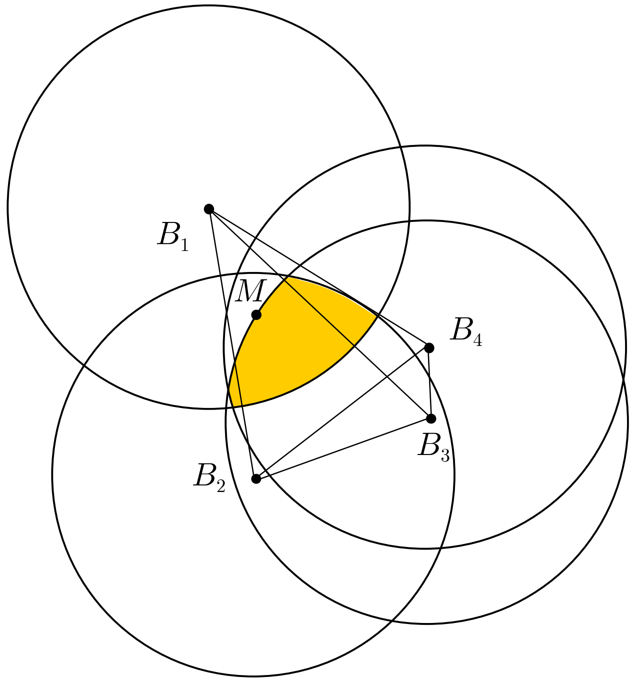
(*voir dessins page suivante).*

A présent, connaissant cette zone Z_r dont la frontière contient M, on peut construire une autre zone strictement incluse dans Z_r en choisissant un point N à l'intérieur de Z_r, en déterminant $s = F(N)$ (grâce aux courbes de niveau, on sait que $F(N) < F(M)$) et en construisant Z_s à partir de ce point N, comme on a construit Z_r à partir du point M.

En définitive, ces courbes C_r correspondent aux lignes de niveau d'une fonction F : $M \mapsto \max\limits_{i \in \{1,\ldots,n\}} MB_i$. Chacune des lignes de niveau C_r est la frontière d'une zone convexe Z_r, qui contient toutes les lignes de niveau C_s pour les valeurs de s inférieures ou égales à r.



Recherche de $F(M) = r$



La ligne de niveau qui passe par M

Recherche d'une plus petite zone Z_{r_0}

Il y a des valeurs de r pour lesquelles Z_r peut être vide ou non vide : on définit une borne

$$r_0 = \inf\{r \in \mathbb{R}^{+*} / \ Z_r \text{ est non vide}\},$$

r_0 est aussi la borne inférieure de la fonction $F : M \mapsto \max\limits_{i \in \{1,\dots,n\}} MB_i$.

On sait que lorsque r croît, la zone Z_r croît (pour la relation d'inclusion), donc pour $r > r_0$, Z_r est non vide, et pour $r < r_0$, Z_r est vide.

Les cours de topologie permettent d'affirmer que l'intersection $\bigcap\limits_{r > r_0} Z_r$ d'une suite décroissante de compacts non vides est non vide.

Soit $J \in \bigcap\limits_{r > r_0} Z_r$:

- On a à la fois $\forall r \geq r_0$, $J \in Z_r$ donc $\forall r \geq r_0$, $F(J) \leq r$, donc $F(J) \leq r_0$.
- En même temps on ne peut pas avoir $F(J) = s < r_0$, sinon J appartiendrait à une zone Z_s telle $s < r_0$ ce qui serait contraire à la définition de r_0.
- Et en définitive, $J \in Z_{r_0}$.
- Enfin la zone Z_{r_0} est réduite à un seul point : si M_1 et M_2 sont deux points distincts de la frontière de Z_{r_0}, et si N est un point du segment $]M_1M_2[$, alors N est à l'intérieur de tous les disques ouverts de centre B_i de rayon r_0 : pour tout indice i, la distance NB_i est strictement inférieure à r_0, donc $F(N) < r_0$.
  Cela contredit la définition de r_0.

En inversant les rôles, on remarquera que le disque de centre J, de rayon r_0 contient tous les points du nuage, puisque $F(J) = \max\limits_{i \in \{1,\dots,n\}} MB_i = r_0$.

Le maximum $F(J) = \max_{i \in \{1,...,n\}} MB_i = r_0$ est atteint au moins une fois : il y a au moins un point B_i du nuage qui appartient au cercle de centre J de rayon r_0.

Ce maximum est même atteint au moins deux fois, le point J est à la frontière de deux disques au moins parmi les n disques de centre $B_1, ..., B_n$ de rayon r.

En effet, si on note B_h un point qui est à la distance r_0 de J et si on supposait que les autres points du nuage étaient à une distance de J strictement inférieure à r_0, alors, en posant $\max_{i \in \{1,...,n\} - \{h\}} B_i = r'_0$, on pourrait construire un disque D_ε de centre J de rayon $\varepsilon = r_0 - r'_0$ qui serait inclus dans tous les disques D_i de centres B_i autres que B_h de rayon r_0. La zone Z_{r_0} contiendrait le disque D_ε de centre J. Comme J appartient au disque D_h, la zone Z_{r_0} contiendrait donc l'intersection de D_h et D_ε, elle ne serait pas réduite à un point.

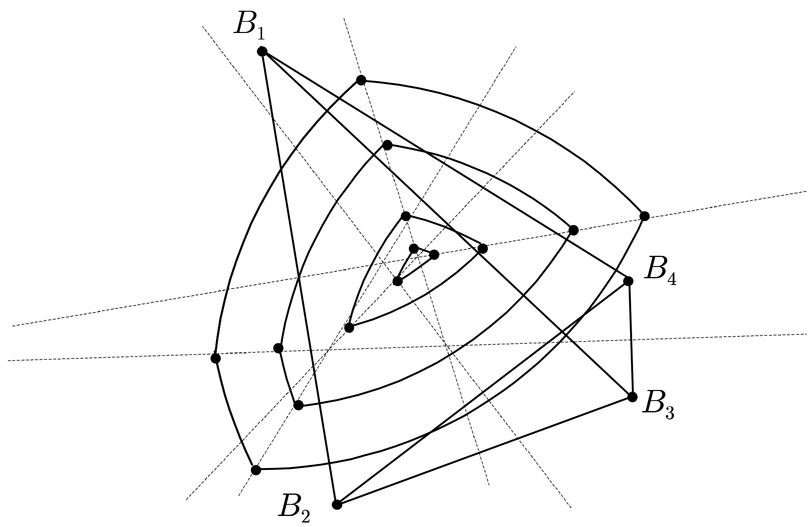
En conclusion, la stratégie qui consiste à chercher cette zone centrale en construisant une suite "décroissante" de zones centrales, permet assez bien de s'approcher de ce fameux centre - en urbanisme, on se contentera de regarder dans une petite zone Z_r la meilleure solution.

Mais les arguments pour justifier le fait que "la plus petite zone Z_r" est une zone Z_{r_0} réduite à un point, ne sont pas simples au niveau lycée.

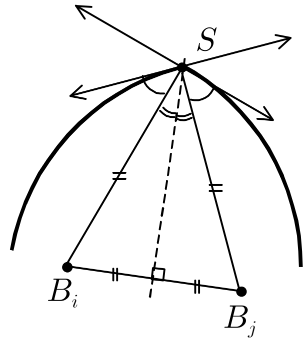
Une caractérisation de cette zone Z_{r_0}

La frontière C_r de la zone Z_r est une suite de k arcs de cercles (de même rayon r), de centre respectifs $B_{i_1}, ..., B_{i_k}$. On propose tout d'abord quelques remarques sur ces différents arcs de cercles qui constituent les courbes C_r et les points de jonction entre ces arcs de cercles - qu'on peut appeler sommets de la courbe C_r.

Avec un dessin, on peut remarquer assez vite que certains de ces sommets sont alignés.



Cet alignement a une explication assez simple : chacun de ces points d'intersection est à la même distance r de deux points B_i et B_j du nuage $B_1, ..., B_n$ donc chacun des points d'intersection appartient à la médiatrice de l'un des segments $[B_iB_j]$. On précise même que ces médiatrices sont des "bissectrices" des angles des tangentes aux arcs de courbes, voir le schéma d'un sommet S, intersection de deux arcs de courbes de même rayon r.



Sommet, centres, tangentes, bissectrice

Lorsque r se rapproche de la valeur r_0, on a toujours une courbe C_r, avec ses différents sommets et les médiatrices associées à ces sommets.

- Toute zone Z_r possède au moins deux sommets (si $r > r_0$).
- Tout sommet est associé à une médiatrice, donc, pour $r > r_0$, toute zone Z_r est traversée par au moins une médiatrice.

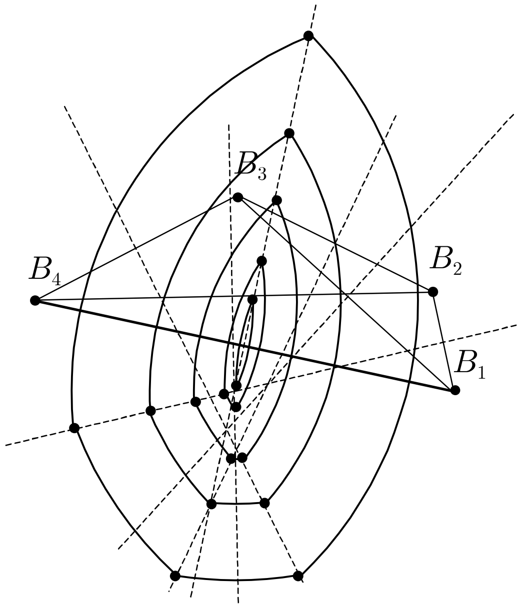
Il ne reste plus qu'à étudier les médiatrices qui traversent toutes les zones Z_r non vides.

On peut démontrer qu'il y a forcément au moins une médiatrice qui traversent toutes les zones Z_r.

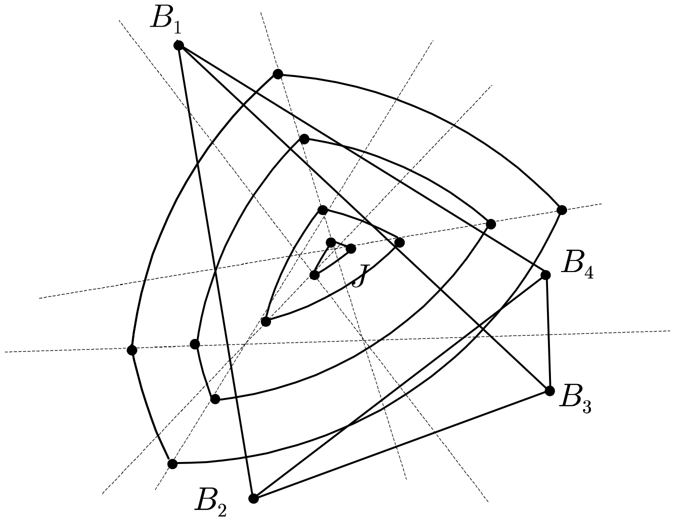
- Soit une médiatrice Δ du segment $[B_iB_j]$ ne rencontre pas toutes les zones. Elle ne rencontre pas l'une d'elles, notée Z_t, pour une valeur de t donnée, $t > r_0$. La zone Z_t est incluse toute entière dans un demi-plan ouvert limité par cette médiatrice Δ. Il en est de même pour toutes les zones Z_r plus petites, la médiatrice Δ ne rencontrera plus aucune zone Z_r telle que $r_0 < r < t$.
- Sinon on sait qu'il existe pour toute valeur de r, au moins une médiatrice qui rencontre la zone Z_r : après avoir enlevé toutes les médiatrices $\Delta_1, ..., \Delta_k$ du type précédent, (elles sont en nombre fini), et qui ne rencontrent pas les zone $Z_{t_1}, ..., Z_{t_k}$ non vides, il reste une médiatrice Δ' d'un segment $[B_iB_j]$ au moins, qui rencontre des zones Z_r plus petites, avec une valeur de r telle $r_0 < r < \inf(t_1, ...t_k)$. Cette médiatrice Δ' n'est pas du type précédent, cela signifie qu'elle rencontre toutes les zones Z_r.

Les médiatrices qui rencontrent toutes ces zones Z_r, rencontrent $\bigcap\limits_{r>r_0} Z_r = \{J\}$, donc contiennent le point J... et s'il y en a plusieurs distinctes, alors le point J est le point d'intersection de ces médiatrices.

Analyse de deux exemples



Situation n°1



Situation n°2

- Dans la première situation, lorsque r diminue, il n'y a plus qu'une "médiatrice" parmi les 6 médiatrices possibles, qui rencontre les zones Z_r. Puisque par chaque sommet de la zone Z_r passe au moins une médiatrice, la médiatrice unique qui reste joint les deux sommets de la zone Z_r et cette zone est constituée de deux arcs de cercle de même rayon.

Les deux sommets et les deux centres B_1 et B_4 des arcs de cercles forment un losange variable en fonction de r (lorsque r est proche de r_0)- ce sont les sommets d'un quadrilatère dont les côtés mesurent r. Le centre du losange reste à l'intérieur de toutes les zones Z_r et constituera en définitive à lui seul la zone Z_{r_0}.

On remarquera que le cercle de centre J de rayon r_0 est un cercle de diamètre $[B_1B_4]$. Les points B_2 et B_3 ne jouent plus aucun rôle à partir d'un certain moment (il n'y a plus d'arc de cercle de centre B_2 ou B_3 dans la frontière C_r de la zone Z_r lorsque r est proche de r_0), ils sont trop "proches" de la zone centrale.

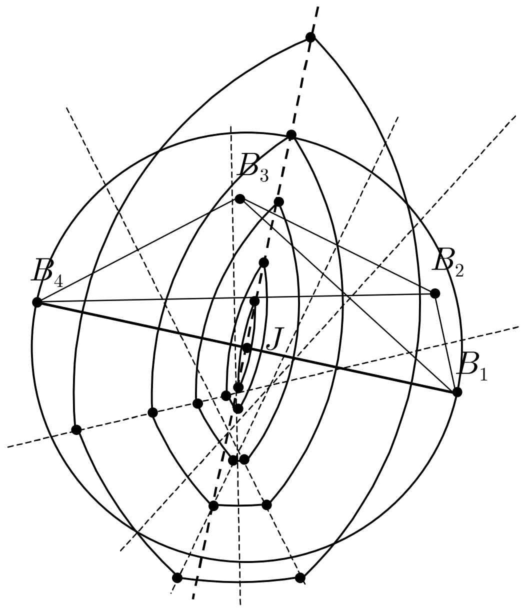
- Dans la deuxième situation, lorsque r est grand, les zones Z_r sont constituées d'abord de quatre arcs de cercle de centres respectifs B_1, B_2, B_3 et B_4, ces quatre arcs de cercles forment un quadrilatère curviligne dont les sommets sont chacun sur une médiatrice du quadrilatère $B_1B_2B_3B_4$. Lorsque r diminue, il y a un passage à trois sommets, au moment où les médiatrices de $[B_1B_4]$, et $[B_4B_3]$ qui contenaient des sommets, se rencontrent, elles sont remplacées ensuite par la médiatrice de $[B_1B_3]$..., le passage se fait aussi en passant par le centre du cercle circonscrit au triangle $B_1B_3B_4$.

Le point B_4 ne joue plus aucun rôle par la suite, lorsque r diminue, toutes les zones Z_r sont "au-dessus" de la médiatrice Δ de $[B_3B_4]$: tous les points du demi-plan situé au-dessus de Δ et dans le disque de centre B_3 de rayon r sont forcément dans le disque de centre B_4 de rayon r.

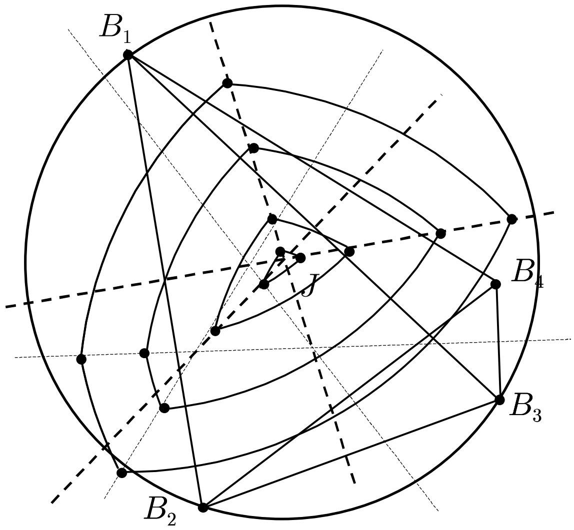
Sinon il semblerait que toutes les autres petites zones Z_r aient trois sommets et que du coup, les médiatrices associées, celles du triangle $B_1B_2B_3$, rencontrent toutes les zones

Z_r, (au moins celles qui sont visibles à l'oeil nu, et si l'on avait choisi un triangle "presque rectangle" les dessins auraient été moins évidents...). Elles se rencontreraient en un point unique J, qui constitue à lui seul la zone Z_{r_0}. J serait équidistant des trois points B_1, B_2, B_3, ce serait le centre du cercle de rayon r_0 circonscrit au triangle $B_1B_2B_3$.

La preuve de cette suite logique d'implications peut se faire par l'absurde : si ce n'était pas le cas, si l'une des zones Z_r n'avait pas trois sommets, donc si l'une des trois médiatrices (qui sont concourantes) ne passait pas J, une deuxième ne passerait pas non plus par J, et on serait dans une situation du type de la première situation : J serait au milieu de l'un des segments $[B_1B_2]$, $[B_2B_3]$, ou $[B_3B_1]$, que faut-il en penser ?



Situation n°1



Situation n°2

Ces deux types de situation ont été déjà abordés avec plus de précision, dans le paragraphe précédent, où l'on a démontré de façon différente mais certainement plus explicite que le centre était soit un milieu d'un segment, soit le centre d'un cercle circonscrit.

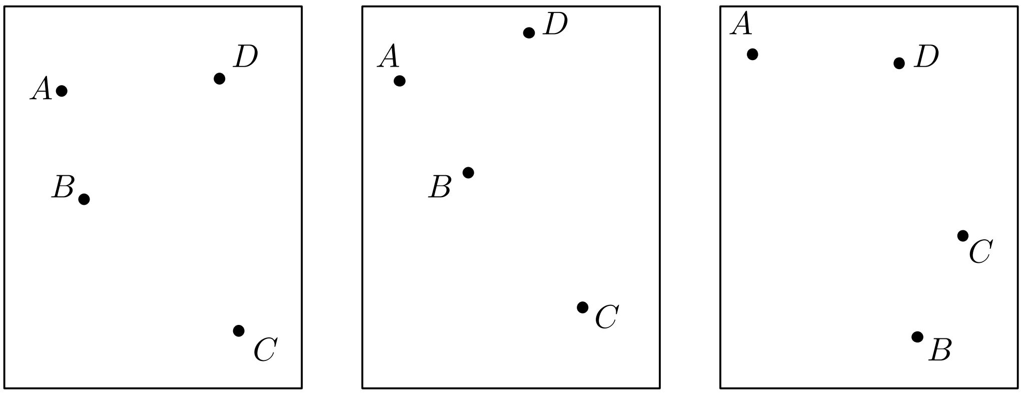
AUTRES CENTRES EN PLAINE

Cas de la laiterie

"On veut construire une laiterie chargée de collecter le lait de la vallée et de fabriquer les fromages : le camion de transport du lait devra faire chaque jour un aller-retour entre chacun des villages et la laiterie, et l'emplacement idéal de la laiterie correspondrait à un nombre de kilomètres minimum pour le camion."

Une fois l'implantation de la laiterie choisie, on construira les pistes nécessaires pour que le camion puisse effectivement faire les déplacements, dans les meilleures conditions.

