



Enseigner la preuve en mathématiques pour former le citoyen au raisonnement, à l'autonomie et au débat scientifique

ANNECY, GRENOBLE - CYCLES 1 À 4

Hypothèse de travail n°1 – Une pratique adéquate de la preuve mathématique en classe permet le développement de l'argumentation et favorise l'autonomie des élèves.

Hypothèse de travail n°2 – La mise en œuvre en classe du débat scientifique permet une pratique adéquate de la preuve en mathématiques.

Hypothèse de travail n°3 – La preuve en mathématiques se pratique dans le cadre de la résolution d'un problème.

Question de recherche n°1 – Est-il possible, grâce à une progression dans l'enchaînement de situations de recherche – et de problèmes s'en approchant – d'amener les enseignants à une pratique adéquate, favorisant l'autonomie, la responsabilité scientifique des élèves et le débat scientifique ?

Question de recherche n°2 – Quels bénéfices en retirent les élèves, en termes d'apprentissages et d'attitudes ?

La preuve en mathématiques est à la fois un processus et un produit. C'est un processus qui vise à lever le doute, à valider, à établir la vérité, à convaincre, mais aussi à expliquer. La preuve est aussi un produit pour communiquer, oralement ou à l'écrit, des mathématiques, en tant que résultats, aboutissement d'un travail d'écriture et de verbalisation, qui accompagne le processus tout du long. La preuve se construit ainsi lentement au cours d'une période expérimentale visant la résolution d'un problème (Gandit, 2008). A ces dimensions de processus/produit, d'une part, de validation/explication, d'autre part, s'en ajoute une troisième, celle qui relève du couple syntaxe/sémantique. L'enseignement-apprentissage de la preuve s'articule autour de ces trois dimensions, qui, par les attitudes qu'elles encouragent, font ainsi apparaître le lien étroit entre la pratique de la preuve en mathématiques et la pratique du raisonnement, de l'argumentation, de l'explication.

En mathématiques la pratique de preuve est aussi une activité sociale. Toute preuve nécessite l'existence d'une personne qui l'écoute ou la lit. La transposition en classe de cette pratique amène à développer la socialisation des élèves au sens qu'elle nécessite que la classe fonctionne comme une communauté scientifique, dans laquelle on accepte ou rejette des arguments fondés sur des raisons objectives. Elle nécessite de la part des élèves une attitude d'écoute au sens où, pour échanger des arguments, les élèves doivent s'intéresser aux arguments des autres et accepter le

débat, le débat scientifique (Legrand, 1992). Par suite, il faut apprendre à reconnaître l'erreur dans le cas où un argument de preuve l'atteste. Il faut savoir différencier les résultats établis et les conjectures, dont on n'a pas encore construit la preuve. Cette attitude de preuve n'est pas innée ; le « pourquoi » en mathématiques ne peut pas être appris en référence à l'autorité (Brousseau, 1998, p. 39). Il faut aussi être curieux et créatif. Ainsi la pratique de la preuve conduit à la formation de l'esprit critique, aidant à la prise de décision en dehors des mathématiques.

Hypothèse de travail n°4 – La pratique de la preuve en classe est difficile à mettre en œuvre en classe du fait, d'abord, de sa nature de processus qui accompagne la résolution d'un problème, ainsi que de la nécessité d'installer un contrat didactique permettant le débat.

Hypothèse de travail n°5 – Il existe des situations de recherche adaptées à la classe qui permettent, si elles sont gérées adéquatement, la pratique de la preuve dans toutes ses dimensions.

Ces situations reposent sur des problèmes issus de la recherche en mathématiques discrètes, dont les analyses mathématique et didactique révèlent les potentialités concernant la pratique de la preuve et l'apprentissage du raisonnement (Da Ronch et al., 2020).

