Réseaux de Petri

1 Présentation

Un réseau de Petri se présente sous la forme d'un graphique composé de places (les cercles), d'arcs (les flèches) et de transitions (les rectangles). Chaque place peut accueillir des jetons, qui vont se déplacer de place en place lorsque les transitions sont activées. Un exemple de réseau de Petri composé de deux places, deux arcs et une transition est donné Figure 1.

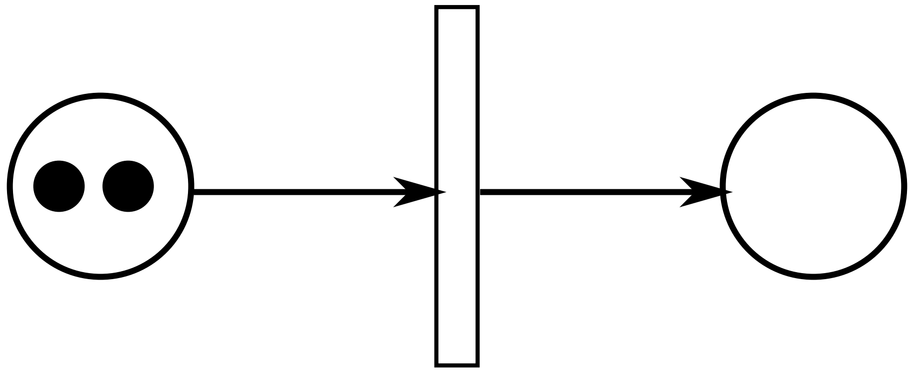
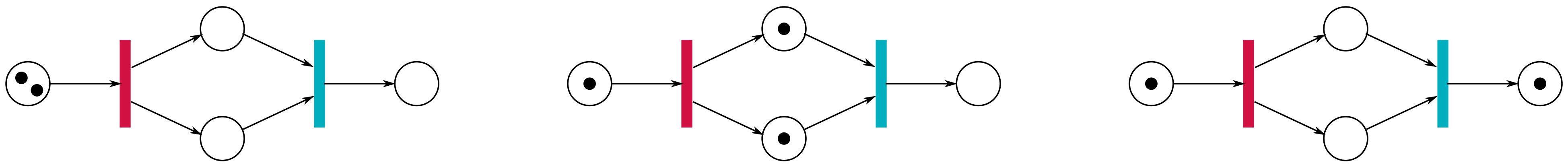


FIGURE 1: Un exemple de réseau de Petri

Pour faire se deplacer les jetons, on doit activer des transitions. Lorsqu'une transition est activée, un jeton est retiré de chaque place correspondant à une flèche entrant, et un jeton est ajouté dans chaque place correspondant à une flèche sortante. Les flèches entrantes correspondent aux jetons consommés pour activer la transitions, et les flèches sortantes correspondent aux jetons produits après activation de la transition. Il n'y a pas forcément de lien entre le nombre de jetons consommés et produits : on peut avoir un transition qui produit plus de jetons qu'elle en consomme, et inversement. On peut activer les transitions dans n'importe quel ordre, à condition de pouvoir leur fournir des jetons ! Un exemple d'activation est donné Figure 2. Notons qu'à la fin de l'exemple on ne peut plus activer bleue car on ne dispose pas des jetons nécessaires dans les places centrales.



(a) Situation initiale (b) Après transition rose (c) Après transition bleue

FIGURE 2: Un exemple d'activations

2 Prise en main

2.1 À vous de jouer - réseaux donnés

Pour chacun des réseaux suivants (Figures 4, 5 et 6), montrer l'évolution du réseau lorsque l'on applique la séquence de transitions donnée.

2.2 À vous de jouer - construire des réseaux

Construisez un réseau de Petri basé sur la Figure 3 permettant de mettre dans la place `sortie` l'addition des jetons contenus dans les places `entrée`. Vous êtez libres de rajouter toutes les places, arcs ou transitions que vous souhaitez. Donnez également la séquence de transitions permettant de réaliser une telle addition.