On vous propose trois configurations pour les 4 villages... *(qui ne sont pas exhaustives, il y a d'autres configurations possibles, mais celles-ci présentent déjà des éléments de discussion).*



Solution

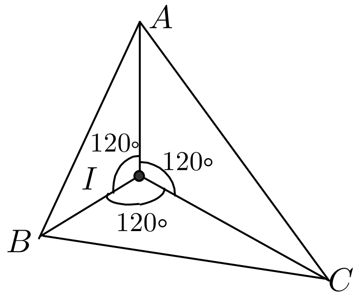
La recherche d'un minimum d'une somme de distances $PB_1 + PB_2 + ... + PB_n$ est un exercice délicat en dimension supérieure à 1. Cela dépasse les programmes de lycée.

La fonction $\Phi \ : \ P \mapsto PB_1 + PB_2 + ... + PB_n$ est différentiable - sauf aux points $B_1, B_2, ..., B_n$- et son minimum (qui existe forcément) est soit l'un des points $B_1, B_2, ...,$ ou B_n, soit un point critique qui annule la différentielle $\overrightarrow{\Phi'(P)} = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\left\|\overrightarrow{PB_i}\right\|}\overrightarrow{PB_i}$.

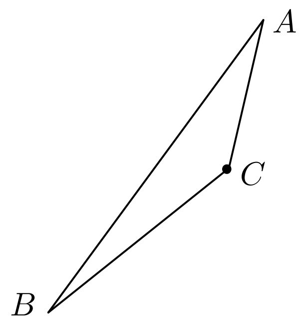
(Cette différentielle est une somme de n vecteurs unitaires).

Par exemple dans le cas d'un triangle ABC, le point critique P s'il existe, est le point de "Toricelli", tel que la somme des vecteurs unitaires issus de P, orientés respectivement vers A, B et C, soit nulle... ce qui implique que les trois angles $\widehat{APB}$, $\widehat{BPC}$, $\widehat{CPA}$ ont pour mesure 120°, et permet de construire ce point.

Ce point critique n'existe que si les trois angles du triangle sont inférieurs à 120°, sinon le minimum est l'un des trois points (comme dans le cas où les trois points sont alignés), voir figures de la page suivante.

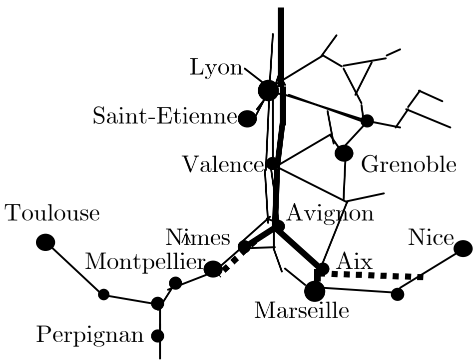


Centre I de Torricelli du triangle



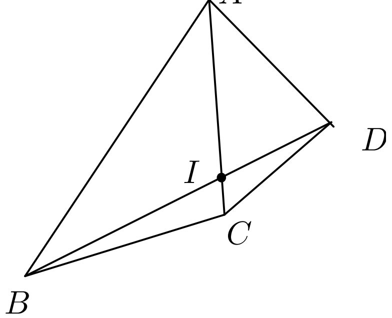
Pas de centre de Toricelli ici

Remarque : ces dispositions correspondent de façon très concrète aux tracés de voies de communication qui doivent relier entre elles trois agglomérations : voir par exemple le tracé du T.G.V. sud-est et le carrefour situé en Avignon entre Lyon, Marseille et Montpellier, ou le carrefour situé à Beaune pour le tracé de l'Autoroute "Paris-Rhin-Rhône" (avant la liaison sur Dijon)...

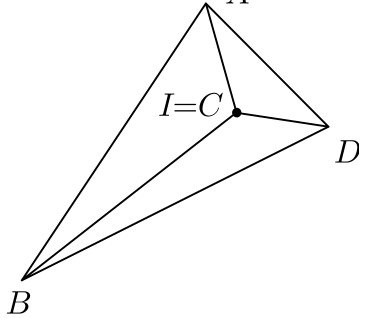


Pour un quadrilatère convexe $ABCD$, la solution est le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$: pour une fois on a une démonstration aisée, un point quelconque M de $[AC]$ minimise la somme $MA + MC$, un point M de $[BD]$ minimise $MB + MD$, donc le point I d'intersection de $[AC]$ et $[BD]$ minimise $MA + MB + MC + MD$!

Pour un quadrilatère non convexe, c'est le point critique I qui est à l'intérieur du triangle formé par les trois autres sommets.



Quadrilatère convexe



Quadrilatère non convexe

Le centre culturel

La méthode vue dans le cas de la vallée alpine ou en dimension 1, qui consistait à choisir comme centre une moyenne arithmétique ou un barycentre, s'étend pour une fois sans aucune difficulté à une dimension supérieure.

Un point C de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$, $\overline{x}$ et $\overline{y}$ étant les moyennes arithmétiques des séries des abscisses $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ou des ordonnées $(y_1, y_2, ..., y_n)$ sera cette fois-ci un point moyen, isobarycentre des points $B_1, B_2, ..., B_n$ de coordonnées $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$. C est aussi le point qui rend minimale la somme des carrés $\sum\limits_{h=1}^{n} PB_h^2$.

Cette question est suffisamment connue pour qu'on n'en raconte pas plus.

LIENS AVEC LA RECHERCHE ACTUELLE EN GÉOMÉTRIE

-

Le centre de secours comme paradigme

Les méthodes classiques de recherche d'un minimum

Une des manières classiques de trouver le minimum d'une fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, est de rechercher les points où la dérivée s'annule et de ne retenir, parmi ces points, que ceux où la dérivée seconde (à supposer qu'elle existe) est positive ou nulle.

Appliquons cette méthode à la recherche du minimum de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x$ sur l'intervalle $[-10, 10]$. Le seul point où f' est nul et f'' positif ou nul est le point $x_0 = 1$; cependant ce point est loin d'être le minimum recherché, puisque $f(-10)$ est très inférieur à $f(-1)$.

Une méthode plus adaptée, quand il s'agit de rechercher le minimum "**absolu**" d'une fonction, est de déterminer l'ensemble S des solutions de l'équation $f'(x) = 0$ (appelées "**points critiques**" de f) puis de comparer les valeurs prises par f en ces points critiques, et de retenir, parmi les points critiques, celui (ou ceux) qui correspond(ent) à la plus petite valeur de f.

Cet algorithme ne marche pas sur l'exemple précédent (où $f(x) = x^3 - 3x$), puisque l'ensemble des points critiques de f est $\{-1, 1\}$ et que le minimum de f sur $[-10, 10]$ est atteint en un point **non critique** (i.e. en $x_0 = -10$).

En fait, pour une application f d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, cet algorithme ne fonctionne que si on s'est assuré au préalable que le minimum de f est **atteint** en un point (noté x_0) et que x_0 est un point **intérieur** à l'intervalle I (ces deux conditions, ajoutées au fait que f est dérivable sur l'intérieur de I, assurent que le minimum de f est atteint en un des points critiques). Le problème est donc de trouver une condition suffisante pour que ces trois hypothèses soient vérifiées, et de pouvoir le faire a priori, sans connaître la valeur de x_0 (sinon le problème serait déjà résolu !)

Une condition suffisante pour que le minimum soit atteint en un point intérieur à l'intervalle I est que f soit continue sur I, que $f(x)$ admette une limite ℓ_g (resp. ℓ_d) lorsque x tend vers la borne de gauche (resp. de droite) de l'intervalle, et qu'il existe un point x intérieur à I tel que $f(x) \leq \min(\ell_g, \ell_d)$. Ceci est encore valable lorsque I est $\mathbb{R}$ tout entier ou lorsque ℓ_g ou ℓ_d vaut $+\infty$: par exemple, une application continue f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$ atteint son minimum en un point $x_0 \in \mathbb{R}$; si de plus f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, ce point x_0 est obligatoirement un des points critiques de f.

Le même algorithme vaut pour une application différentiable f du plan[8] dans $\mathbb{R}$, qui tend vers $+\infty$ lorsque le point X tend vers l'infini (ce qui signifie que la distance dans le plan de X à une origine donnée tend vers $+\infty$).

On compare alors les valeurs prises par f sur l'ensemble S de ses points critiques (les points où la différentielle de f s'annule) et on retient le (ou les) point(s) de S où la valeur est la plus petite.

Un point X est critique si et seulement s'il vérifie simultanément les deux équations :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X) = 0 \;,\; \frac{\partial f}{\partial y}(X) = 0 \;.$$

[8] moyennant le choix d'une origine O, un point X du plan sera identifié au vecteur $\overrightarrow{OX}$, le choix d'un repère $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ d'origine O permettra d'identifier le point X au couple (x, y) de ses coordonnées. Nous n'expliciterons plus ces identifications dans la suite.

Si on sait de plus que la fonction f est strictement convexe sur le plan (i.e. strictement convexe en restriction à chaque droite du plan), il n'y a qu'un seul point critique, qui est par conséquent le minimum absolu de la fonction f.

En exercice, on pourra retrouver par cette méthode l'existence, l'unicité et les coordonnées du point où la fonction f = "somme des carrés des distances à des points fixés $A_1, A_2, \ldots ,A_n$" atteint son minimum (pour prouver la convexité stricte de f en restriction à une droite D, on pourra introduire les projections orthogonales H_i des A_i sur la droite, puis comparer $f(X)$ avec la somme des $\left\|\overrightarrow{XH_i}\right\|^2$).

Lorsque la fonction f est convexe au sens large, tous les points critiques sont encore des minima absolus, mais l'ensemble de ces points critiques forme un convexe du plan.

Les problèmes posés par la recherche du "centre de secours"

Le problème du "centre de secours" ne relève pas de cet algorithme. En effet, la fonction (définie sur le plan) qu'il s'agit de minimiser s'écrit

$$f(X) = \max_{1 \leq i \leq n} [d(X, A_i)]$$

où $A_1,\ A_2, \ldots,\ A_n$ sont les points qui représentent les villages, et $d(X, A_i) = \left\|\overrightarrow{A_iX}\right\|$ est la distance euclidienne entre les points A_i et X.

Plus exactement, la première partie du raisonnement élaboré ci-dessus continue à fonctionner : lorsque X tend vers l'infini, toutes les distances $d(X, A_i)$ tendent vers l'infini et $f(X)$ tend vers $+\infty$.

Comme la fonction f est continue, il existe un point X_0 du plan où la fonction f atteint son minimum. **Malheureusement, la fonction f ne peut plus être différentiable au point X_0** : en effet, si f était différentiable au point X_0, X_0 serait un point critique de f et, en posant $h(t) = f\left(X_0 + t\overrightarrow{A_iX_0}\right)$, on aurait $h'(0) = 0$. Par ailleurs, pour tout $t \geq 0$, on a $h(t) \geq d\left(A_i, X_0 + t\overrightarrow{A_iX_0}\right) = (1+t)\left\|\overrightarrow{A_iX_0}\right\|$.

On choisit i de façon que $f(X_0) = \left\|\overrightarrow{A_iX_0}\right\|$, et on obtient alors : $h'_d(0) \geq \left\|\overrightarrow{A_iX_0}\right\|$, ce qui est en contradiction avec $h'(0) = 0$, puisque $f(X_0) \neq 0$ dès que les points $A_1,\ A_2, \ldots, A_n$ ne sont pas tous confondus (voir plus loin).

Le cas général et la notion de "point critique généralisé"

Bien que f ne soit pas différentiable, on aimerait pouvoir dire que X_0 est toujours à rechercher parmi l'ensemble des "points critiques de f", mais ceci nécessite de **modifier la notion de point critique** pour l'adapter au cas d'une fonction qui n'est pas partout différentiable, parce qu'elle s'écrit sous la forme $f(X) = \max_{1 \leq i \leq n} (f_i(X))$, où chaque f_i est partout différentiable sur le plan (ou, du moins, au voisinage du minimum X_0 de f)**.**

Si une telle fonction réalise son minimum en un point X_0 du plan, notons $f_{i_1},\ f_{i_2}, \ldots,$ f_{i_p} les fonctions telles que $f_{i_1}(X_0) = f_{i_2}(X_0) = \ldots = f_{i_p}(X_0) = f(X_0)$, et telles que, pour toute autre valeur j de l'indice, on ait : $f_j(X_0) < f(X_0)$.

Soit $\overrightarrow{V}$ un vecteur unitaire quelconque, pour t suffisamment petit, on a (par continuité)

$$f_j\left(X_0 + t\overrightarrow{V}\right) < f\left(X_0 + t\overrightarrow{V}\right) \text{ si } j \text{ n'appartient pas à } \{i_1, \ldots, i_p\}.$$

Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$, la différentiabilité de chaque f_i prouve l'existence d'un

$t_i(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout t dans $]0, t_i(\varepsilon)[$, on ait :

$$\frac{1}{t}\left|f_i\left(X_0 + t\overrightarrow{V}\right) - f_i(X_0) - t\overrightarrow{\nabla f_i}(X_0).\overrightarrow{V}\right| < \varepsilon$$

où $\overrightarrow{\nabla f_i}(X_0) = (\frac{\partial f_i}{\partial x}(X_0), \frac{\partial f_i}{\partial y}(X_0))$ est le vecteur gradient de f_i (exprimé dans un repère orthonormé). On en déduit donc que

$$0 \leq f(X_0 + t\overrightarrow{V}) - f(X_0) = \sup_k \left[f_{i_k}\left(X_0 + t\overrightarrow{V}\right) - f_{i_k}(X_0)\right] \leq t\left(\left[\sup_k [\overrightarrow{\nabla f_{i_k}}(X_0).\overrightarrow{V}]\right] + \varepsilon\right)$$

pour tout t dans $]0, T(\varepsilon)[$, où $T(\varepsilon) = \inf_k [t_{i_k}(\varepsilon)]$.

En faisant tendre ε vers zéro, on en déduit que $\sup_{1 \leq k \leq p}\left(\overrightarrow{\nabla f_{i_k}}(X_0).\overrightarrow{V}\right) \geq 0$.

Nous allons adopter la définition suivante des “ **points critiques généralisés** ” de la fonction f :

Soit X un point quelconque et $\{i_1, i_2, ..., i_p\}$ l'ensemble des indices i des fonctions f_i qui vérifient $f_i(X) = f(X)$. X est un point critique généralisé de f si et seulement si, pour tout vecteur unitaire $\overrightarrow{V}$, il existe un k dans $\{1, .., p\}$ tel que

- Soit $\overrightarrow{\nabla f_{i_k}}(X) = \overrightarrow{0}$.
- Soit $\overrightarrow{\nabla f_{i_k}}(X)$ fait un angle inférieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$ avec $\overrightarrow{V}$

  (de manière équivalente, X est un point critique si et seulement s'il n'existe aucun demi-plan ouvert contenant $\overrightarrow{\nabla f_{i_1}}(X), ..., \overrightarrow{\nabla f_{i_{p-1}}}(X)$ et $\overrightarrow{\nabla f_{i_p}}(X)$).

Munis de cette définition, nous pouvons affirmer que le point X_0 où la fonction f réalise son minimum est un point critique généralisé de la fonction f.

Retour au “ centre de secours ”

Dans le cas du “ centre de secours ”, on considère $f(X) = \max_{1 \leq i \leq n} (f_i(X))$,

où $f_i(X) = d(A_i, X) = \left\|\overrightarrow{A_i X}\right\|$ est différentiable sur le plan privé de A_i.

Nous avons vu que f atteint son minimum en un point X_0 et nous avons noté $A_{i_1}, ..., A_{i_p}$ les points tels que $f(X_0) = d(A_{i_1}, X_0) = ... = d(A_{i_p}, X_0)$ et tels que $d(A_j, X_0) < f(X_0)$ pour tout j n'appartenant pas à $\{i_1, ..., i_p\}$.

Remarquons que, si au moins deux des points A_i et A_j sont distincts, alors $f(X) \geq \frac{1}{2}d(A_i, A_j) > 0$ et X_0 ne coïncide avec aucun des points $A_{i_1}, ..., A_{i_p}$; donc chacune des fonctions $f_{i_1}, ..., f_{i_p}$ est différentiable au voisinage de X_0. Un calcul direct donne alors $\overrightarrow{\nabla f_{i_k}}(X_0) = \frac{1}{\left\|\overrightarrow{A_{i_k} X_0}\right\|}.\overrightarrow{A_{i_k} X_0}$, où $\overrightarrow{A_{i_k} X_0}$ est un vecteur non nul.

D'après ce qui précède, X_0 doit être un point critique au sens généralisé, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de demi-plan ouvert qui contienne les vecteurs $\overrightarrow{X_0 A_{i_1}}, ..., \overrightarrow{X_0 A_{i_p}}$.

- Il est donc impossible que $p = 1$, car un vecteur non nul est inclus dans un demi-plan ouvert.
- Si $p = 2$ (i.e. si $f(X_0)$ est réalisé par exactement deux distances $d(X_0, A_{i_1})$ et $d(X_0, A_{i_2})$) alors, pour ne pas être dans un même demi-plan ouvert, les deux vecteurs

$\overrightarrow{X_0A_{i_1}}$ et $\overrightarrow{X_0A_{i_2}}$ doivent avoir même direction et sens contraires.
Comme $\left\|\overrightarrow{A_{i_1}X_0}\right\| = \left\|\overrightarrow{A_{i_2}X_0}\right\|$, on a $\overrightarrow{A_{i_1}X_0} = -\overrightarrow{A_{i_2}X_0}$ et nous retrouvons le cas où X_0 est le milieu du segment $[A_{i_1}, A_{i_2}]$, cas que nous avons rencontré dans l'étude du centre de secours faite ci-dessus.

- Si $p = 3$ (i.e. si $f(X_0)$ est réalisé par exactement trois distances $d(X_0, A_{i_1})$, $d(X_0, A_{i_2})$ et $d(X_0, A_{i_3})$, les autres distances $d(X_0, A_j)$ étant plus petites) l'égalité des trois distances implique que X_0 doit être le centre du cercle circonscrit au triangle $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$. Cependant, comme X_0 doit aussi être un point critique généralisé, il faut que les vecteurs $\overrightarrow{X_0A_{i_1}}$, $\overrightarrow{X_0A_{i_2}}$ et $\overrightarrow{X_0A_{i_3}}$ ne soient pas dans un même demi-plan ouvert, ce qui impose que X_0 doit être à l'intérieur (ou sur le bord) du triangle $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$.
  Attention ! tous les centres de cercles circonscrits correspondant à des triangles aux angles aigus ne sont pas des points critiques généralisés, puisqu'il faut aussi s'assurer que les autres $d(X_0, A_j)$ sont inférieurs aux distances de X_0 à A_{i_1}, A_{i_2} et A_{i_3}.

- Si $p \geq 4$: c'est le même cas que si $p = 3$, car on se trouve dans le cas (exceptionnel) où les points $A_{i_1}, ..., A_{i_p}$ sont tous situés sur un même cercle, qui est le cercle circonscrit au triangle formé par trois d'entre eux. Si on réordonne les points $A_{i_1}, ..., A_{i_p}$ sur le cercle (quitte à échanger leurs noms) la condition de criticité de X_0 signifie que X_0 est à l'intérieur (ou sur le bord) du polygone $A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}...A_{i_p}$ (et que les distances aux autres points sont inférieures).

Points critiques de la fonction distance en géométrie riemannienne

La notion généralisée de point critique que nous avons introduite ci-dessus s'applique aussi à des fonctions du type

$$f(X) = \min(f_1(X), ..., f_n(X))$$

(on se ramène en effet au cas précédent en changeant toutes les fonctions en leurs opposées).

Cette notion a eu une énorme influence sur l'évolution récente de la géométrie et de la topologie.

La théorie de Morse (voir par exemple [Mil]) permet en effet d'induire, d'une borne sur le nombre de points critiques d'une fonction définie sur un espace (pour les spécialistes, une une variété) donné, une borne sur le nombre de formes que peut prendre la topologie d'un tel espace (grosso modo : le nombre de structures géométriques possibles, 2 structures étant considérées comme identiques s'il existe une déformation élastique[9] de l'une sur l'autre).