Ces situations de recherche pour la classe, nous les considérons comme un modèle de situation pour travailler la démarche scientifique en mathématiques. Elles satisfont aux critères suivants (Grenier & Payan, 2002 ; Gandit et al., 2011) :

1. le problème qui est au cœur de la situation est en lien avec des problèmes de la recherche actuelle en mathématiques discrètes ; il peut donc comporter plusieurs solutions ou aucune solution..., contrairement à la majorité des problèmes proposés à l'école, qui, bien souvent, comportent une, et une seule, solution ; ce problème, dans toute sa généralité comporte des variables, dont différentes valeurs vont conduire à des sous-problèmes, ce sont les *variables de recherche* (Godot, 2005) ;
2. les méthodes de résolution ne sont pas désignées, plusieurs pistes peuvent être suivies, aussi bien dans la résolution que dans le choix des sous-problèmes ;
3. les connaissances scolaires nécessaires pour comprendre la question posée au départ sont élémentaires, elles sont *disponibles* (Robert & Rogalski, 2002) ;
4. la question posée au départ est facilement compréhensible ;
5. le domaine conceptuel dans lequel se situe le problème, même s'il n'est pas familier, est d'un accès facile, qui permet aisément de s'engager dans la résolution, faire des essais, des conjectures, développer des pistes de résolution, prouver la vérité de certaines conjectures, en invalider d'autres, autrement dit, qui permet de développer différentes catégories d'*actions scientifiques* (Gandit, 2015) de la part de la personne qui cherche à résoudre le problème, l'engageant de ce fait dans un rapport à la vérité ;

6. une question résolue peut amener à se poser de nouvelles questions – ceci renvoie à l'action de *Questionner* (ibid., p.69) – la résolution pourrait se poursuivre, elle s'arrête au moment décidé, sans que nécessairement le problème ne soit résolu ;
7. les apprentissages en jeu relèvent de compétences ou connaissances d'ordre 2 (Sackur et *al.*, 2005), c'est-à-dire de méthodes de recherche, de raisonnements, de connaissances de logique...
8. la résolution du problème est collaborative, les élèves travaillent en groupe, et la communication des résultats se réalise dans le cadre d'un séminaire à l'extérieur de la classe ou dans le cadre d'un débat scientifique (Legrand, 1992).

Les critères 3, 4 et 5 sont favorables au processus de *dévolution* du problème (Perrin-Glorian, 1997), qui est renforcé par la mise à disposition de matériel à manipuler. Ce matériel est complètement lié au problème, sans habillage superflu.

Les critères 1, 2, 5, 6 et 8 montrent que ces problèmes permettent de développer la démarche d'investigation en mathématiques, plus précisément les différentes actions scientifiques des élèves.

Dans le cas de la mise en œuvre d'une situation de recherche à visée didactique, nous ajoutons un critère :

9. la situation comporte une phase d'institutionnalisation des méthodes de recherche, des raisonnements..., plus généralement des *outils* en jeu à propos du problème ou mis en œuvre lors de sa résolution, qui prennent ainsi le statut d'*objets* (Douady, 1986).

Pour des exemples, nous renvoyons à Gandit et *al* (2011) pour *Les entrepôts de dynamite* et *La roue aux couleurs*, Ouvrier-Bufferet (2017) pour *La chasse à la bête*, Da Ronch et *al* (2020) pour *Le problème de Wang...*

La progression mise au point et expérimentée depuis 3 ans du cycle 1 au cycle 3 comporte, dans l'ordre, les problèmes suivants. Chaque problème sert de problème de référence pour une période et est suivi de variantes pour que les élèves puissent comprendre et réinvestir les connaissances visées.

1. Les Tours



C'est un problème de dénombrement.

« En désignant par n et p des nombres entiers naturels, construire une tour en superposant n cubes de p couleurs différentes. ».

Une fois compris qu'on a plusieurs solutions et ce que signifie que des tours sont différentes, il est

demandé de trouver toutes les solutions.

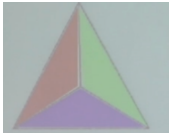
Enoncé expérimenté en cycles 1, 2 et 3 avec $n = 3$ et $p = 3$.

Enoncé expérimenté en cycle 3 avec $n = 4$ et $p = 4$.

Des variantes ont été expérimentées : en cycle 3, les tours de 4 étages à 4 couleurs sont remplacées par des tuiles de Wang à 4 couleurs (dessinées) (pas de rotation, ni de symétrie autorisée).