Même question pour la soustraction (jetons de la place du haut - jetons de la place du bas) et la multiplication. Pour aller plus loin, proposez un réseau de Petri pour l'opération `maximum` qui transmet tous les jetons de la place qui en contient le plus dans la place de sortie, et un autre réseau pour l'opération `minimum` qui transmet tous les jetons de la place qui en contient le moins dans la place de sortie.

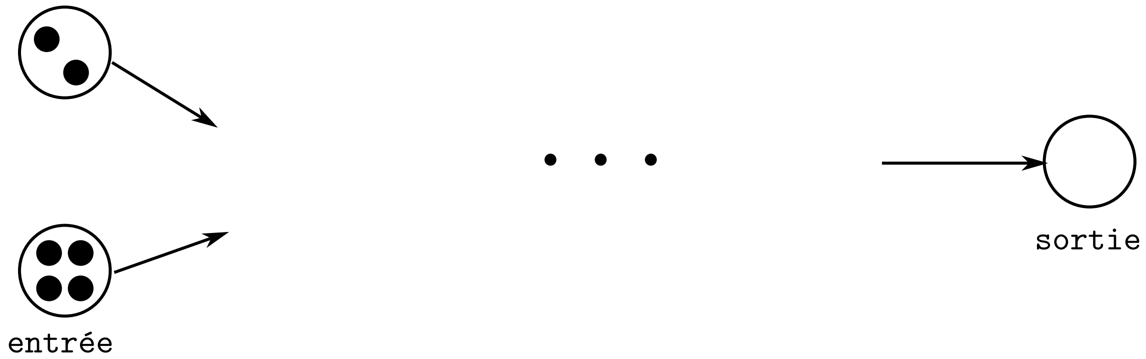


FIGURE 3: Base de réseau pour +, - et ×

Modélisation

2.3 La chèvre et le chou

On se propose de modéliser par un réseau de Pétri le problème du passage de rivière. Jean veut traverser une rivière en compagnie d'un loup, d'une chèvre et d'un chou. Pour cela, il dispose d'une unique barque qui ne peut accueillir que Jean et un autre "passager" (loup ou chèvre ou chou). Le loup mangera la chèvre si Jean n'est pas là pour les surveiller, et de même la chèvre mangera le chou. On pourra introduire deux types de transitions :

- Les transitions que Jean peut activer pour résoudre son problème ;
- Des transitions perdantes : si l'une d'elle devient activable, alors Jean a échoué !

Décrivez le réseau de Pétri, la position initiale des jetons, et la position finale des jetons que Jean cherche à atteindre. Bonus : trouvez une séquence de transitions gagnante !

2.4 Le dîner des philosophes

On considère quatre philosophes assis autour d'une table ronde. Chacun a une assiette de spaghettis en face de lui... Mais le philosophe chargé d'amener les couverts n'a pris qu'une fourchette par personne. Les spaghettis étant difficiles à manger, un philosophe a besoin de deux fourchettes pour manger. Ils se proposent donc de mettre une fourchette entre chaque assiette, et décident de procéder comme suit pour leur repas :

- Au départ, les philosophes parlent et ne mangent pas.
- Lorsque l'un d'entre eux a faim, il commence par prendre la fourchette à sa gauche.
- Il prend ensuite la fourchette à sa droite et commence à manger.
- Lorsqu'il n'a plus faim, il repose les deux fourchettes en même temps et recommence à parler.

Modélisez cette situation à l'aide d'un réseau de Petri et aidez les philosophes affamés à se nourrir !

2.5 Le retour du jeu de Nim

2.5.1 Première approche

On considère un jeu à deux joueurs qui fonctionne de la façon suivante : on dispose 10 bâtons au centre de la table, et, lors de son tour, chaque joueur peut en retirer 1, 2 ou 3. Le joueur qui retire le dernier bâton a perdu. Modéliser ce jeu à l'aide d'un réseau de Petri.