Or la fonction la plus naturelle qu'on puisse définir sur un espace est la fonction "distance dans l'espace à un point fixé B" (i.e. la fonction $X \mapsto d(B, X)$). Dans le cas d'un espace général , la distance $d(B, X)$ est définie comme le minimum des longueurs de toutes les courbes qui joignent B à X ; sous certaines hypothèses, on obtient donc une fonction qui se définit comme le minimum de plusieurs fonctions différentiables[10], donc du même type que celles étudiées dans cet article ; le principe de théorie de Morse évoqué ci-dessus

[9] Pour des surfaces, cette notion de "déformation élastique" correspond à la notion d'homéomorphisme. En dimension supérieure, il s'agira d'une équivalence un peu plus faible.
[10] Des exemples seront donnés par les figures des pages qui suivent.

fonctionne encore lorsqu'on remplace la notion de point critique par la notion de point critique généralisé, et permet de borner la topologie des espaces considérés : travaux de K. Grove et K. Shiohama, de J. Cheeger, de M. Gromov, de U. Abresch et D. Gromoll ... entre autres, voir [Gre] et [Che] pour un panorama des travaux sur ce sujet.

En totale cohérence avec la définition donnée ci-dessus, un point X de l'espace est dit **point critique (généralisé) de la fonction** $X \mapsto d(B, X)$, où B est un point fixé de l'espace et $d(B, X)$ est la distance (dans l'espace) de B à X si et seulement si :

1. Il y a plusieurs courbes joignant B à X qui sont " **minimisantes** ", c'est-à-dire qu'elles réalisent le plus court chemin de B à X (ces courbes sont des " droites " de la géométrie considérée).
2. Si on considère n'importe quelle courbe (dérivable) partant de X, elle fait un angle inférieur ou égal à $\frac{\pi}{2}$ avec une (au moins) des " droites " minimisantes évoquées au point précédent.

Exemple 1 *: Le billard plan rectangulaire (la même modélisation peut aussi représenter les trajets des rayons lumineux horizontaux qui se réfléchissent sur 4 miroirs verticaux formant deux à deux des angles dièdres de $\frac{\pi}{2}$).*

On recolle (ou on "coud") sur leur bord deux rectangles plats de mêmes dimensions, on obtient une surface polyédrale qui peut être vue comme l'enveloppe externe d'un coussin rectangulaire.

L'enveloppe du coussin quand on l'aplatit (ou qu'on la repasse) sur le plan — *L'enveloppe du coussin représentée en perspective*

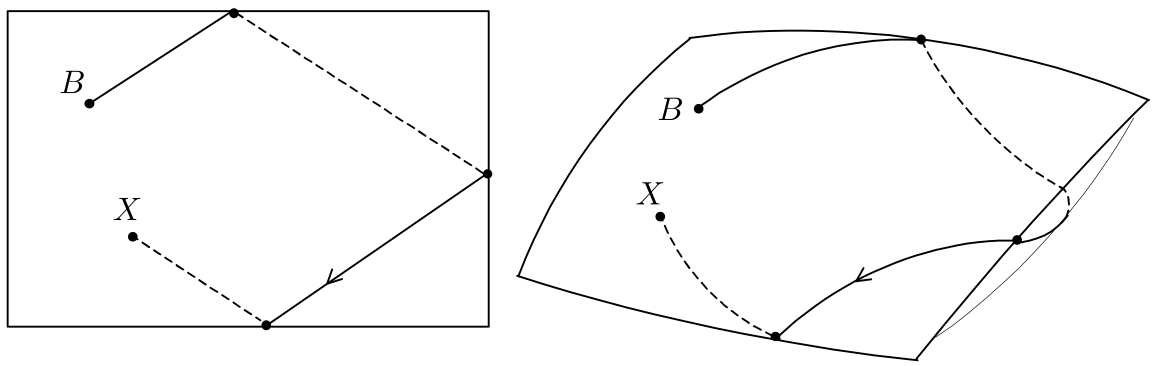
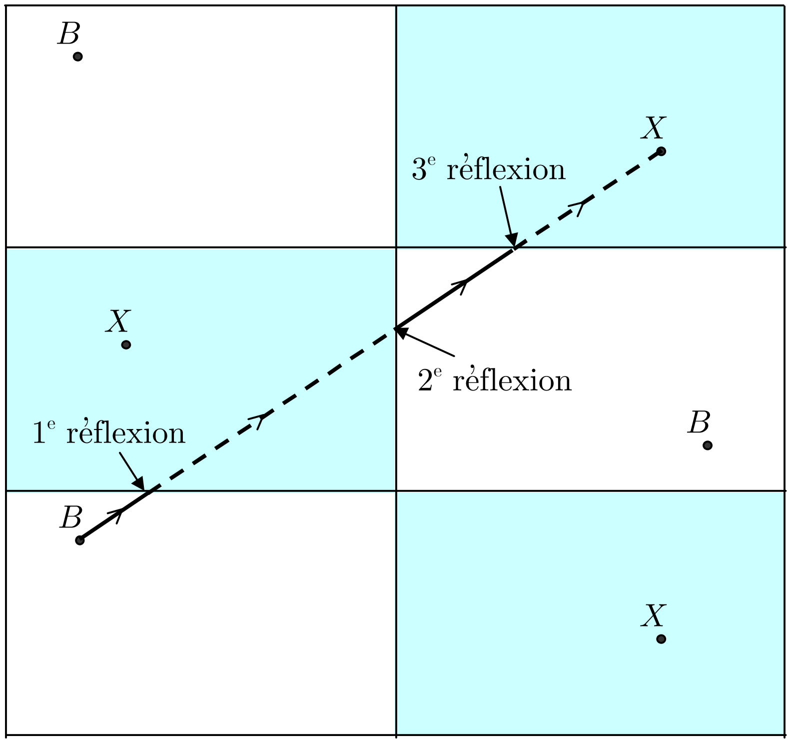


Figure A

En traits pleins : les portions du trajet situées sur la face antérieure de l'enveloppe ; en traits pointillés : les portions situées sur la face postérieure

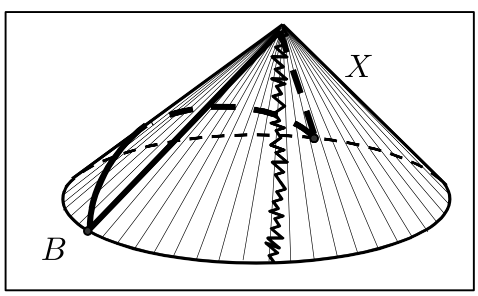
Une réflexion consiste à continuer "tout droit" sur l'enveloppe du coussin en passant à chaque réflexion sur la face opposée (c'est à dire sur l'autre exemplaire du rectangle). Si on développe cette surface sur le plan en suivant le trajet de la boule de billard (ou du rayon lumineux), l'image (en développement) d'une trajectoire est une droite du développement (cf.figure B ci dessous).

Figure B

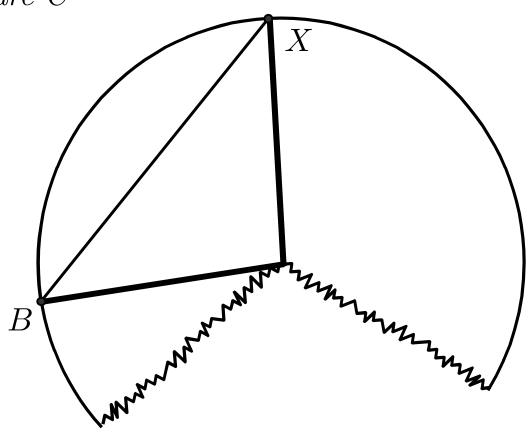


Comme nous recherchons les "droites" minimisantes qui joignent B à X, nous pouvons exclure celles qui passeraient par un des sommets de la surface polyédrale (cas où la balle frappe un des coins du rectangle) : en effet, on voit sur la figure C ci-dessous que, pour toute courbe **plane** passant par un sommet, il existe un découpage (en ligne tremblée) qui permet de la développer en une courbe avec un angle strictement inférieur à π ; par l'inégalité triangulaire, une telle courbe peut être raccourcie.

Figure C



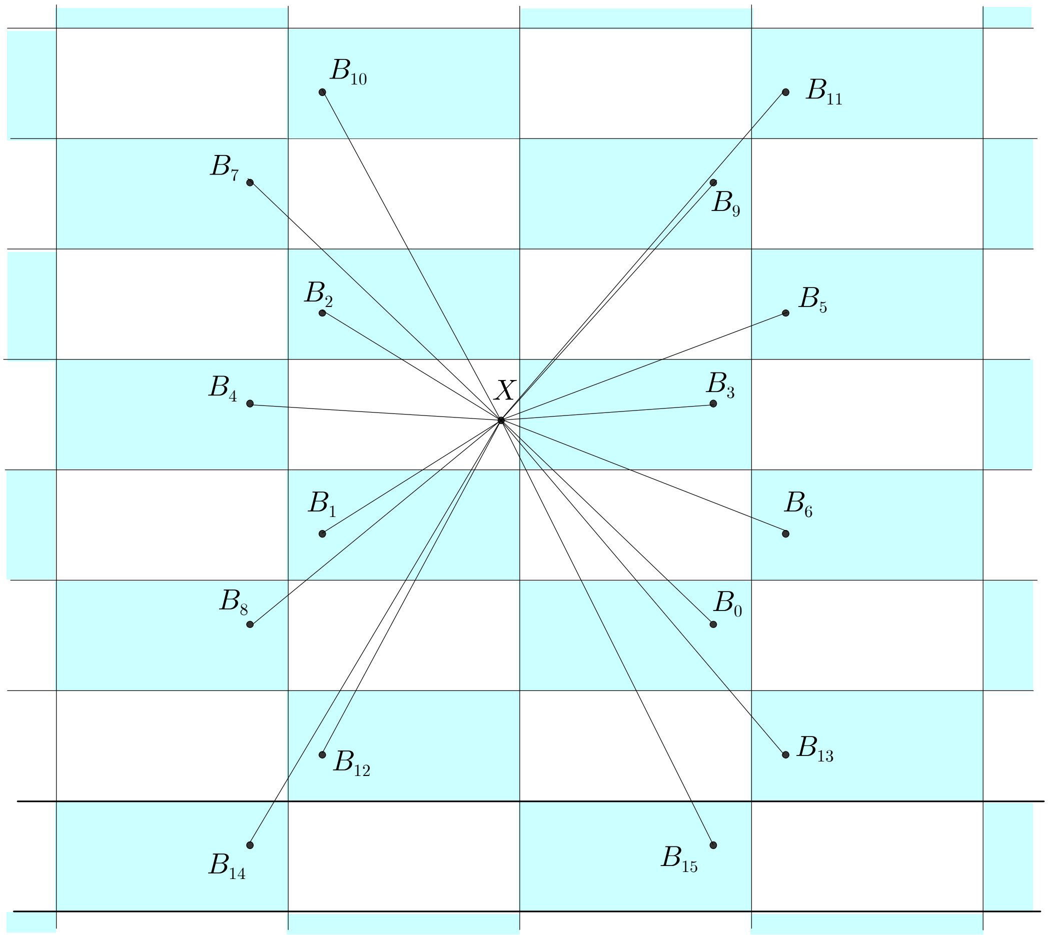
Deux lignes joignant B et X sur le cône



Les deux mêmes lignes vues en vraie grandeur sur le patron du cône.
(la courbe qui ne passe pas par le sommet est la plus courte).

On obtient sinon toutes les droites joignant B à X dans la surface, en répétant le développement à l'infini, il y en a une infinité.

Figure D



La construction de tous les représentants B_i (en développement) du même point B est un exercice sur la composition des symétries.

Chaque exemplaire B_i du même point B donne une droite joignant B à X (dans le développement d'abord, puis par repliage, dans le billard initial).

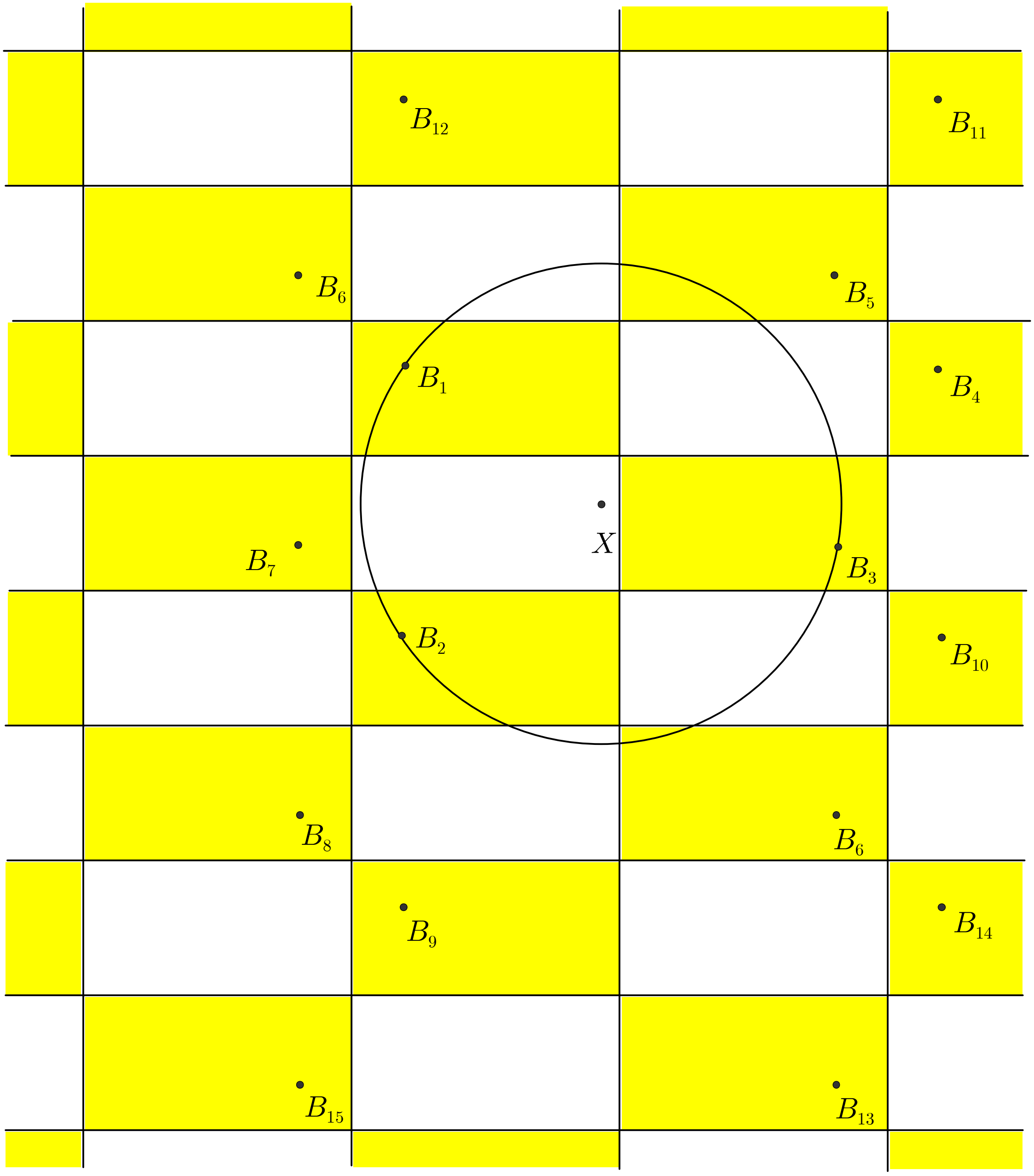
La distance de B à X dans la surface polyédrale est donc égale à $\min\limits_i \left[f_i\left(X\right)\right]$, où $f_i\left(X\right)$ représente la distance euclidienne (dans le développement) entre le point X et le représentant B_i du point B.

On ne retient en fait que les représentants B_i du point B (dans le développement) qui sont les plus proches du point X, il y en a un nombre fini : B_{i_1}, B_{i_2},..., B_{i_p}.

On dira que X est un point critique de la fonction "distance au point B" si (et seulement si) les vecteurs $\overrightarrow{XB_{i_1}}$, $\overrightarrow{XB_{i_2}}$,..., $\overrightarrow{XB_{i_p}}$ ne sont pas tous dans un même demi-plan ouvert.

Les figures D1 et D2 des pages qui suivent sont deux variantes de cette figure D, dans l'une, le point X est critique, et dans l'autre, il ne l'est pas.

Figure D1



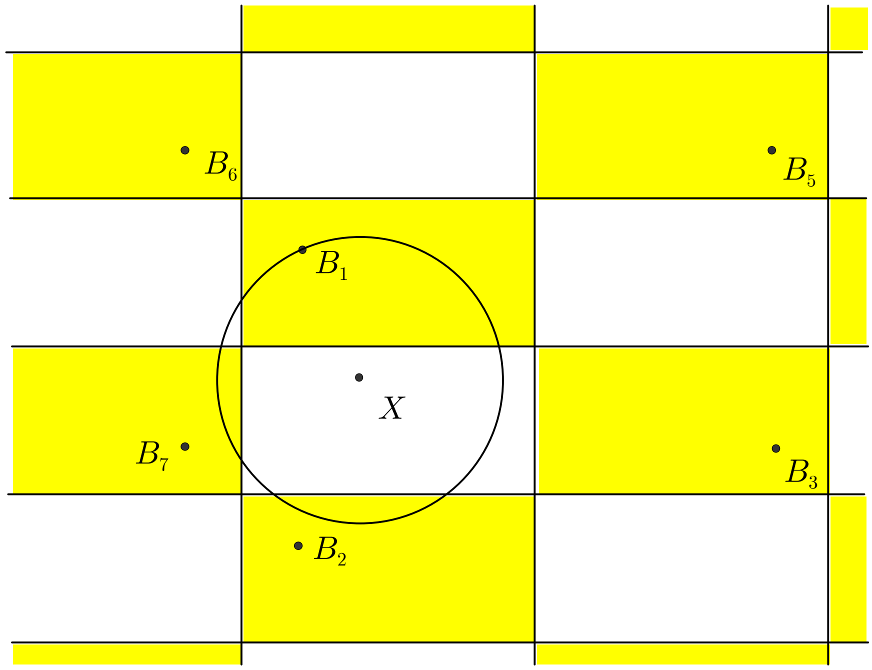
Sur la figure D1 ci-dessus, on a $\left\|\overrightarrow{XB_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{XB_2}\right\| = \left\|\overrightarrow{XB_3}\right\| = d(X, B)$, *le point* X *est le centre du cercle circonscrit au triangle* $B_1B_2B_3$.

Tous les autres points B_i *sont à une distance strictement plus grande de* X *que* B_1, B_2 *et* B_3.

Comme X *est intérieur au triangle* $B_1B_2B_3$, *les vecteurs* $\overrightarrow{XB_1}$, $\overrightarrow{XB_2}$, $\overrightarrow{XB_3}$ *ne sont pas dans un même demi-plan ouvert.*

Donc X *est un point critique de la fonction "distance au point* B*".*

Figure D2



Sur la figure D2, B_1 est le seul des points B_i, qui réalise un trajet minimisant ; X n'est donc pas enposition critique.

On remarquera que cet exemple est très similaire à celui du "centre de secours".