Autre variante expérimentée en cycle 2 :



Triangles découpés en 3 triangles, les 3 triangles pouvant prendre 4 couleurs différentes (jaune, bleu, rouge, vert).

Les connaissances visées :

- Un problème peut avoir plusieurs solutions.
- On s'organise pour trouver toutes les solutions, pour être sûr qu'il n'y en a pas d'autres.

2. La monnaie



On dispose de différentes valeurs monétaires, chaque valeur en nombre fixé (ou non, dans un premier temps).

On se demande si on peut payer n'importe quel montant avec ces valeurs.

On se demande si on peut payer un montant fixé à l'avance et, si oui, de quelle manière.

Enoncé expérimenté en cycle 1 : on peut remplacer les pièces et les billets par du matériel de type Numicon et poser la question suivante (pour les élèves de grande section) : « Est-il possible de faire le nombre 20 avec les Numicon que vous avez sur la table ? ». Les élèves disposent de 5 Numicon de 5 et de 12 Numicon de 2 sur la table.

Pour les MS : remplacer 20 par 10, mettre sur la table 3 Numicon de 5 et 12 Numicon de 2.

Pour les PS : remplacer 20 par 6, mettre sur la table 3 Numicon de 3 et 4 Numicon de 2.

Enoncé expérimenté en cycle 2 ::



La maman d'Alix veut donner 20 euros à sa fille pour son anniversaire. Elle dispose de 5 billets de 5 euros et de 12 pièces de 2 euros. Peut-elle donner 20 euros à Alix ? Si oui, comment ?

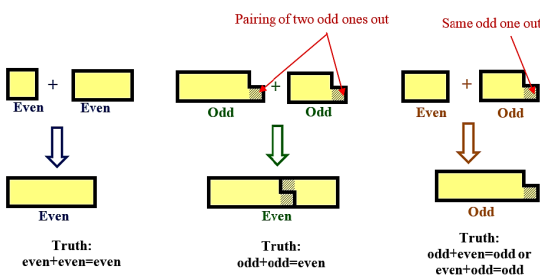
Enoncé 1 expérimenté en cycle 3 : « On dispose de 12 billets de 20 euros et de 12 billets de 5 euros. Est-il possible de faire une somme de 200 euros ? Si oui, comment ? Si non, pourquoi ? »

Enoncé 2 expérimenté en cycle 3 : « Alice a 112 images à ranger dans des albums. Le magasin propose des albums de 12 et de 8 images. Comment Alice peut-elle faire pour n'avoir que des albums complets ? Que peut-elle acheter ? »

Les connaissances visées :

- Un problème peut avoir plusieurs solutions.
- On s'organise pour trouver toutes les solutions, pour être sûr qu'il n'y en a pas d'autres.
- Pour démarrer une recherche, on fait des essais.
- On contrôle sa réponse.

3. Les nombres pairs / impairs



Huang, 2017

« La somme de deux impairs est un nombre impair. Vrai ou bien faux ?

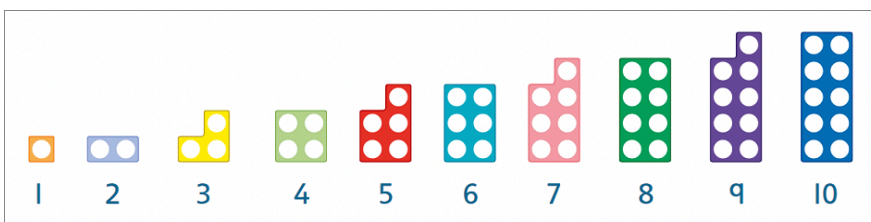
Faire une conjecture sur la somme de deux nombres impairs.

Comment être sûr qu'elle est vraie ? »

L'étude de ces questions sera l'occasion de construire la notion de parité (ce qu'est un nombre pair, ce qu'est un nombre impair).

La preuve peut être « sans mot » (voir ci-dessus).

En cycle 1, le matériel Numicon peut aider.