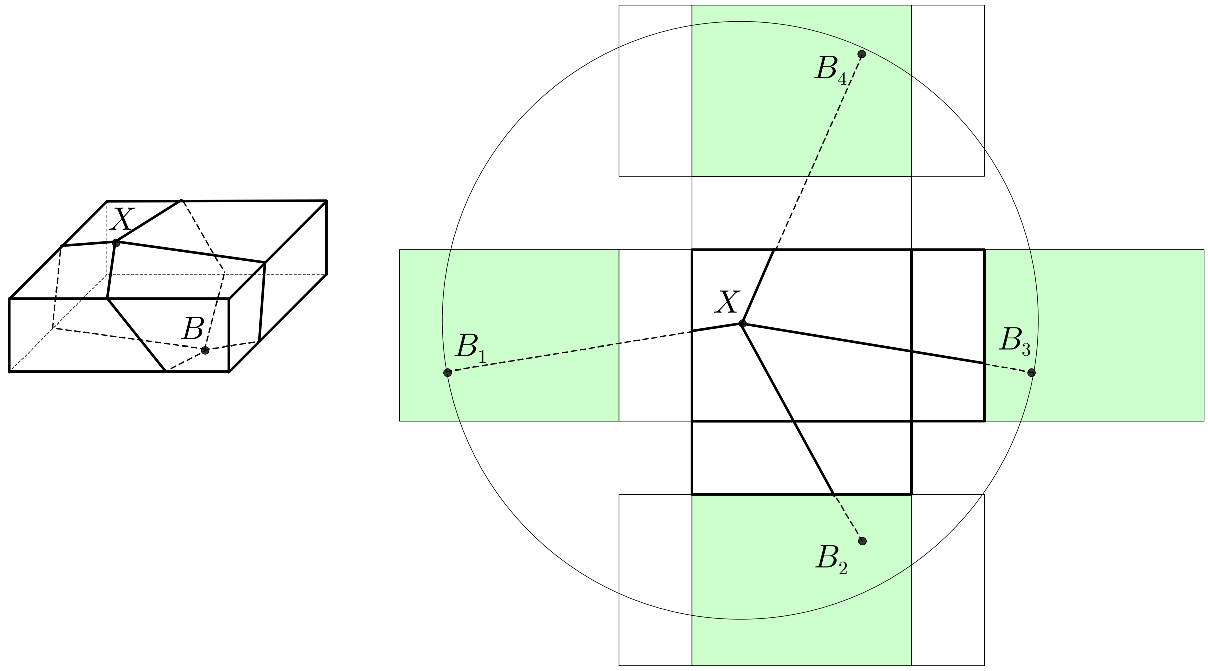
En exercice, on pourra prouver que le point X de la figure D1 est le point où la fonction $Y \longmapsto d(B, Y)$ atteint son maximum sur la surface "enveloppe du coussin".

Exemple 2 :

Le même raisonnement vaut pour la surface d'un parallélépipède rectangle ou (plus généralement) pour toute surface polyédrale : la distance (sur la surface) entre B et X est le minimum des distances euclidiennes entre X et les différentes images de B dans les développements qui suivent les droites issues de X. Il s'agit d'une fonction construite comme ci-dessus et ses points critiques (généralisés) sont caractérisés comme précédemment.

Cependant, il devient vite difficile de dessiner toutes les images B_i possibles de B, c'est pourquoi il convient d'en dessiner une assez proche de X (notée B_1), et de ne retenir que les exemplaires B_i de B qui vérifient $\left\|\overrightarrow{XB_i}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{XB_1}\right\|$, ce qui limite le nombre de développements à faire.

Figure E



On a tracé quatre itinéraires parmi "les plus courts" pour aller d'un point X au point B, à l'aide d'un développement du parallélépipède. Toujours à l'aide de ce développement, on constate d'une part qu'il n'existe pas d'autre itinéraire qui soit plus court les plus courts (les autres représentants du point B sont à l'extérieur du cercle de centre X de rayon $d\,(X, B_1)$), et on peut comparer les distances $d\,(X, B_1)$, $d\,(X, B_2)$, $d\,(X, B_3)$ et $d\,(X, B_4)$.

On remarquera que le parallélépipède redonne le billard lorsque sa hauteur tend vers zéro, et (si on dispose d'un logiciel de géométrie dynamique) que certaines images virtuelles B_i de B dans le développement tendent à s'identifier, pour donner une figure qui ressemble de plus en plus à la figure D.

Les lecteurs qui désirent faire varier la hauteur du parallélépipède, essayer d'autres représentants B_i de B et d'autres itinéraires, et vérifier que nous avons bien retenu les plus courts, pourront trouver ces figures sur le site de l'IREM de Grenoble, dont voici l'adresse : www.ac-grenoble.fr/irem/.

Bibliographie relative à ce chapitre :

[Che] J. CHEEGER, Critical points of distance functions and applications to geometry, Geometric topology : recent developpements (Montecatini Terme 1990), 1-38, Lecture Notes in Math., 1504, Springer, Berlin 1991.

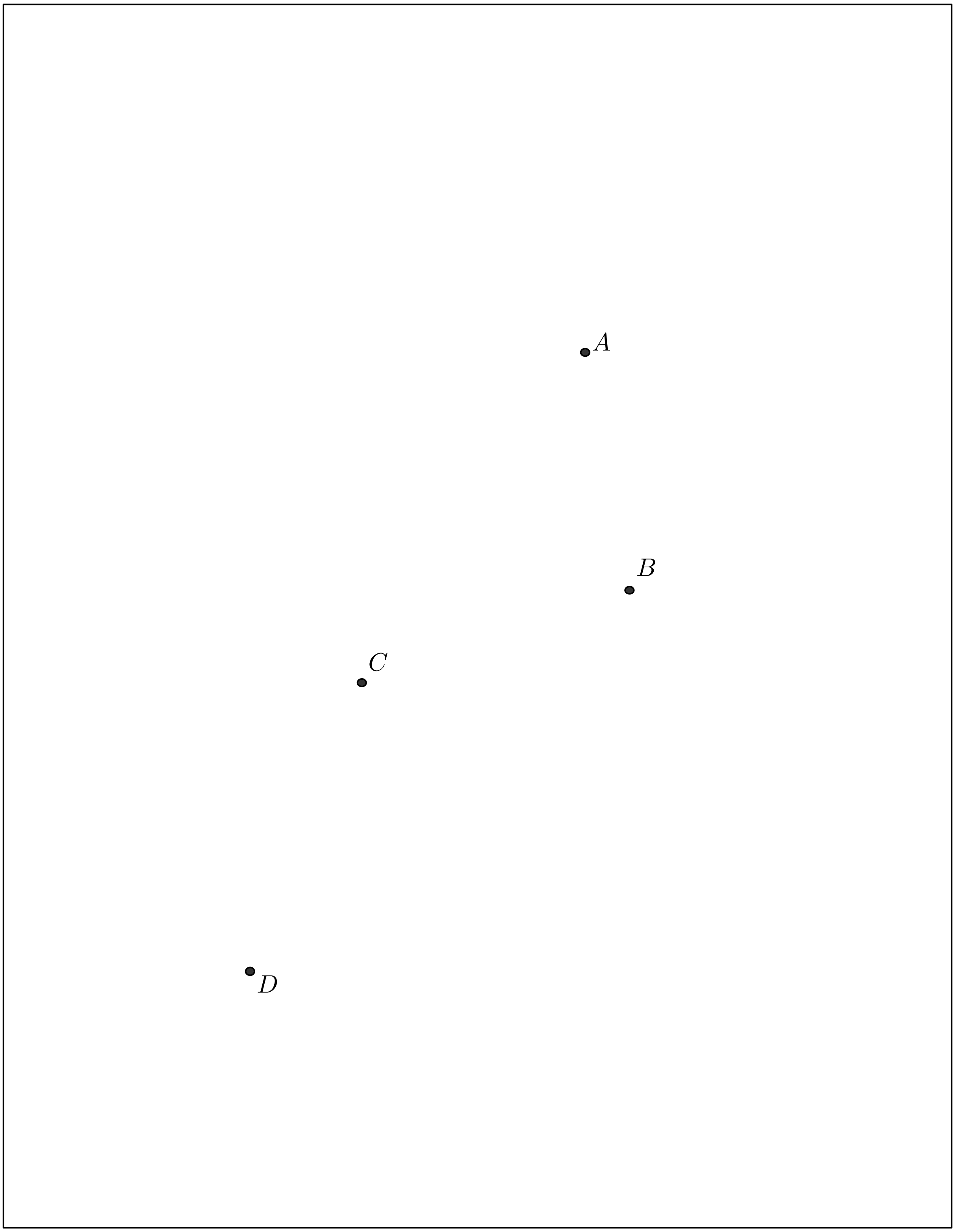
[Gre] R. GREENE, Some concepts and methods in Riemannian geometry, Amer. Mat. Soc. Proc of Symposia in Pure Math. **54** (3), 1-22 (1993).

[Mil] J. MILNOR, Morse Theory, Princeton Univ. Press, Princeton 1963.

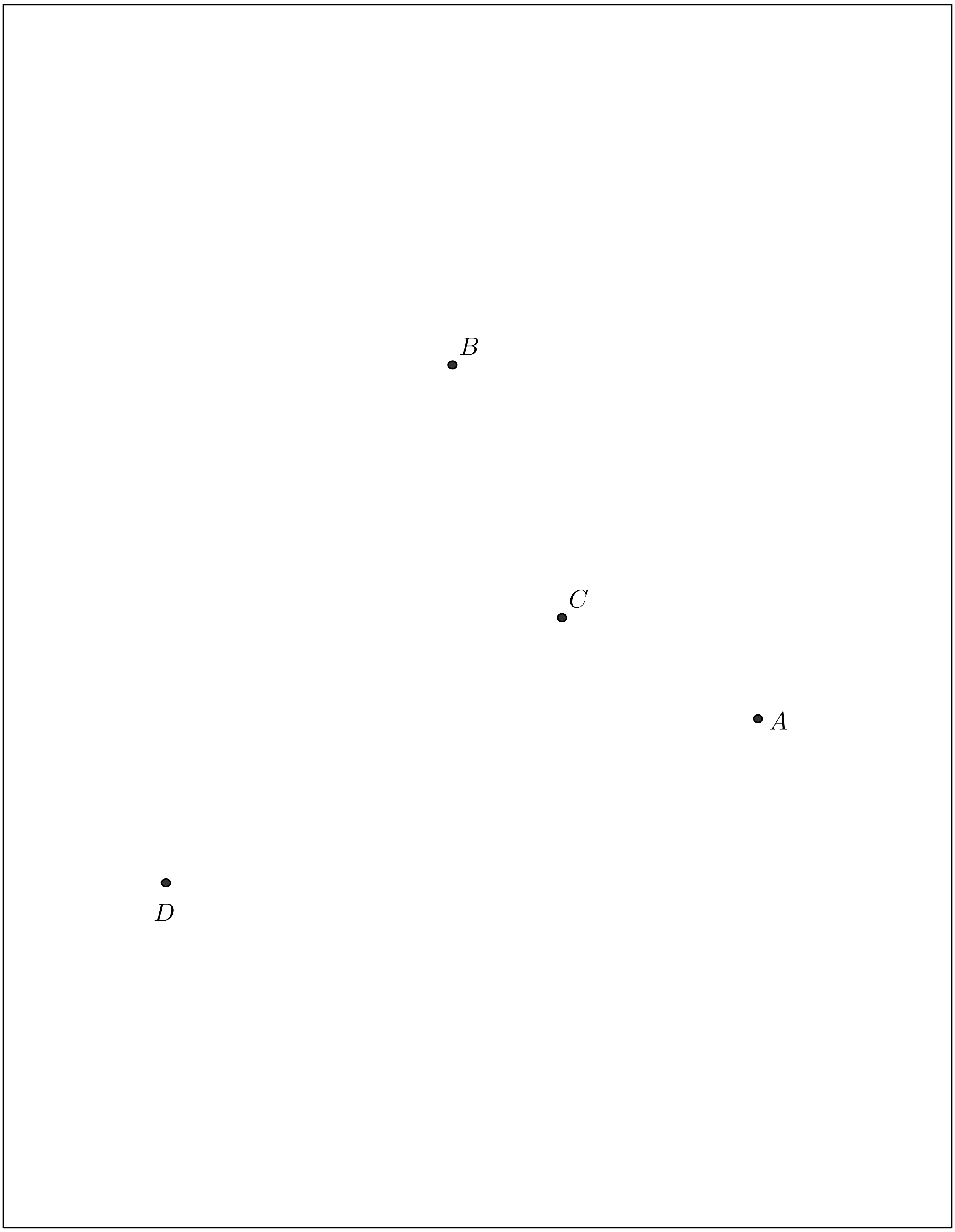
ANNEXES

-

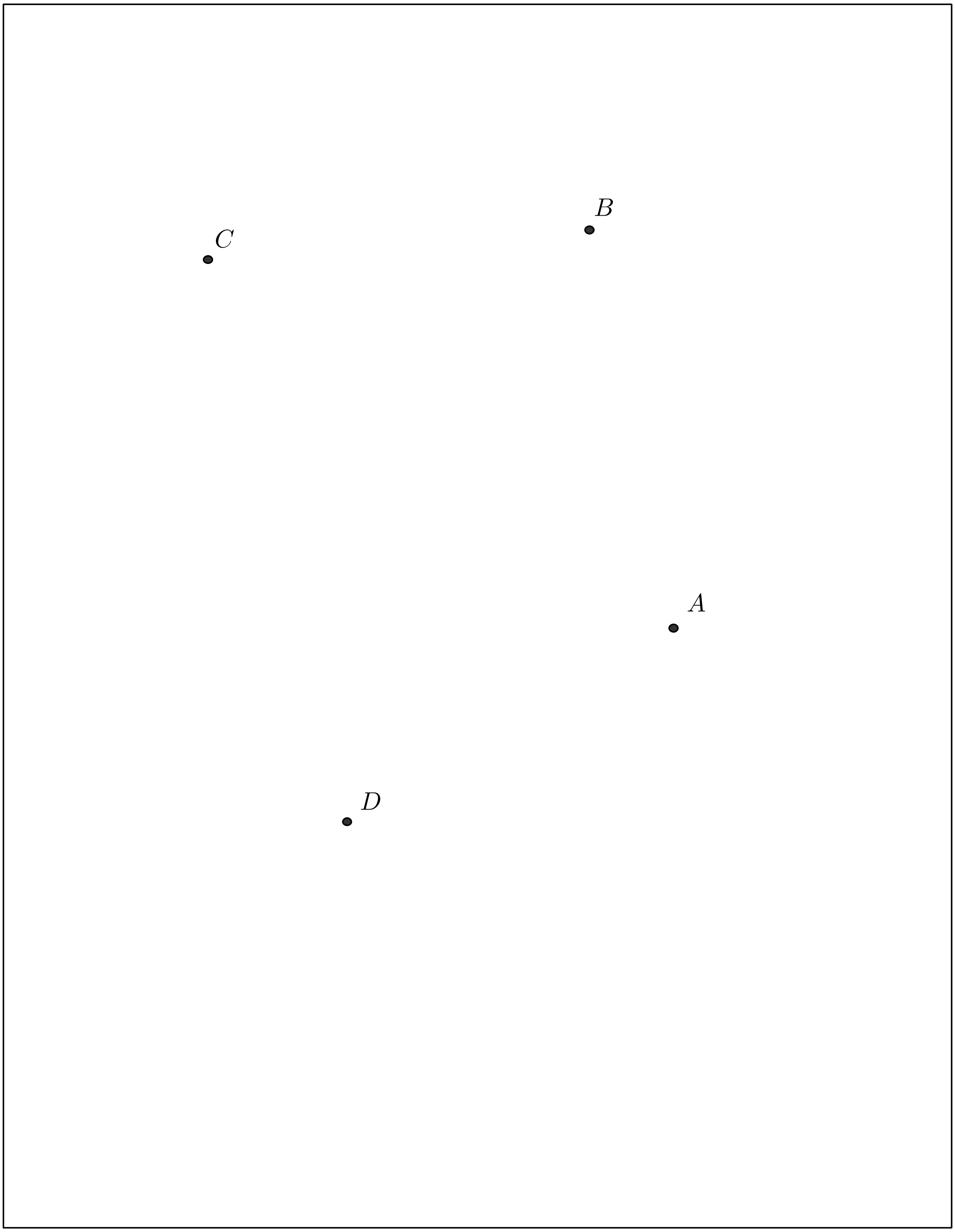
Quelques dessins : la figure n°1 de la page 13



La figure n°2 de la page 13



La figure n°3 de la page 13



Recherche d'un centre dans $\mathbb{R}^n$

Introduction

On intègre les différentes approches faites avec des normes particulières (N_∞, N_1 ou N_2) dans un cadre général où la norme choisie est quelconque. Il ne s'agit plus d'une étude au niveau "lycée"...

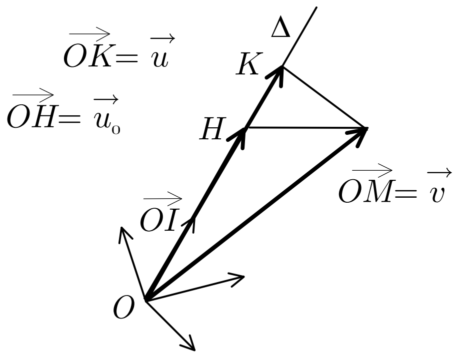
On peut associer au choix d'une norme N sur $\mathbb{R}^n$ une fonction ϕ_N de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie de la façon suivante (en reprenant les notations précédentes) :

si x est un réel, si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OK}$ est le vecteur de la diagonale Δ égal à $(x, x, ..., x)$, si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OM}$ est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de égal à $(a_1, a_2, ..., a_n)$, on pose

$$\phi_N(x) = N(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = N(x - a_1, x - a_2, ..., x - a_n) = N\left(\overrightarrow{MK}\right)$$

La détermination d'une distance minimale est donc équivalente à la recherche d'un minimum de cette fonction ϕ_N.

La localisation de ce minimum donnera un centre de la série statistique identifiée au n-uplet $(a_1, a_2, ..., a_n)$ pour la norme N.



Dessin dans un hyper-espace de dimension n

Le fait d'avoir choisi une norme au départ permet d'établir les résultats qui suivent à partir des seuls axiomes des normes : pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et tout réel λ,

$$\begin{array}{ll} (1) & N\left(\overrightarrow{u}\right) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u} = 0 \\ (2) & N\left(\lambda \overrightarrow{u}\right) = |\lambda|\, N\left(\overrightarrow{u}\right) \\ (3) & N\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) \leq N\left(\overrightarrow{u}\right) + N\left(\overrightarrow{v}\right). \end{array}$$

Théorème

1. **La fonction ϕ_N est convexe sur $\mathbb{R}$.**
2. **Le domaine du plan situé au dessus de la courbe C_N représentative de la fonction ϕ_N est convexe.**
3. **La fonction ϕ_N est dérivable à droite et à gauche en tout point x de $\mathbb{R}$, les nombres dérivés à gauche et à droite notés $\phi'_{N,g}(x)$ et $\phi'_{N,d}(x)$ vérifiant en outre les propriétés suivantes :**
   a- **pour tout x, $\phi'_{N,g}(x) \leq \phi'_{N,d}(x)$.**
   b- **les fonctions $\phi'_{N,g}$ et $\phi'_{N,d}$ sont croissantes.**
4. **La fonction ϕ_N décroît à partir de $+\infty$, passe par un minimum qui sera un "centre" de la série statistique pour la norme N, puis croît jusqu'à $+\infty$.**

Démonstration

1. Convexité de ϕ_N

La fonction ϕ_N est convexe si, quels que soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, quels que soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$,

$$\phi_N(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 \phi_N(x_1) + \lambda_2 \phi_N(x_2).$$

Soient :

- x_1 et x_2 deux réels,
- K_1 et K_2 les points de la diagonale Δ de coordonnées respectives $(x_1, ..., x_1)$ et $(x_2, ..., x_2)$,
- λ_1 et λ_2 deux réels positifs tels que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$,
- on pose $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$, x est un réel du segment $[x_1, x_2]$.
- on note K le point de la diagonale Δ de coordonnées $(x, ..., x)$:
  on a $\overrightarrow{MK} = \lambda_1 \overrightarrow{MK_1} + \lambda_2 \overrightarrow{MK_2}$.

En utilisant l'inégalité triangulaire, $N(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \leq N(\overrightarrow{u}) + N(\overrightarrow{v})$,
et l'égalité $N\left(\lambda \overrightarrow{u}\right) = |\lambda|\, N\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda N\left(\overrightarrow{u}\right)$ lorsque $\lambda \geq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}\phi_N(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \quad &= \phi_N(x) = N\left(\overrightarrow{MK}\right) = N\left(\lambda_1 \overrightarrow{MK_1} + \lambda_2 \overrightarrow{MK_2}\right) \\ &\leq\ N\left(\lambda_1 \overrightarrow{MK_1}\right) + N\left(\lambda_2 \overrightarrow{MK_2}\right) = \lambda_1 N\left(\overrightarrow{MK_1}\right) + \lambda_2 N\left(\overrightarrow{MK_2}\right) \\ &= \lambda_1 \phi_N(x_1) + \lambda_2 \phi_N(x_2),\end{aligned}$$

cela prouve la convexité de la fonction ϕ_N.