B. Danjou, 2020

Les connaissances visées :

- Faire des essais permet de dégager une généralité en réponse au problème.
- Pour prouver qu'une généralité est fausse, il suffit de trouver un cas où elle ne fonctionne pas.
- Pour prouver qu'une généralité est vraie, il faut développer des arguments pour convaincre, pour apporter une preuve.

4. Logikville

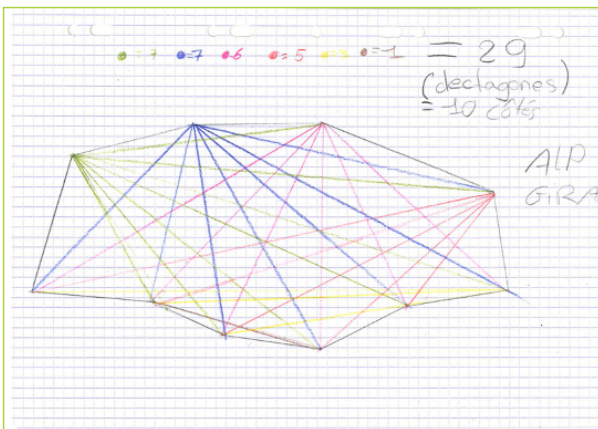
Cartes qui lancent des défis de logique.



Expérimenté en cycle 1

On peut utiliser du matériel moins sophistiqué : des grilles et des jetons.

5. Les diagonales



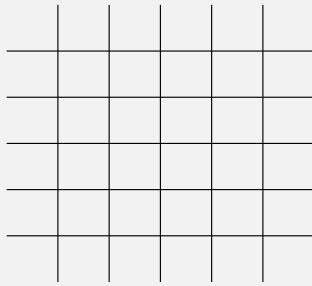
Combien un polygone a-t-il de diagonales ?

Les connaissances visées :

- Faire des essais, sur des cas simples, permet de comprendre le problème.
- Faire des essais permet de dégager une généralité en réponse au problème.
- Pour prouver qu'une généralité est fausse, il suffit de trouver un cas où elle ne fonctionne pas.
- Pour prouver qu'une généralité est vraie, on développe des arguments pour convaincre, pour apporter une preuve.

6. La grille

Ce problème consiste à déterminer le nombre maximum de points qu'on peut placer sur les nœuds d'un quadrillage régulier carré de taille n , sans qu'il n'y ait aucun alignement de trois points, dans toutes les directions



Quel est le nombre maximum de points qu'on peut placer sur les intersections de cette grille sans former aucun alignement de trois points ?

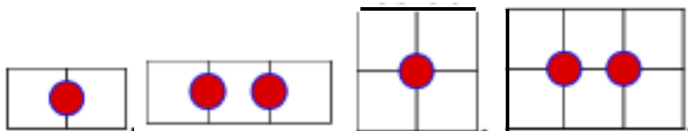
Les connaissances visées :

- Si l'on trouve une grille à p points, on en déduit que le maximum est plus grand que p .
- Pour prouver qu'il est impossible de trouver une grille à plus de 10 points, il faut argumenter.
-
-
-
-

7. Les Gommettes

(Référence : article de Grand N)

On assemble des carrés de papier tous identiques à l'aide de gommettes, de telle sorte que les carrés tiennent en un seul bloc.



Assembler le plus possible de tels carrés avec 6 gommettes.

Quel est le nombre maximum de carrés qu'on peut assembler avec 6 gommettes ?

On notera qu'on assemble un carré à un autre en faisant en sorte que les deux carrés aient un côté commun.

8. Pavages de Wang

(Da Ronch, 2020)

Voici une tuile de Wang :



On assemble des tuiles de

Wang en respectant la couleur sur le bord.



valide



non valide

Est-il possible de paver des rectangles dont les couleurs des bords sont imposées ?

9. Le carrelage de la salle de bain

(Gandit, 2008)

Le carrelage de la salle de bain

On considère un quadrillage carré à cases carrées de dimension n (la salle de bain) avec un trou d'une case (pour mettre le lavabo).

Est-il possible de le paver avec des dominos ?

maths à modeler

30