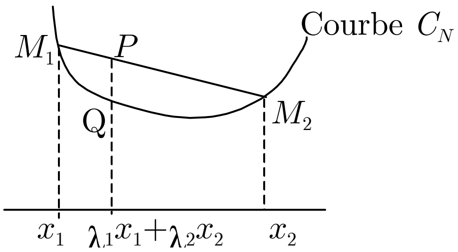
2. Convexité du domaine situé au dessus de la courbe C_N représentant ϕ_N

Soient x_1, x_2 deux réels, M_1, M_2 deux points de la courbe $\mathcal{C}_N$ d'abscisses x_1 et x_2.

Un point P du segment $[M_1, M_2]$ est barycentre du système pondéré $((M_1, \lambda_1), (M_2, \lambda_2))$ tel que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^+$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$:

$$P \text{ a pour coordonnées } (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \lambda_1 \phi_N(x_1) + \lambda_2 \phi_N(x_2)) .$$

Le point Q de la courbe $\mathcal{C}_N$ qui a la même abscisse que le point P a pour coordonnées $(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \phi_N(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2))$.



L'inégalité $\phi_N(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \phi_N(x) \leq \lambda_1 \phi_N(x_1) + \lambda_2 \phi_N(x_2)$ prouve que P est au dessus de Q.

Donc la propriété : "ϕ_N est convexe" implique que : " tout segment $[M_1, M_2]$ joignant deux points de la courbe $\mathcal{C}_N$ est au dessus de la courbe $\mathcal{C}_N$", c'est la définition de la convexité de la courbe $\mathcal{C}_N$. *(La réciproque est vraie, cf. bibliographie).*

3. Dérivabilité à gauche et à droite de ϕ_N

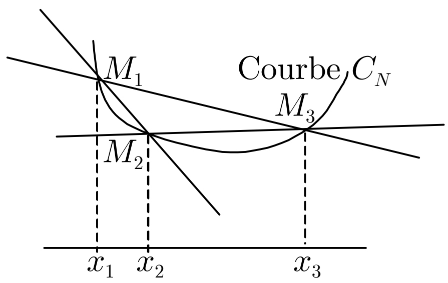
* Ordre sur les coefficients directeurs

Sur la courbe $\mathcal{C}_N$ représentative de ϕ_N , on choisit trois points quelconques M_1, M_2, M_3 d'abscisses respectives x_1, x_2, x_3 tels que $x_1 < x_2 < x_3$.

On note $cd(MM')$ le coefficient directeur de la droite (MM') s'il existe...

Le fait que $\mathcal{C}_N$ ou ϕ_N soient convexes est équivalent au fait que :

- pour tout choix de x_1, x_2, x_3 tels que $x_1 < x_2 < x_3$,
  le point M_2 est au dessous du segment $[M_1M_3]$ est équivalent à
  $\phi_N(x_2) \leq \phi_N(x_1) + \frac{\phi_N(x_3)-\phi_N(x_1)}{x_3-x_1}(x_2 - x_1) = \phi_N(x_3) + \frac{\phi_N(x_3)-\phi_N(x_1)}{x_3-x_1}(x_2 - x_3)$
- ou encore que pour tout choix de x_1, x_2, x_3 tels que $x_1 < x_2 < x_3$,
  $$\frac{\phi_N(x_2) - \phi_N(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{\phi_N(x_3) - \phi_N(x_1)}{x_3 - x_1} \Leftrightarrow cd(M_1M_2) \leq cd(M_1M_3)$$
- ou encore que pour tout choix de x_1, x_2, x_3 tels que $x_1 < x_2 < x_3$,
  $$\frac{\phi_N(x_3) - \phi_N(x_2)}{x_3 - x_2} \geq \frac{\phi_N(x_3) - \phi_N(x_1)}{x_3 - x_1} \Leftrightarrow cd(M_2M_3) \geq cd(M_1M_3)$$



Par suite, si M_0 et M sont deux points de la courbe $\mathcal{C}_N$, d'abscisses distinctes x_0 et x, la fonction $x \mapsto cd(M_0M)$ est croissante, tous les cas sont conséquences des équivalences qui précèdent.

* Dérivabilité à gauche et à droite

En fixant l'abscisse x_2 et le point M_2, on fait varier x_1 et x_3 : $x_1 \mapsto cd(M_1M_2)$ est croissante majorée par $cd(M_2M_3)$ et $x_3 \mapsto cd(M_2M_3)$ est croissante minorée par $cd(M_1M_2)$.

Si on fait tendre x_1 ou x_3 vers x_2 on en déduit l'existence de limites à gauche et à droite (ou de demi-tangentes à gauche et à droite) et l'ordre sur les limites $\phi'_{N,g}(x_2) \leq \phi'_{N,d}(x_2)$ (cf. propriété 3.a-).

* Sens de variation des fonctions dérivées $\phi'_{N,d}$ et $\phi'_{N,d}$

En fixant les abscisses x_1 et x_3 donc les points M_1 et M_3, en faisant varier x_2 dans l'intervalle $]x_1, x_3[$, la double inégalité $cd(M_1M_2) \leq cd(M_1M_3) \leq cd(M_2M_3)$ devient par passage à la limite lorsque x_2 tend vers x_1, puis vers x_3 : $\phi'_{N,d}(x_1) \leq cd(M_1M_3) \leq \phi'_{N,g}(x_3)$, et on en déduit (avec l'inégalité $\phi'_{N,g}(x) \leq \phi'_{N,d}(x)$) les inégalités :

$$x_1 \leq x_3 \Rightarrow \phi'_{N,g}(x_1) \leq \phi'_{N,d}(x_1) \leq \phi'_{N,g}(x_3) \leq \phi'_{N,d}(x_3)$$

et par suite, la croissance des fonctions dérivées à gauche et à droite.(cf. propriété 3.b-).

4. Variations de ϕ_N

On sait déjà que ϕ_N est en tout point dérivable à gauche et à droite donc continue sur $\mathbb{R}$. On en déduit aussi pour l'anecdote que ϕ_N est "presque partout dérivable".

(*Pour tout couple* $(n,p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, *l'ensemble* $\mathcal{E}_{n,p} = \left\{ x \in [n, n+1] \;/\; \phi'_{N,d}(x) - \phi'_{N,g}(x) > \frac{1}{p} \right\}$ *contient moins de* $p \times \left(\phi'_{N,d}(n+1) - \phi'_{N,g}(n)\right)$ *éléments, c'est un ensemble fini, donc l'ensemble* $\mathcal{E} = \bigcup_{(n,p)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} \mathcal{E}_{n,p}$ *est dénombrable ; or* ϕ_N *est dérivable en tout point qui n'appartient pas à l'ensemble* $\mathcal{E}$).

* **Sens de variation de ϕ_N**

D'habitude, on étudie le sens de variation à partir du signe de la dérivée, mais ici on n'a que la continuité et l'existence de nombres dérivés à gauche (ou à droite) : la connaissance du signe de la dérivée à gauche $\phi'_{N,g}$ (ou à droite $\phi'_{N,d}$) sur un intervalle $[a, b]$ suffit en fait pour connaître le sens de variation de la fonction continue ϕ_N sur $[a, b]$.

C'est un exercice classique pour des étudiants de Bac+2 ou Bac+3, on traite le cas où $x \in [a, b] \Rightarrow \phi'_{N,g}(x) \geq 0$

- on choisit $x_0 \in]a, b]$ et $\varepsilon > 0$, on note I_ε l'ensemble des points x de $[a, x_0]$ tels que :
$$\forall t \in [x, x_0]\,,\ \phi_N(x_0) - \phi_N(t) \geq -\varepsilon(x_0 - t).$$
- I_ε est un intervalle fermé contenant x_0 (c'est une conséquence de la continuité de ϕ_N)
- si c désigne la borne inférieure de I_ε , l'hypothèse $c > a$ implique une contradiction : comme $\phi'_{N,g}(c) \geq 0$, il existerait un intervalle $]c - h_\varepsilon, c[$ inclus dans $[a, b]$ tel que, pour tout t, $t \in]c - h_\varepsilon, c[$, on ait : $\phi_N(c) - \phi_N(t) \geq -\varepsilon(c - t)$;
sachant que $\phi_N(x_0) - \phi_N(c) \geq -\varepsilon(x_0 - c)$, on en déduirait en ajoutant les inégalités $\phi_N(x_0) - \phi_N(t) \geq -\varepsilon(x_0 - t)$;
or $t \in]c - h_\varepsilon, c[$ est quelconque, par suite si on choisit $t_0 = c - \frac{h_\varepsilon}{2}$, élément particulier de I_ε, on a un réel t_0 qui vérifie à la fois $t_0 \notin I_\varepsilon$ (car $t_0 < c$) et $t_0 \in I_\varepsilon$ (car $\forall t \in [t_0, c] \cup]c, x_0] = [t_0, x_0]$, $\phi_N(x_0) - \phi_N(t) \geq -\varepsilon(x_0 - t)$) : cela contredit le fait que c est la borne inférieure de I_ε.
Donc $I_\varepsilon = [a, x_0]$.
- On fait tendre ε vers 0 : l'hypothèse $\phi'_{N,g} \geq 0$ sur l'intervalle $[a, x_0]$ implique que $\forall t \in [a, x_0]\,,\ \phi_N(x_0) - \phi_N(t) \geq 0$.
- On en déduit que ϕ_N est croissante en faisant varier x_0 dans$]a, b]$.

Autre méthode *:*

La croissance de $\phi'_{N,g}$ (ou $\phi'_{N,d}$) implique également l'intégrabilité au sens de Riemann de $\phi'_{N,g}$ (ou $\phi'_{N,d}$) sur tout segment de $\mathbb{R}$. Si on choisit un réel x_0 de $[a, b]$, et si on note $g(x) = \phi_N(x_0) - \int_x^{x_0} \phi'_{N,g}(t)\,\mathrm{d}t$ (ou $h(x) = \phi_N(x_0) + \int_{x_0}^{x} \phi'_{N,d}(t)\,\mathrm{d}t$), on démontre (la méthode est à peu près la même que celle utilisée précédemment) que pour tout x réel de $[a, x_0]$, $g(x) = \phi_N(x)$. Cela implique que g ne dépend pas de x_0....

Si $\phi'_{N,g}$ est positive sur $[a, b[$,et si $(x_1, x_2) \in [a, b]^2$, $\phi_N(x_2) - \phi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \phi'_{N,g}(t)\,\mathrm{d}t$ est du signe de $x_2 - x_1$, donc ϕ_N croît. (Inversement si $\phi'_{N,g}$ est négative, ϕ_N décroît.)

* **Conséquence :**

La fonction continue ϕ_N décroît tant que $\phi'_{N,g}$(ou $\phi'_{N,d}$) est négative, croît lorsque $\phi'_{N,g}$(ou $\phi'_{N,d}$) est positive, et comme $\phi'_{N,g}$ (ou $\phi'_{N,d}$) est croissante, il n'y a que trois possibilités pour le sens de variation :

- Soit $\phi'_{N,g}$ est toujours négative et ϕ_N toujours décroissante.
- Soit $\phi'_{N,g}$ est toujours positive et ϕ_N toujours croissante.
- Soit $\phi'_{N,g}$ est négative puis positive et ϕ_N est d'abord décroissante puis croissante.

On montre alors qu'on est dans le troisième cas en étudiant les limites de ϕ_N .

* **Limites de ϕ_N**

On a défini ϕ_N en posant

$$\phi_N(x) = N(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = N(x - a_1, x - a_2, ..., x - a_n) = N\left(\overrightarrow{MK}\right),$$

M étant le point de coordonnées $(a_1, ..., a_n)$.

D'après l'inégalité triangulaire, pour tout point Kde coordonnées $(x, ..., x)$ on a :

$$\phi_N(x) = N\left(\overrightarrow{MK}\right) \geq N\left(\overrightarrow{OK}\right) - N\left(\overrightarrow{OM}\right) = |x|\, N(1, ..., 1) - N(\overrightarrow{OM}).$$

Par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} \phi_N(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \phi_N(x) = +\infty$.

Le seul tableau de variation possible pour ϕ_N est le troisième : ϕ_N est d'abord décroissante puis croissante.

5. Conclusion

On connaît donc le sens de variation de ϕ_N : la fonction ϕ_N est continue sur $\mathbb{R}$, d'abord décroissante puis croissante, elle passe donc par un minimum.

Remarque :

Il n'y a aucune raison que ce minimum soit atteint en une seule valeur x, on a vu que dans le cas de la norme N_1, le minimum qui correspond à la "médiane" de la série statistique $(a_1, a_2, ..., a_n)$ n'était pas toujours unique, il peut être atteint sur un "segment médian"...

Minimum d'une somme de distances

Théorème

Soient n points $B_1, B_2, ..., B_n$ d'un espace affine euclidien $\mathcal{A}$.
La fonction Φ définie sur cet espace affine $\mathcal{A}$ par $P \mapsto PB_1 + PB_2 + ... + PB_n$ possède un minimum, unique lorsque les points $B_{1,}B_2, ..., B_n$ ne sont pas alignés.

Ce minimum est soit un point critique qui annule la différentielle

$$\overrightarrow{\Phi'(P)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left\| \overrightarrow{PB_i} \right\|} \overrightarrow{PB_i},$$

soit l'un des points du nuage $B_1, B_2, ..., B_n$ en lesquels la fonction Φ n'est pas différentiable.

Démonstration

Le minimum de la fonction Φ sur une droite Δ

On considère une droite affine Δ muni d'un repère $\mathcal{R}$.

On considère la fonction f_i qui au point P d'abscisse x dans le repère $\mathcal{R}$ de cette droite Δ associe la distance PB_i (i varie de 1 à n) :

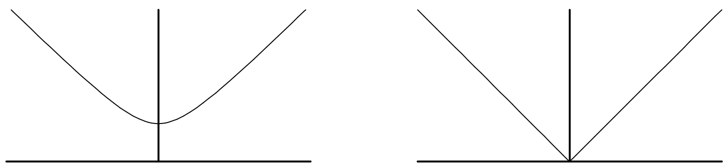
f_i est une fonction convexe, et même strictement convexe si Δ ne contient pas B_i, dont le minimum se situe en x_i abscisse du projeté orthogonal H_i du point B_i sur Δ.

En effet si on prend l'expression analytique de la fonction f_i :

$$x \mapsto f_i(x) = PB_i = \sqrt{PH_i^2 + H_iB_i^2} = \sqrt{(x - x_i)^2 + c_i^2}$$

où $c_i = H_iB_i$ est la distance du point B_i à Δ, alors

- si $c_i \neq 0$ ou encore si $B_i \notin \Delta$, la dérivée f_i' est strictement croissante et f_i.est strictement convexe
- sinon f_i s'écrit $x \mapsto |x - x_i|$, f_i est dans ce cas convexe mais pas strictement convexe.



allure de f_i, $c_i \neq 0$ *allure de f_i, $c_i = 0$*

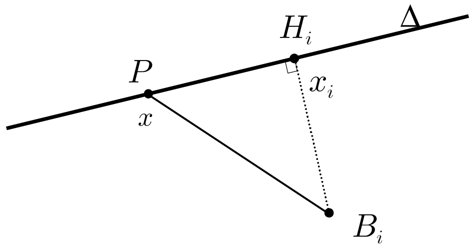
Dans tous les cas, lorsque x varie de $-\infty$ à $+\infty$, la fonction f_i décroît de $+\infty$ à un minimum $f_i(x_i) = H_iB_i$ puis croît jusqu'à $+\infty$.

La fonction F de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, qui au point P d'abscisse x de cette droite Δ associe la somme des distances $F(x) = \Phi(P) = \sum\limits_{i=1}^{n} PB_i = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{PH_i^2 + H_iB_i^2}$ est aussi convexe comme somme de fonctions convexes, et même strictement convexe si l'une au moins des fonctions f_i est strictement convexe, donc si l'un des points $B_1, B_2, ..., B_n$ n'est pas sur la droite Δ.

L'étude faite dans le début de ces annexes sur les fonctions convexes (et les propriétés des fonctions f_i), permettent de dire que la fonction F possède un minimum, lorsque x

varie de $-\infty$ à $+\infty$ et que F décroît de $+\infty$ à ce minimum, puis croît de ce minimum à $+\infty$.

On ajoutera que ce minimum est unique, que la décroissance de $+\infty$ à ce minimum ou la croissance de F de ce minimum à $+\infty$ sont strictes si l'un des points $B_1, B_2, ..., B_n$ n'est pas sur la droite Δ. Enfin ce minimum est compris (cf. sens de variation des fonctions f_i) entre le plus petit et le plus grand des extrema des fonctions f_i multiplié par n...



Le minimum de f_i est en x_i

On suppose désormais que les points $B_1, B_2, ..., B_n$ ne sont pas alignés (le cas où ils sont alignés a déjà été étudié avec la définition de la médiane...) : la fonction F possède donc un minimum unique, quelle que soit la droite Δ.

Il reste à voir ce qui se passe lorsqu'on change de droite Δ dans l'espace affine A, sachant que sur chaque droite Δ la restriction de la fonction $\Phi : P \mapsto PB_1 + PB_2 + ... + PB_n$, possède un minimum unique.

Unicité du minimum

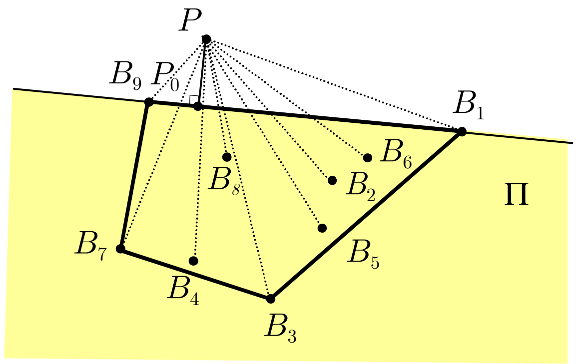
L'unicité du minimum de la fonction Φ dans l'espace affine A résulte du travail précédent : s'il y a deux points qui réalisent le minimum, on construit une droite Δ qui contient ces deux points.

On sait qu'il n'y a qu'un point qui réalise le minimum pour la fonction Φ sur une droite Δ... donc les deux minimums sont confondus !

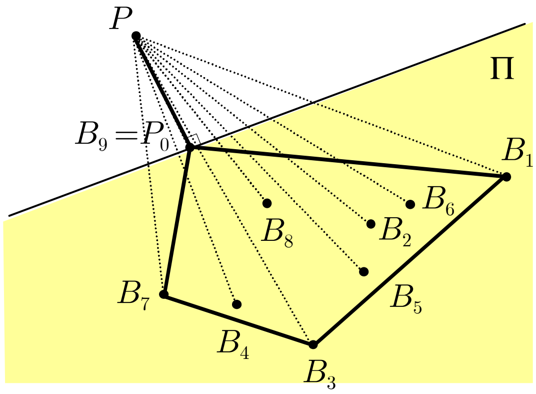
Localisation du minimum dans l'enveloppe convexe $\mathcal{C}$ du nuage

S'il existe, ce minimum se situe dans "l'enveloppe convexe" $\mathcal{C}$ du nuage, plus petit polygone convexe qui contient tous les points du nuage, $B_1, B_2, ..., B_n$, et dont les sommets définissent un sous-ensemble de l'ensemble $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ des points du nuage.

En effet, à tout point P de l'espace affine n'appartenant pas à $\mathcal{C}$, on peut associer le point P_0 de $\mathcal{C}$ le plus proche de P, (P_0 est soit le projeté orthogonal de P sur l'une des arêtes, soit un sommet, il y a un nombre fini de comparaisons à faire) : $\mathcal{C}$ est entièrement inclus dans le demi-plan Π de frontière la perpendiculaire à (PP_0) en P_0. Pour chacun des points du nuage, on a $PB_i \geq P_0B_i$ puisque dans chacun des triangles PP_0B_i l'angle en P_0 est droit ou obtus. Donc $\Phi(P) = \sum_{i=1}^{n} PB_i \geq \Phi(P_0) = \sum_{i=1}^{n} P_0B_i$ et P_0 est mieux placé que P pour être le minimum.



Le projeté est sur un côté



Le projeté est un sommet

Existence

L'existence d'un minimum résulte du fait que l'enveloppe convexe $\mathcal{C}$ est un compact, donc Φ possède un minimum sur $\mathcal{C}$ (Φ est une fonction continue) et le minimum de Φ sur $\mathcal{C}$ est le minimum de Φ dans l'espace affine $\mathcal{A}$.

Un exemple d'algorithme de construction : l'algorithme de Weiszfeld

On construit une suite de points $(M_0, M_1, ...M_k, ...)$ de la façon suivante :

M_0 étant quelconque (mais n'appartenant pas au nuage de points $B_1, B_2, ..., B_n$) le successeur M_{k+1} du point M_k (si $M_k \notin \{B_1, ..., B_n\}$) est le barycentre du système pondéré $\left(\left(B_1, \frac{1}{B_1M_k}\right), \left(B_2, \frac{1}{B_2M_k}\right), ..., \left(B_n, \frac{1}{B_nM_k}\right)\right)$.

Ou encore, le vecteur $\overrightarrow{M_kM_{k+1}}$ est tel que : si $\overrightarrow{\Phi'(M_k)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\left\|\overrightarrow{M_kB_i}\right\|} \overrightarrow{M_kB_i} \right)$, alors

$$\overrightarrow{M_kM_{k+1}} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\left\|\overrightarrow{M_kB_i}\right\|} \right)^{-1} \overrightarrow{\Phi'(M_k)}.$$

Si l'un des points M_k est égal à l'un des points B_i, l'algorithme a un bug : cela peut signifier que B_i est solution, mais pas forcément. Dans ce cas, on prend un point M_{k+1} proche de M_k et on repart : si B_i est la solution, on se rapprochera à nouveau de B_i...

Pour plus de détails, cf. bibliographie.

Autre théorème

Soient n points $B_1, B_2, ..., B_n$ d'un espace affine euclidien $\mathcal{A}$.
La fonction F définie sur cet espace affine $\mathcal{A}$ par $P \mapsto \max\{PB_1, PB_2, ..., PB_n\}$ possède un minimum, unique.

C'est soit l'un des cercles de diamètre $[B_iB_j]$, soit l'un des cercles circonscrits à un triangle $B_iB_jB_k$ formé de trois points du nuage, ceci a été déjà démontré page 78.

On peut aussi le démontrer à partir d'arguments tout à fait similaires à ceux utilisés pour le théorème précédent.
Cette application $F : P \mapsto \sup\limits_{i\in\{1,...,n\}} PB_i$ est une application continue du plan dans $\mathbb{R}^+$, qui est convexe, car $P \mapsto PB_i$ est une fonction convexe, et le "sup" d'un nombre fini de fonctions convexes est convexe.

Pour l'unicité, on peut reprendre la méthode qui consiste à chercher d'abord le minimum de la fonction convexe F sur une droite Δ.

- F tend vers l'infini lorsque le point P va vers l'infini sur Δ.
- Donc lorsque P varie de façon monotone sur Δ, la fonction continue F est d'abord décroissante puis croissante, elle passe par un minimum.
- Ce minimum ne peut être atteint plusieurs fois : si F atteint son minimum en P_1 et en P_2, alors F atteint aussi son minimum en tout point de $[P_1P_2]$ (d'après le sens de variation de F). Or chacune des fonctions $P \mapsto PB_i$ prend au plus 2 fois une même valeur sur Δ, donc $P \mapsto \sup\limits_{i\in\{1,...,n\}} PB_i$ peut prendre au plus $2n$ fois une même valeur, pas une infinité de fois ! Ce qui signifie que $[P_1P_2]$ est réduit à un seul point.
- Ensuite en faisant varier Δ, on démontre que s'il y a un minimum unique pour chaque droite Δ du plan, il y a un minimum au plus dans le plan.

Pour l'existence on remarque que :

- La fonction continue F possède un minimum (unique d'après ce qui précède) dans l'enveloppe convexe $\mathcal{C}$ du nuage de points $B_1, B_2, ..., B_n$ qui est un compact.
- Si le point P est extérieur à $\mathcal{C}$ et si on note P_0 le projeté de P sur cette enveloppe convexe $\mathcal{C}$, on aura encore $F(P) \geq F(P_0)$.
- Ce minimum défini dans l'enveloppe convexe C du nuage de points $B_1, B_2, ..., B_n$ sera le minimum de F dans le plan affine tout entier.

-

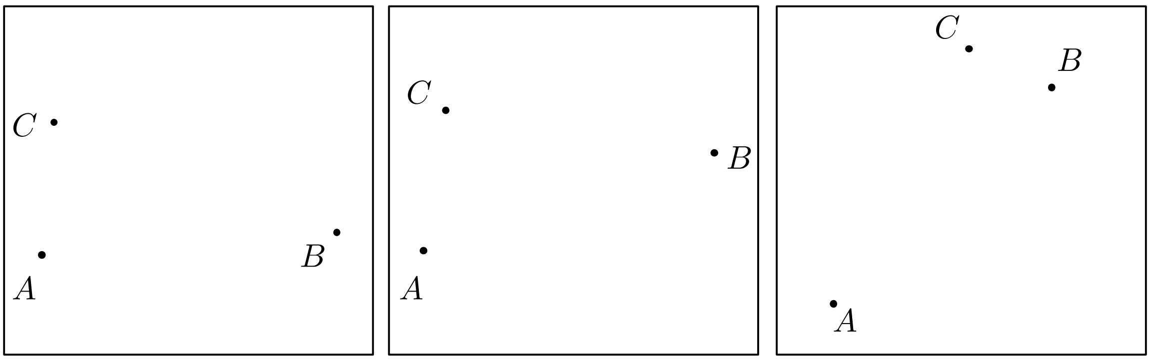
ÉTUDES DE SITUATIONS

Construction de centre de secours ou construction du plus petit cercle contenant un nuage de n points

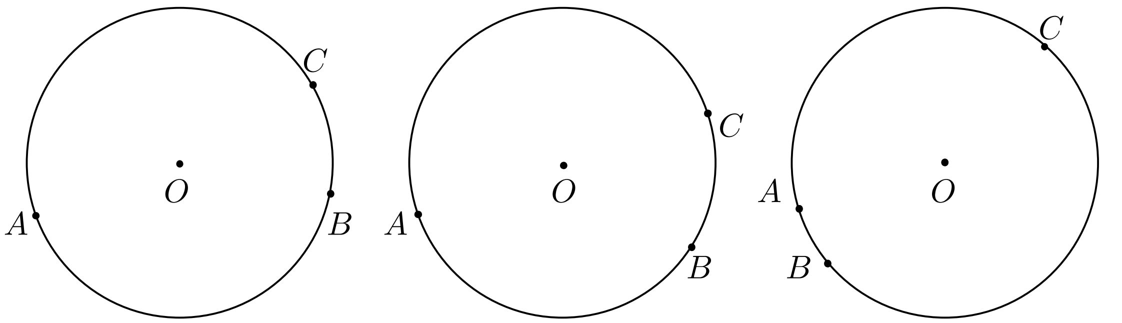
Cas d'un triangle

Exemple 1 Construction d'un centre de secours

Voici trois villages, représentés par 3 points. Construire un centre de secours tel que le temps d'intervention dans les pires situations (c'est à dire les villages les plus éloignés) soit minimal pour des secours héliportés.



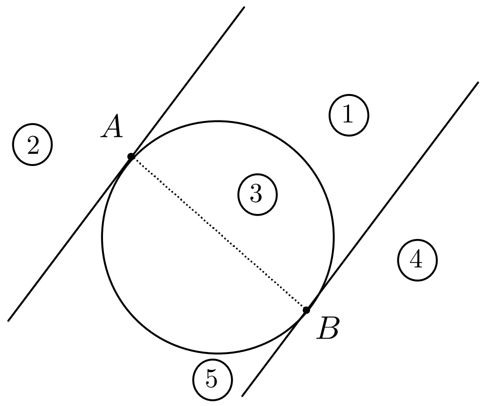
Autre version : voici 3 triangles, construits avec leurs cercles circonscrit : existe-t-il un cercle de rayon plus petit que celui qui est proposé qui contient le triangle ? Pourquoi ?



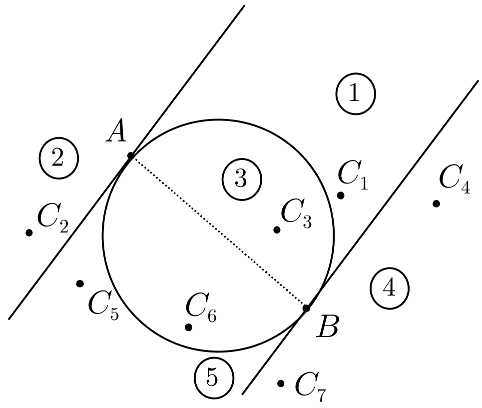
Exemple 2

Soient A et B deux points, C est un point variable, qu'on peut placer où on veut dans le plan : on propose dans le dessin n°1 bis 7 positions possibles pour le point C : définir ou construire le plus petit cercle du plan contenant A, B, C dans chacun des 7 cas.

On pourra vérifier puis démontrer que le type de réponse dépend uniquement de la région du plan qui contient le point C (région n°1, 2, 3, 4, ou 5).



Dessin n°1



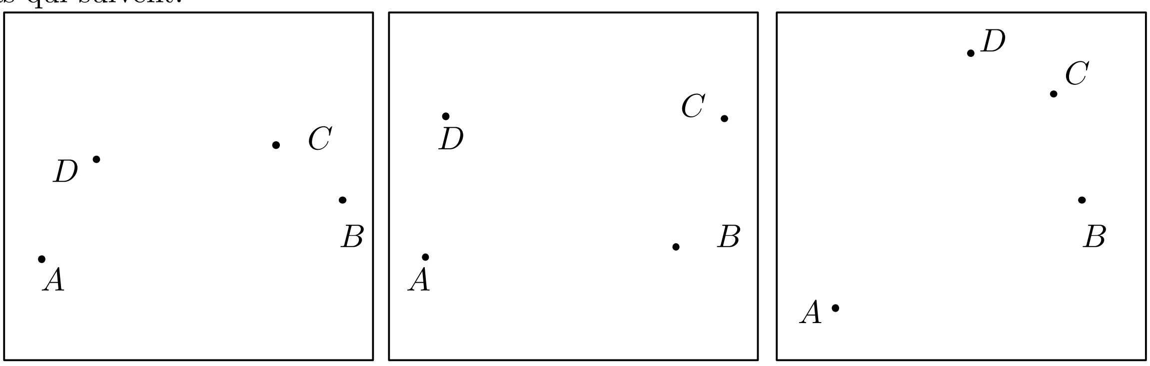
Dessin n°1 bis

Cas d'un quadrilatère

Exemple 3 Construction d'un centre de secours

Voici quatre villages, représentés par 4 points. Construire un centre de secours tel que le temps d'intervention dans les pires situations (c'est-à-dire les villages les plus éloignés) soit minimal pour des secours héliportés.

Autre version : construire le plus petit cercle qui contient les 4 points dans les trois cas qui suivent.

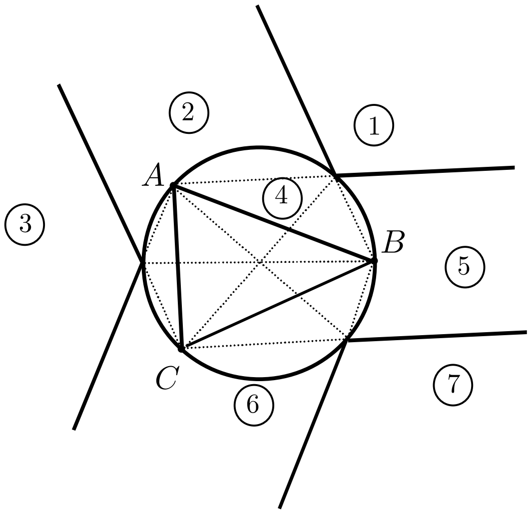


Exemple 4

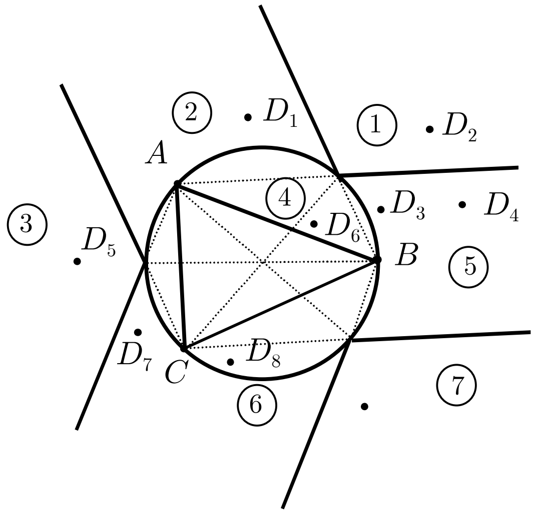
A, B, et C forment un triangle n'ayant que des angles aigus : on a construit le cercle circonscrit au triangle ABC, et les points du cercle diamétralement opposés aux points A, B, C.

D est un point variable, qu'on peut placer où on veut dans le plan : on propose dans le dessin n°2 bis 9 positions pour le point D : définir ou construire le plus petit cercle du plan contenant A, B, C, D dans chacun des 9 cas.

On pourra vérifier puis démontrer, que le type de réponse dépend uniquement de la région du plan qui contient le point D (région n°1, 2, 3, 4, 5, 6 ou 7).



Dessin n°2

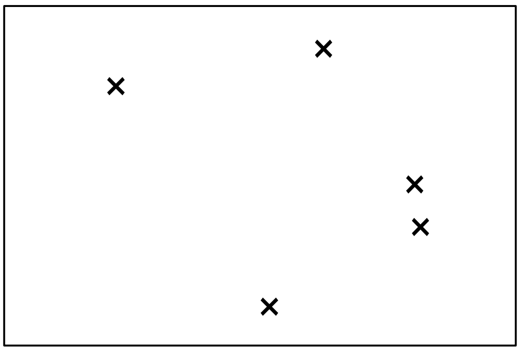


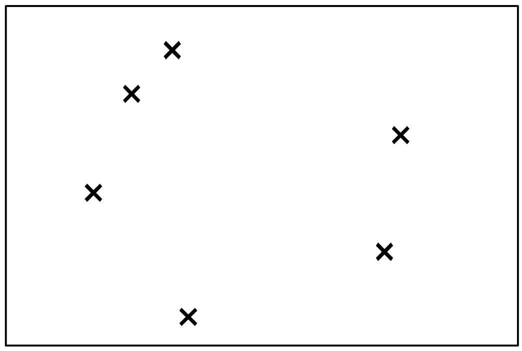
Dessin n°2 bis

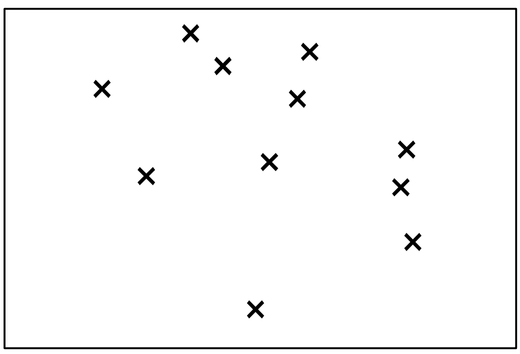
Cas d'un nombre quelconque

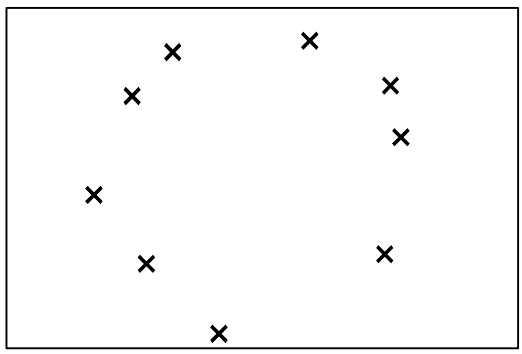
Exemple 5 Construction du centre de secours ou du plus petit cercle contenant les points d'un nuage.

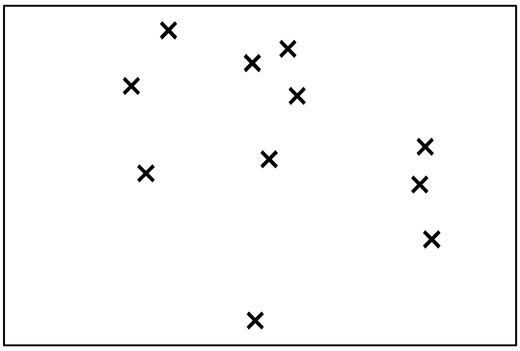
Voici six configurations : comme précédemment, on peut choisir l'énoncé qu'on veut.

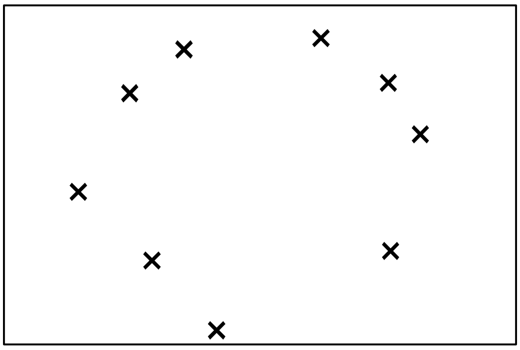












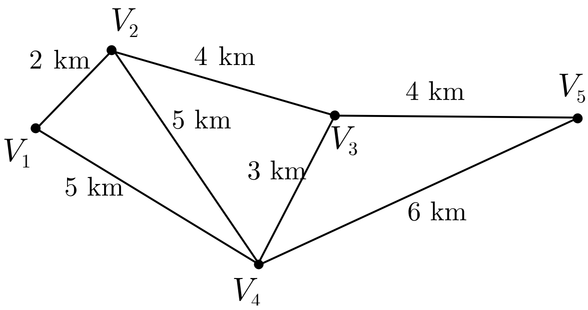
Remarque : *les exercices proposés en préliminaire doivent permettre de trouver une stratégie de construction.*[11]

Une métrique autre que la métrique Euclidienne

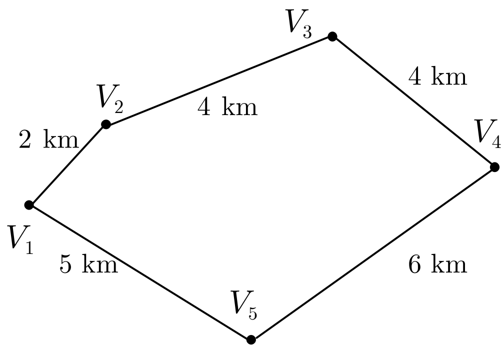
Exemple 6 Centre de secours et ambulances

Il s'agit toujours de situer un centre de secours, il faut être prêt à intervenir le plus vite possible aux points les plus éloignés, mais cette fois-ci les secours ne sont plus héliportés, il faut emprunter les routes existantes qui sont indiquées sur les schémas ci-dessous.

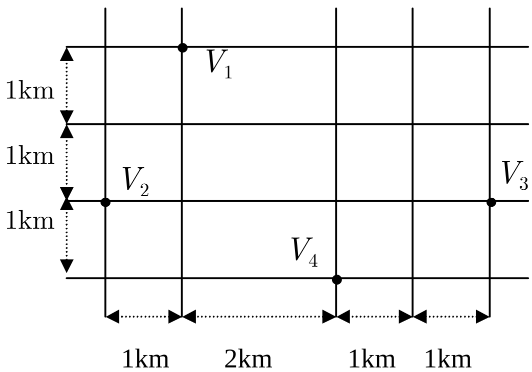
Voici quatre situations : ici les villages sont construits, avec les routes qui permettent de circuler, et les distances des villages sont indiquées, il faut commencer par définir des itinéraires... et chercher des stratégies !



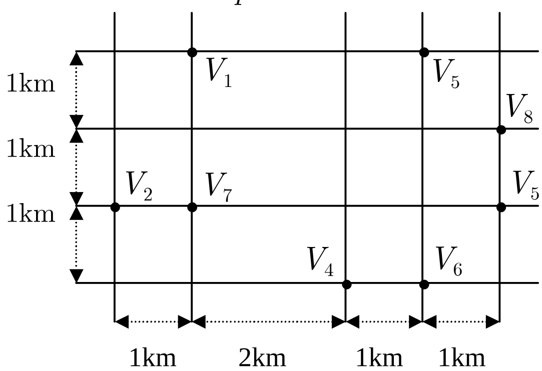
Disposition n°1



Disposition n°2



Disposition n°3



Disposition n°4

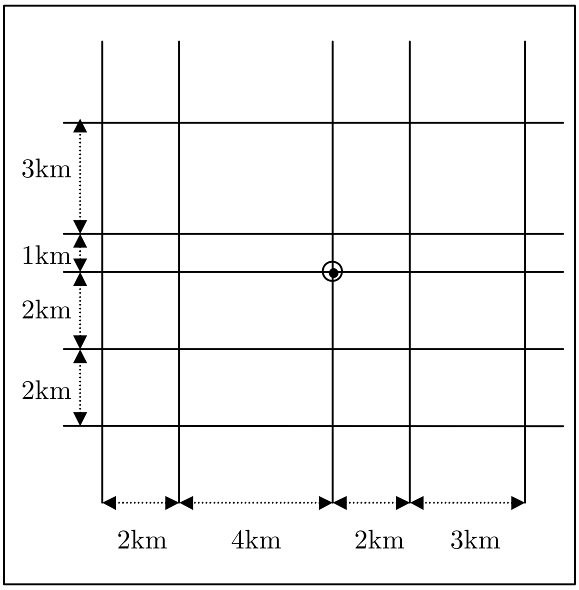
[11] cf. page 78, par exemple.

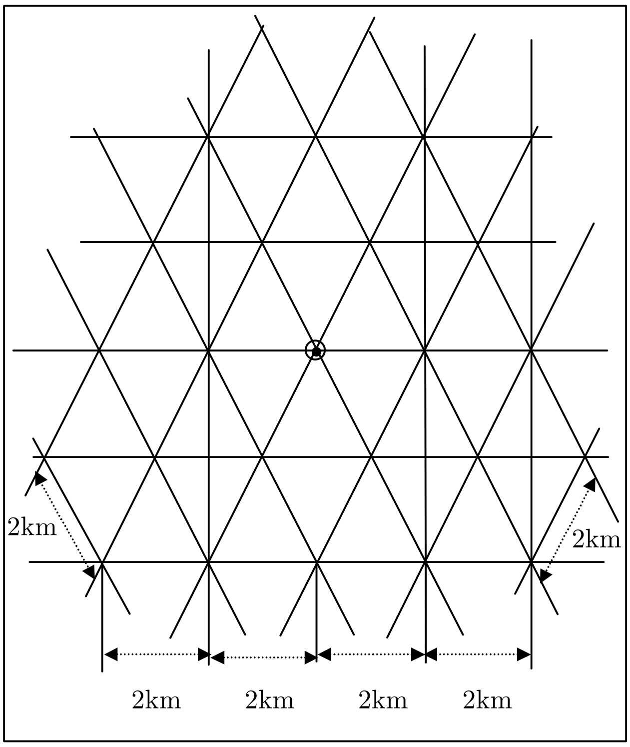
Exemple 7

On a situé le centre : mais il y a d'autres problèmes techniques, on ne peut s'installer juste au centre, on doit s'en écarter un peu, mais dans un rayon qui n'excède pas 3 km ou dans le pire des cas qui n'exède pas 5 km - en tenant compte naturellement des voies de circulation qui sont indiquées sur le plan.

Construire les 2 zones de rayon 3 km et 5 km autour du centre sur chacun des deux plans.

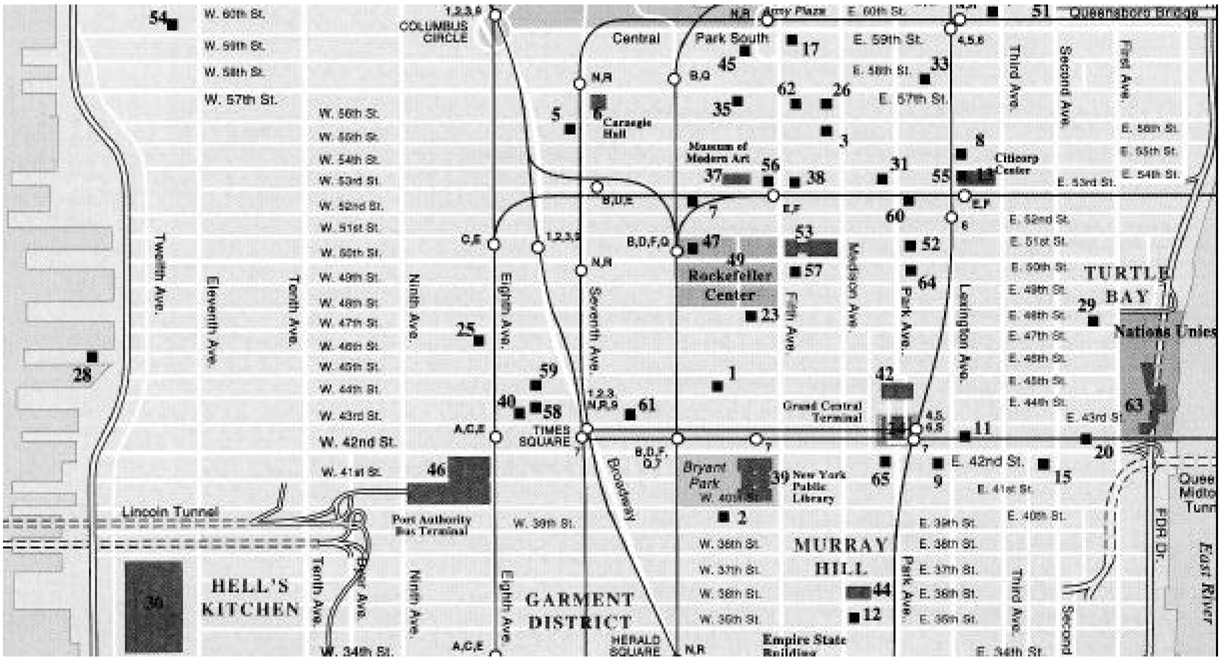
(Sur le deuxième plan, chacun des triangles qui ressemble à un triangle équilatéral est un triangle équilatéral).





Exemple 8

On choisit un centre (par exemple l'un des points marqué sur le plan) : construire des zones de rayon 1 km, 1,5 km ou 2 km autour de ce point à l'aide du plan ci-joint (partie de Manhattan précisément).

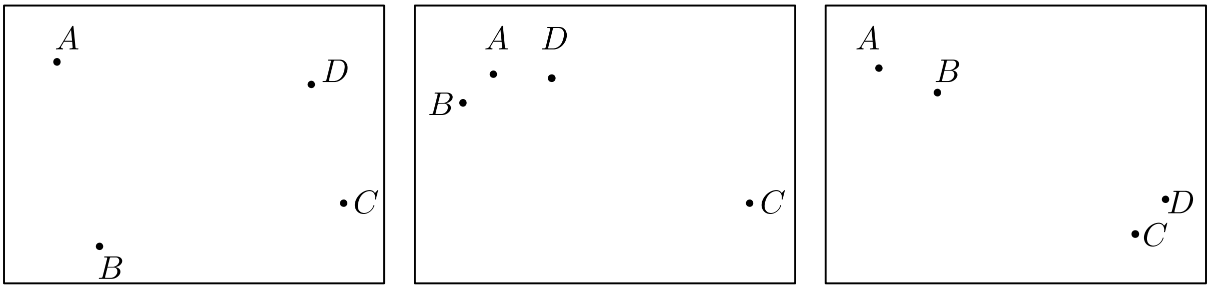


Echelle : 500 m.

Construction d'une laiterie ou de points qui minimisent une somme de distances

Exemple 9 Recherche du minimum de la somme des distances à 4 points

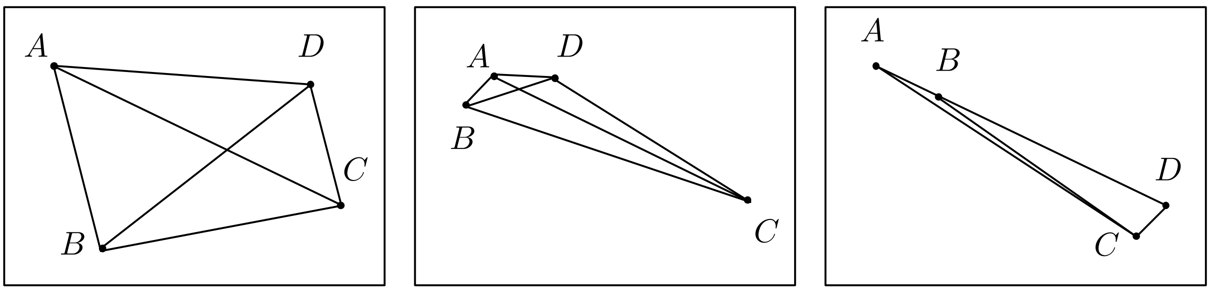
Cette recherche peut être dans un premier temps un exercice de recherche au niveau informatique, en utilisant un logiciel de géométrie qui calcule des distances entre des points et qui les ajoute : je propose trois configurations... Si l'on faisait des "conjectures a priori" sur la zone probable où il faut situer ce "centre" (pour y installer la laiterie...), que trouverait-on ?



Par tâtonnements successifs, avec l'ordinateur, on doit arriver à une solution à peu près satisfaisante.

Si partant de la solution trouvée, on relie les différents points du quadrilatère, on peut alors s'apercevoir qu'on est tout près du point d'intersection des diagonales !

Par chance, avec un quadrilatère convexe, on peut trouver une justification simple : un point quelconque M de $[AC]$ minimise la somme $MA + MC$, un point M de $[BD]$ minimise $MB + MD$, donc un point d'intersection de $[AC] \cap [BD]$ minimise $MA + MB + MC + MD$!

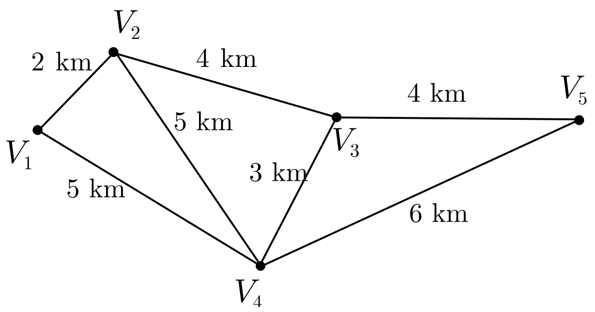


Exemple 10 Une autre métrique que la métrique euclidienne

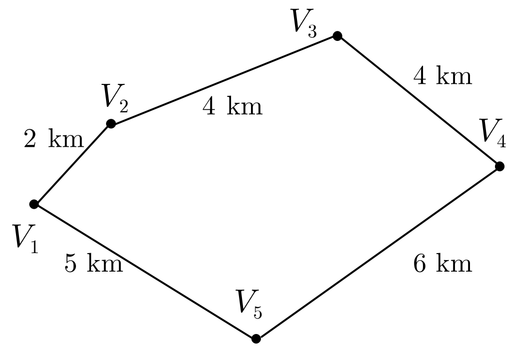
1. On peut reprendre des dispositions déjà proposées dans le paragraphe précédent et se poser la question de la recherche d'un point qui minimise la somme des distances aux différents points du dessins.

2. On peut aussi, après avoir repéré un centre, repérer les différents points situés à moins d'un kilomètre ou à moins de 2 kilomètres du centre (ou des centres) pour classer les zones d'implantation pour la laiterie à partir du centre - en pratique, il peut exister d'autres raisons qui font que la meilleure solution au niveau des kilomètres n'est pas la plus économique au niveau du choix de l'implantation.

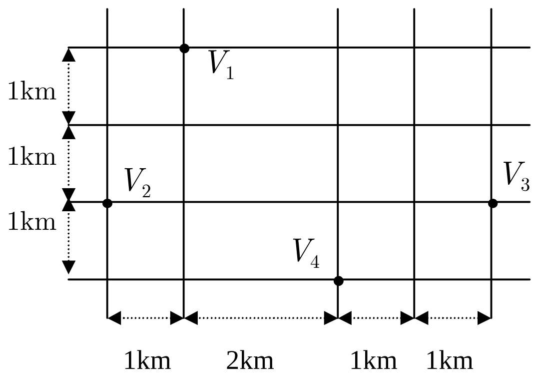
3. On peut aussi (il y a une différence avec la question précédente, voir exemple ci-dessous) repérer des zones pour lesquelles la somme des distances d'un point de la zone aux différents points du dessin n'excède pas de 3 kilomètres, ou de 5 kilomètres la somme minimale des distances aux différents points (somme minimale obtenue au(x) centre(s)).



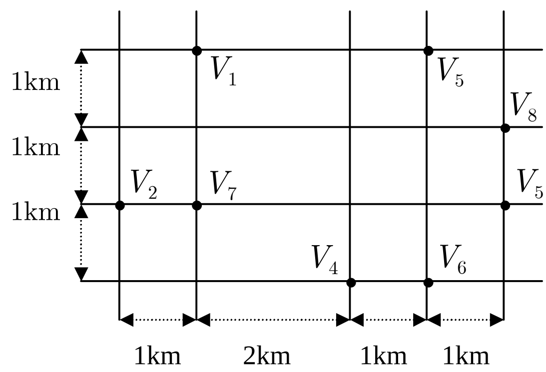
Disposition n°1



Disposition n°2



Disposition n°3



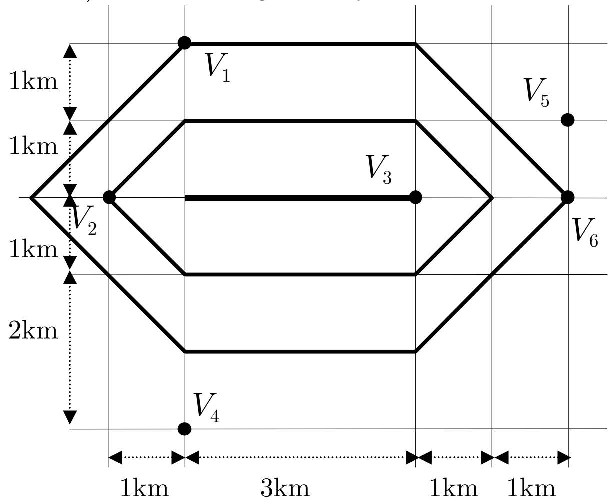
Disposition n°4

Remarque *: avec les dispositions 3 et 4, on obtient des centres dont les coordonnées sont les coordonnées médianes... car la métrique de "Manhattan" est en fait une métrique associée à la norme N_1.*

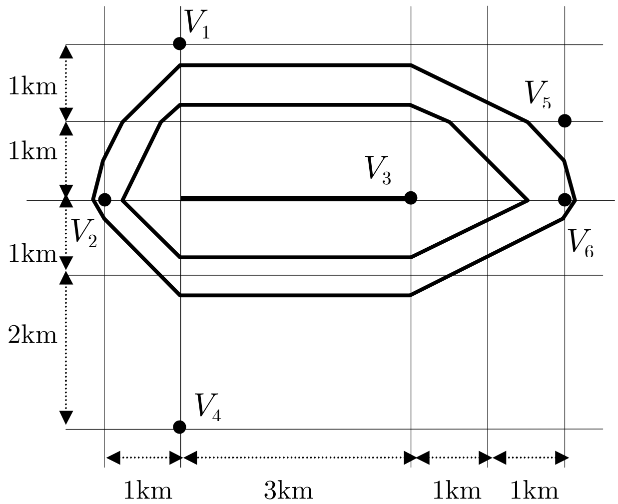
Un exemple de solution :

Voici une disposition avec 6 points $V_1, V_2, ..., V_6$: la somme minimale des distances d'un point du plan aux 6 points (en suivant les droites tracées sur le plan) est obtenue en un point quelconque du segment "médian" dont une extrémité est le point V_3.

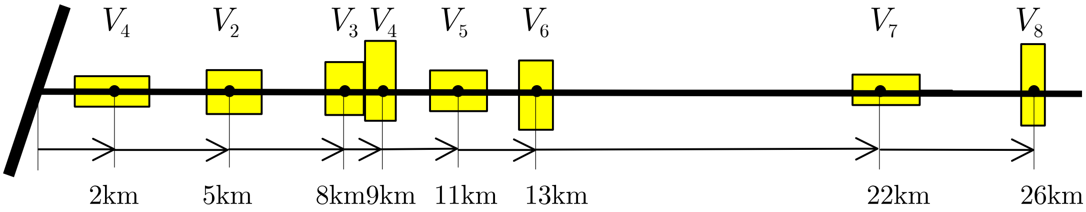
Si on s'écarte de 1 kilomètre au plus d'un point du centre, ou de 2 kilomètres au plus, on obtient l'intérieur d'un hexagone bien symétrique par rapport à deux axes (un axe vertical et un axe horizontal) : c'est la figure ci-jointe.



Si on veut que la somme des distances soit inférieure à la somme minimale (égale à 20 kilomètres, obtenue avec un point du segment médian) augmentée de 3 kilomètres, ou de 5 kilomètres, on obtient l'intérieur d'un polygone qui ne possède plus d'axes de symétrie, c'est la figure ci dessous.



Exemple 11 Retour au premier dessin



Il s'agit toujours de situer la laiterie, mais les villages n'ont plus la même importance :

1. Première situation : le camion devra faire chaque jour un aller-retour vers chacun des villages V_1, V_3, V_5, V_7, V_8, deux allers-retours vers les villages V_2 et V_6, trois allers-retours vers le village V_4.
2. Deuxième situation : le camion devra faire chaque jour un aller-retour vers chacun des villages $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6$ et trois allers-retours vers les villages V_7 et V_8.
3. Troisième variante : certains villages ne remplissent qu'une moitié ou un tiers de camion... donc on pourra traiter éventuellement plusieurs villages dans une même tournée...

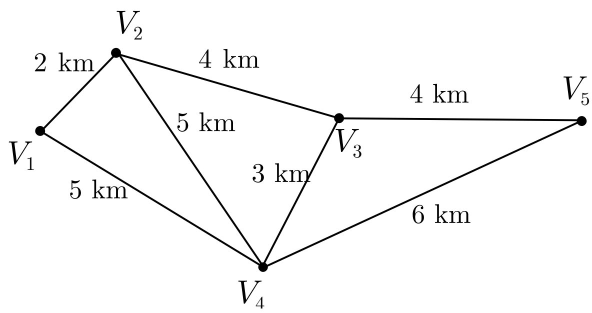
Construction d'un centre socio-culturel, ou point d'équilibre entre plusieurs directions

Exemple 12

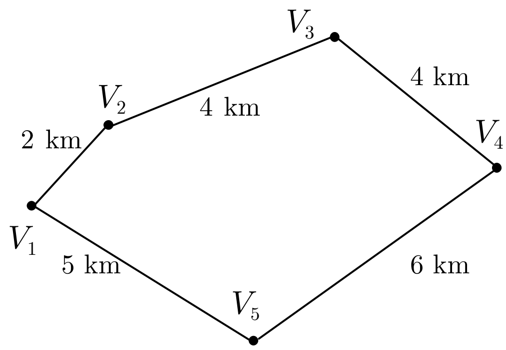
Dans chacune des situations suivantes, on symbolise par des points des villages, et les traits qui relient ces points symbolisent des routes. On cherche l'emplacement idéal pour implanter un "centre socio-culturel" commun aux différents villages en choisissant un point sur une "route", tel que ceux qui arrivent d'un côté de ce point (au nord ou à l'ouest par exemple), aient au total autant de trajet à faire que ceux qui arrivent par l'autre côté (au sud ou à l'est), chacun empruntant l'un des itinéraires les plus courts pour se rendre à ce point.

Dans la disposition numéro 1, on peut s'apercevoir assez vite qu'il n' y a pas de solution en dehors des villages eux-mêmes, et qu'aucun des villages ne correspond à une solution satisfaisante.

Dans la disposition numéro 2, il y a trois solutions, une sur chacun des segments $[V_2, V_3]$, $[V_3, V_4]$ et $[V_4, V_5]$.



Disposition n°1

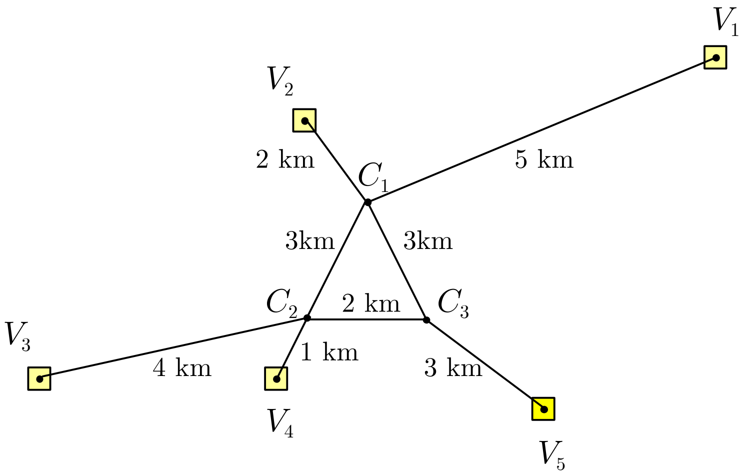


Disposition n°2

Remarque : parmi les schémas proposés, certains possèdent des solutions, mais avec les points situés à des carrefours, il y a des discontinuités importantes et le problème n'a pas forcément une solution ! En particulier les dispositions n°3 et 4 ne sont pas proposées parce que l'étude de solutions ne présente sans doute pas d'intérêt à notre avis.

Exemple 13

Voici une autre situation, où 5 villages sont repérés par les points V_1, V_2, V_3, V_4 et V_5, et les différentes routes reliant ces villages se rejoignent en 3 carrefours C_1, C_2, C_3.



Recherches plus générales

Exemple 14

Maintenant que vous connaissez les règles pour rechercher des centres, où situer un centre par rapport aux capitales européennes ?

Attention, la première partie est un exercice de géographie : situer les capitales, choisir une Europe, dans une deuxième partie, il faudra définir les critères de ce centre.

Question subsidiaire : suivant la façon dont vous avez choisi votre Europe, peut-être est-ce un non-sens de placer un centre dans la Confédération Helvétique qui ne fait peut-être pas partie de votre Europe.

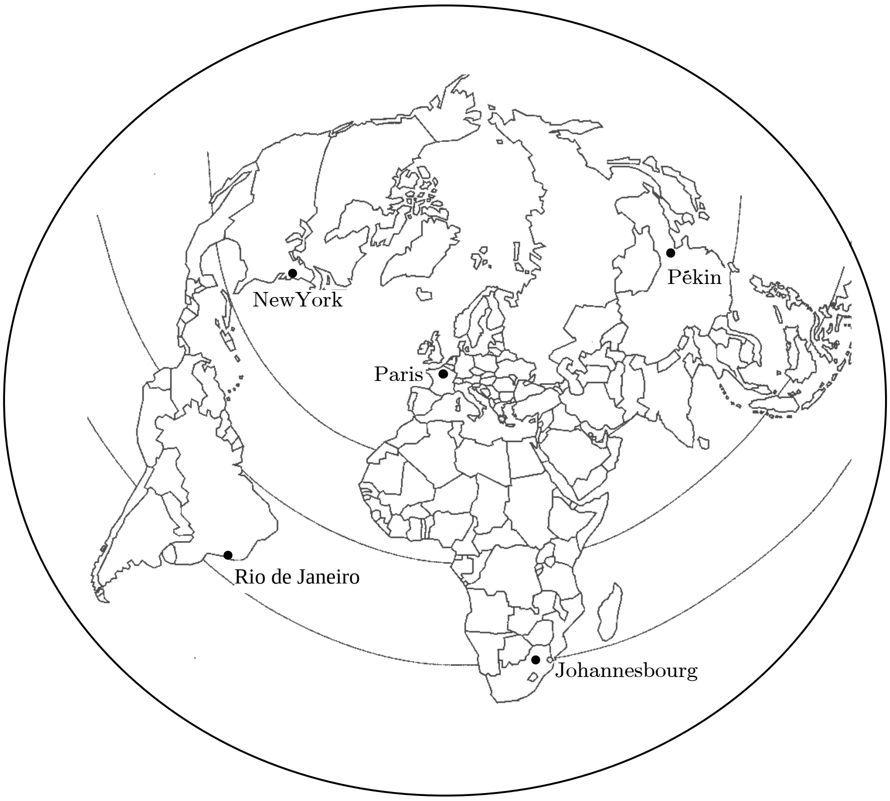
D'ailleurs faut-il s'autoriser ou non à survoler ce pays ?

Exemple 15

Maintenant que vous connaissez les règles pour rechercher des centres, où situer un centre par rapport aux cinq villes proposées sur cette carte ?

Il faudra peut-être remplacer cette carte par un globe terrestre...

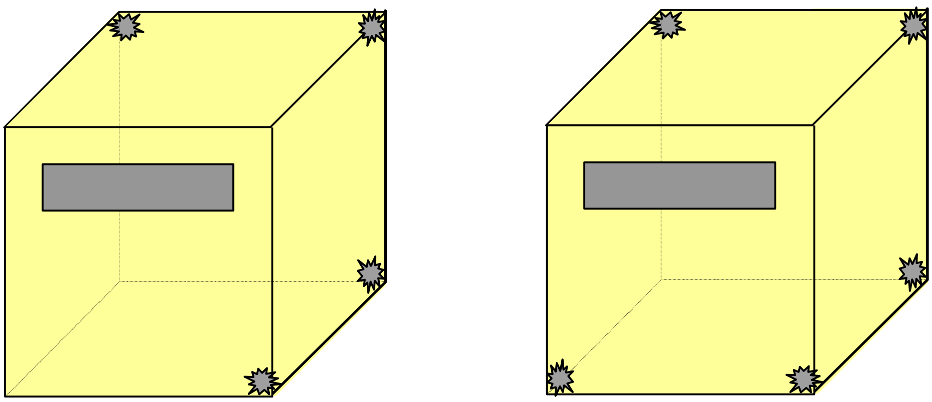
Est-ce que cela a un sens de choisir un centre en pleine mer ?



Exemple 16

Une araignée a tissé des toiles dans quatre ou cinq coins d'une boîte aux lettres cubique.

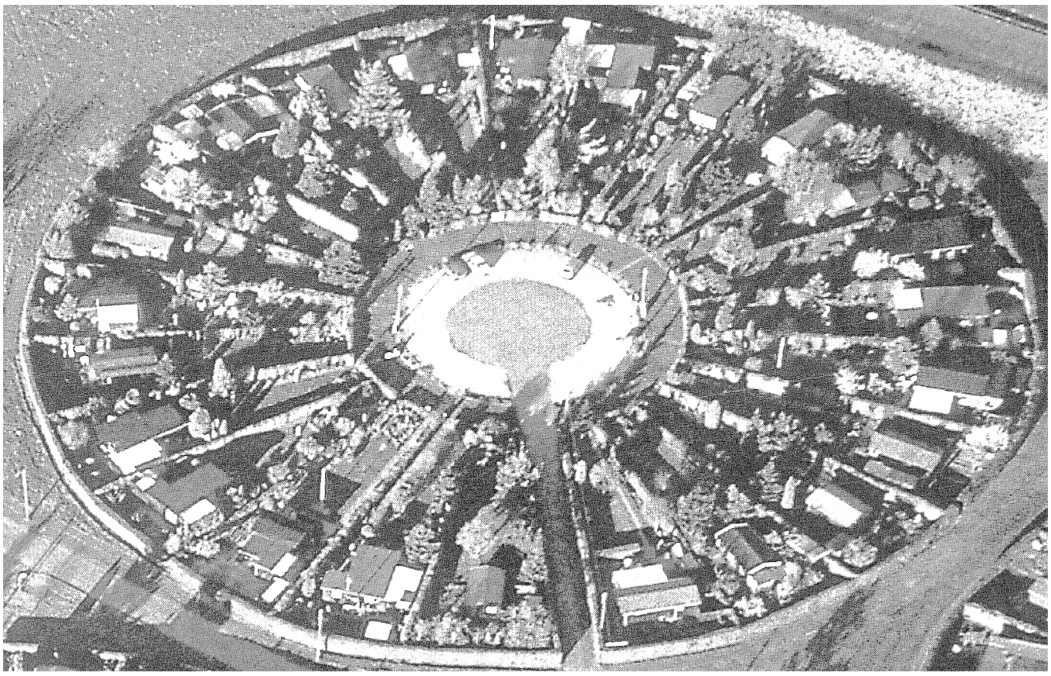
Elle attend ses proies. Où a-t-elle intérêt à s'installer pour attendre - on suppose que chacun des coins a autant de chance de lui procurer de la nourriture ?



La position idéale d'attente n'est pas forcément la même le jour (elle sait de sa place où la proie a été prise), et la nuit (elle doit faire une tournée des différentes toiles)...

Exemple 17

Pour ceux qui préfèrent des situations moins complexes, où situer le centre du village proposé sur cette page ?



Autres sujets possibles

Nous avons pris les cas du centre des secours, de la laiterie, et nous nous sommes placés par rapport à des villages.

On aurait pu se placer dans une ville ou dans un quartier, et on aurait pu essayer d'y mettre un hôpital, un poste de police, une bibliothèque, un bureau de poste, un lycée, un stade, un cinéma, une caserne de pompiers, un supermarché, un château d'eau, une déchetterie, un relais- télé...

On aurait pu se placer dans un magasin, dans un entrepôt, dans une entreprise, dans un établissement scolaire et on aurait pu essayer d'installer un distributeur de boissons, un service de photocopies, une borne incendie, une chaufferie, un bureau de surveillance, une infirmerie...

On peut imaginer aussi des problèmes d'alimentation en eau (arrosage d'un jardin, ou alimentation en eau chaude pour un chauffage collectif) ou produits chimiques pour lesquels il faut à la fois minimiser les longueurs des tuyaux, et apporter les produits aux bons endroits...

On aurait pu se placer dans une région, et y installer une centrale électrique, un terrain d'aviation ou un aéroport, une centrale d'achats,...

On peut aussi partager un territoire et étudier l'installation de plusieurs stations : des bureaux de poste ou des postes de police dans une ville, des supermarchés ou hypermarchés d'un même groupe en fonction d'une sphère d'influence de chaque type de magasin et de la densité de la population, des dépanneuses ou des chasse-neige le long d'une autoroute...

A côté du problème du meilleur choix ou de l'emplacement idéal, (qui est rarement la solution adoptée), on peut poser le problème du tracé de zones concentriques autour de cet emplacement idéal en fonction de valeurs qui restent proches de la valeur minimale obtenue au "centre".

On peut partir du problème inverse : les villes d'une région sont installées à certains endroits bien précis. Comment construire une (ou plusieurs) autoroute(s), ou une ligne T.G.V. pour les relier, où implanter des lignes haute-tension... compte tenu chaque fois du coût de l'installation et du bénéfice qu'en tirent les usagers ?

On peut organiser un supermarché avec les zones où les camions déposent les marchandises, les zones où sont stockées ces marchandises, les rayons où elles sont exposées ensuite... en cherchant chaque fois à minimiser des distances ou des coûts.

Remarque : il existe de nombreux logiciels de jeux informatiques sur ces thèmes, logiciels de constructions de villes (avec implantation d'industries, commerces, services publics, avec implantation de réseaux d'électrification, de liaison routière, et réseau de transport en commun, avec étude du développement économique, culturel, de la gestion politique de la cité ...), logiciels de construction de lignes de chemin de fer... Quels sont les critères utilisés par ces logiciels ? Les élèves peuvent-ils en créer ? Pourquoi pas ?

BIBLIOGRAPHIE

Brochures sur probabilité et statistiques

COMMISSION INTER-IREM STATISTIQUES ET PROBABILITES
Enseigner les probabilités au lycée — Ed. IREM de Reims - sept. 97

REPERES-IREM — Ed. Topiques - juillet 98
N° 32 : spécial probabilités

J. HARTONG — Ed. Diderot. Arts et Sciences
Probabilités et statistiques : de l'intuition aux applications — décembre 1996

E. AMZALLAC - N. PICCIOU — Ed. Hermann Paris
Introduction à la statistique — Collection Méthodes - 1978

Les grandes lignes de la statistique descriptive, un peu d'analyse combinatoire, présentation des lois statistiques usuelles, une introduction à fa statistique inductive. Beaucoup d'exemples.

C. ROBERT
L'empereur et la girafe — Ed. Diderot - Arts et sciences - 1995

Une initiation à la statistique, sous forme de leçons agréables à lire .

IREM DE PARIS NORD
Simulation d'expériences aléatoires — Ed. IREM de Paris Nord

Publication du groupe Inter-IREM " Lycées Techniques ". Une expérimentation du hasard de la première au BTS sur calculatrice et ordinateur. Beaucoup d'exemples de programmes de simulations sur ordinateur et sur calculatrice, avec adaptation à divers types de calculatrices.

IREM DE PARIS NORD
Simulation et statistiques en seconde — Ed. IREM de Paris Nord- IREM 2000
Avec un CD-Rom

Un peu de théorie et des fiches de travaux dirigés, sur ordinateurs ou sur calculatrices.

ENGEL
Les certitudes du hasard — Ed. Aléas

Adapté de l'allemand. Couvre le programme de probabilités de nos lycées. On y trouve mêlés des problèmes, des conjectures, des simulations et résultats mathématiques.

IREM DE STRASBOURG
Enseigner les probabilités en classe de première — Ed. IREM de Strasbourg - 1992

Plusieurs activités d'introduction aux probabilités dans l'esprit du programme de 1991, exercices avec éléments de correction, réflexions sur la notion de probabilité.

IREM DE STRASBOURG
Enseigner les probabilités en classe de terminale — IREM de Strasbourg - 1994

Dans le prolongement de la brochure ci-dessus, plusieurs activités introductives aux notions de probabilité conditionnelle et d'indépendance, de variable aléatoire et d'espérance mathématique, réflexions sur la notion d'indépendance et sur l'utilisation des arbres.

IREM DE TOULOUSE - GROUPE " ENSEIGNEMENT DES PROBABILITES "
Quelques activités préparatoires à l'introduction des probabilités conditionnelles et de l'indépendance Ed. IREM deToulouse - 1995

A. & M. HENRY (IREM DE BESANÇON) in Repères - IREM n°6 - janvier 1992
L'enseignement des probabilités dans le programme de première
Présentation d'une introduction au concept de probabilité en accord avec le programme de 1991, définition d'une expérience aléatoire et quelques perspectives historiques sur le "hasard".

IREM DE POITIERS Ed. IREM de Poitiers 1994
Thèmes pour l'enseignement de la statistique et des probabilités (2 tomes)

IREM DE POITIERS
A propos de l'enseignement du calcul des probabilités Ed. IREM de Poitiers

IREM DE POITIERS
Les chantiers du CHAOS Ed. IREM de Poitiers 1998
Hasard, probabilité, prédictibilité, déterminisme, modélisation...

M. HENRY & H. LOMBARDI (IREM DE BESANÇON)
Paradoxes et lois de probabilités in Repères - IREM n°13 - octobre 1993
Les deux chèvres et la voiture, le paradoxe de Bertrand.

JC. DUPERRET(IREM DE REIMS)
L'apprenti fréquentiste in Repères - IREM n°21 - octobre 1995
La rencontre entre Pierre le géomètre et Jacques le fréquentiste.

A. TOTOHASINA (IRMAR DE RENNES)
L'introduction du concept de probabilité conditionnelle :
avantages et inconvénients de l'arborescence in Repères - IREM no15 avril 1994
Présentation d'une activité de classe destinée à introduire les probabilités conditionnelles, une évaluation à la suite de cette introduction.

C. DUPUIS & S. ROUSSET-BERT (IREM ET IRMA DE STRASBOURG)
Arbres et tableaux de probabilité : analyse en termes de registres de représentation
in Repères - IREM n°22 - janvier 1996
Un point de vue nouveau à propos de la notion de probabilité conditionnelle et d'indépendance de deux événements, utilisant le cadre théorique des registres sémiotiques de représentation mis en place par R. Duval (la sémiotique est une discipline qui étudie tout système de signes pouvant servir à représenter ou à communiquer.

G. ALDON & FEURLYREYNAUD (IREM DE LYON)
Modélisation en probabilités au lycée Ed. IREM de Lyon - septembre 94
Une première partie qui présente différentes modélisations d'un même problème, une deuxième partie met en évidence les implicites liés aux situations de modélisation, enfin probabilités conditionnelles.

B. PARZYSZ
Un outil sous-estimé : l'arbre probabiliste in bulletin APMEP n°372 - février 1990

M. GHESQUIERE & C. PARISELLE
Probabilités et statistiques en première Ed. IREM de Grenoble - février 1993

Présentation d'une séquence de travail expérimentée dans des classes non scientifiques " ; un journal de classe de première S au moment des statistiques...

IREM de MONTPELLIER
Des statistiques à la pensée statistique Ed. IREM de Montpellier - printemps 2001

Deux points de vue généraux sur l'enseignement des statistiques, épistémologiques et historiques, une présentation des nouveaux programmes suivie de deux points de vue didactiques, des idées d'activités pour la classe avec des prolongements mathématiques, et des références bibliographiques.

Quelques références plus théoriques

Nicolas BOURBAKI
Eléments de mathématiques, fonction d'une variable réelle Hermann

A un niveau très raisonnable chez ce grand auteur, tous les principaux résultats sur les fonctions convexes.

Marcel BERGER
Géométrie Cedic/Fernand-Nathan

Le tome 3 est entièrement consacré à la convexité.

J.LELONG-FERRAND J.-M. ARNAUDIES
Cours de Mathématique, tome 2, analyse. Dunod

Comme tous les livres de Math-Sup -Math-Spé. ou 1er cycle universitaire, on parle de la convexité.

D.GUINEN, F.AUBONNET, B.JOPPIN
Precis des Mathematiques (5 tomes), Breal.

Idem.

WEISZFELD E.,
"Sur le point pour lequel la somme des distances de n points donnés est minimum",
Tohoku Mathematics Journal, Vol.43,1937, pp.355-386.

L'auteur de la résolution d'un des problèmes de minimisation.

R.L. FRANCIS, L.F. McGINIS, J.A. WHITE
"Facility Layout and Location : An Analytic Approach" Prentice Hall, 1992.

Le chapitre 4 intitulé "Planar Single-Facility Location Problem" raconte beaucoup de choses ...

L.J. BASS et S.R. SCHUBERT
"On finding the disc of minimum radius containing a given set of points",
Math.Comp.,12:712-714,1967

Quelques articles sur le sujet.

R. OSSERMANN
"Circumscribed circles",
American Mathematical Monthly, Vol. 98, Number 5, May 1991, pp.419-422.

G. CHRYSTAL,
"On the problem to construct the minimum circle enclosing n given points in the plane",
Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, Vol.3, 1885, pp.30-33.

L'article plus ancien que j'ai lu sur ce thème ...

Il y a aussi des ouvrages de recherche plus récents en géométrie qui concernent en particulier le paragraphe relatif aux liens avec la recherche actuelle en géométrie.

J. CHEEGER, [Che], Critical points of distance functions and applications to geometry, Geometric topology : recent developpements (Montecatini Terme 1990), 1-38, Lecture Notes in Math., 1504, Springer, Berlin 1991.

R. GREENE, [Gre], Some concepts and methods in Riemannian geometry, Amer. Mat. Soc. Proc of Symposia in Pure Math. **54** (3), 1-22 (1993).

J. MILNOR, [Mil], Morse Theory, Princeton Univ. Press, Princeton 1963.