2.5.2 Pour aller plus loin

On dispose désormais 100 bâtons. Modéliser cette nouvelle situation. Même question avec 1000 bâtons, puis 10000 bâtons.

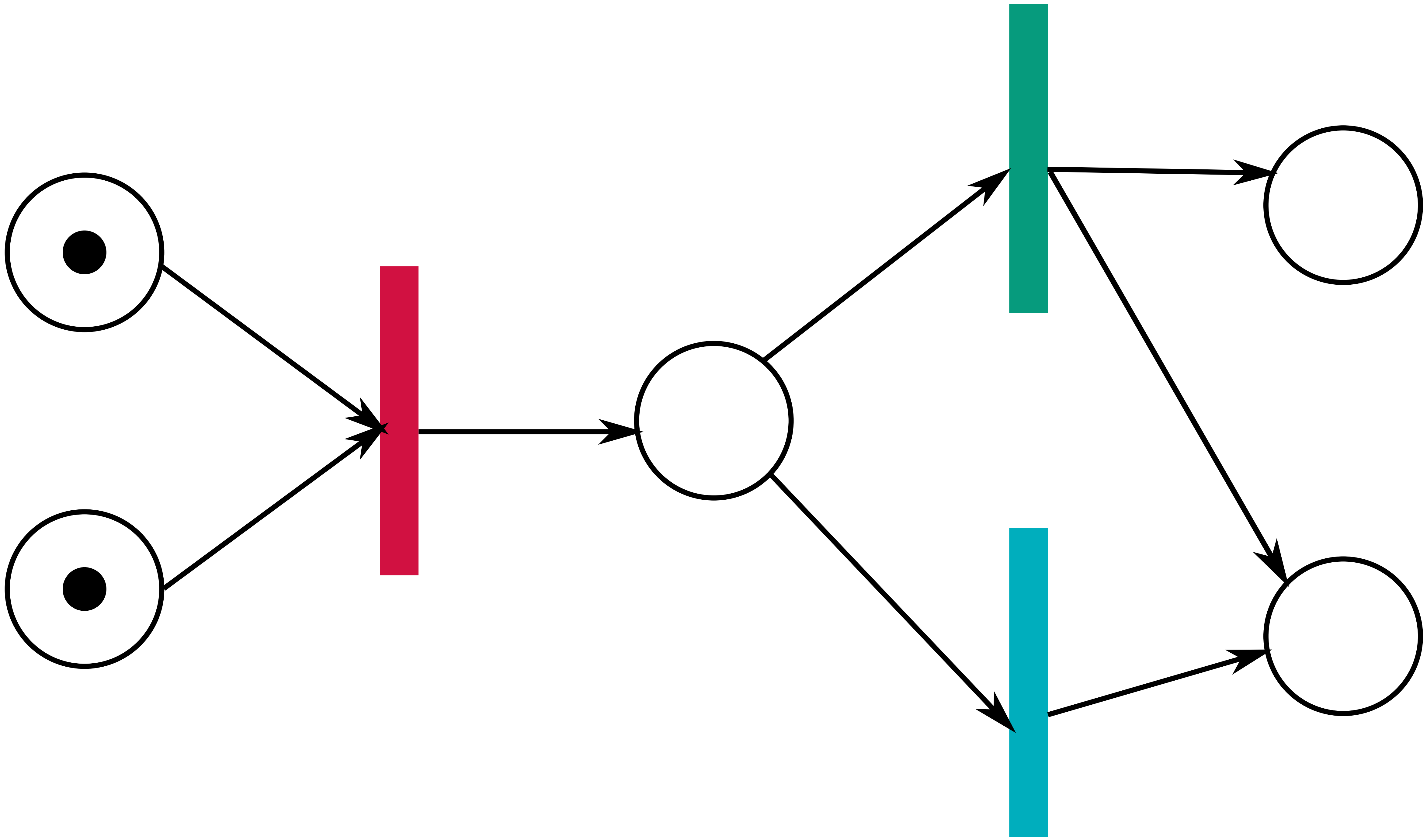


Figure 4: R V B

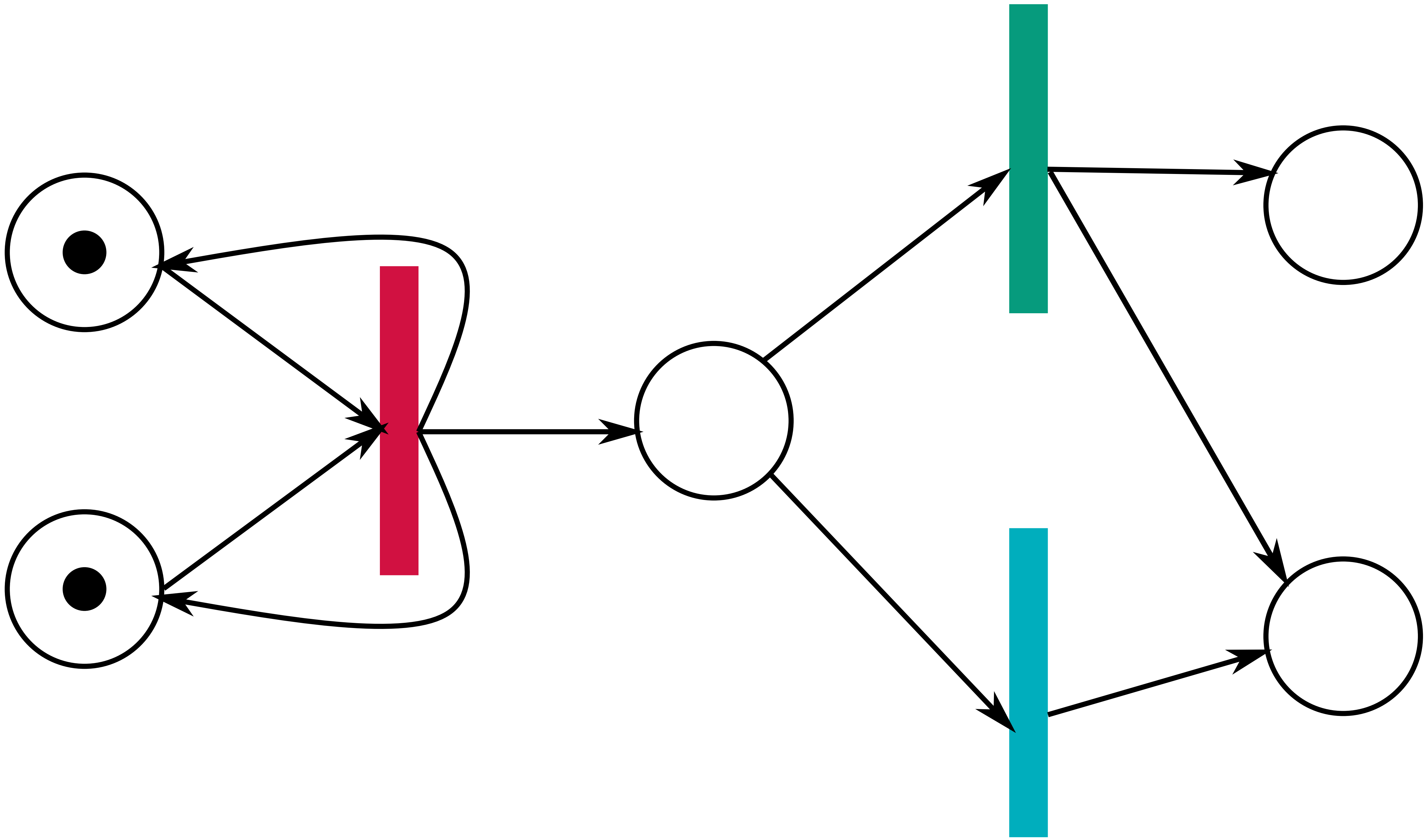


Figure 5: R R R V B

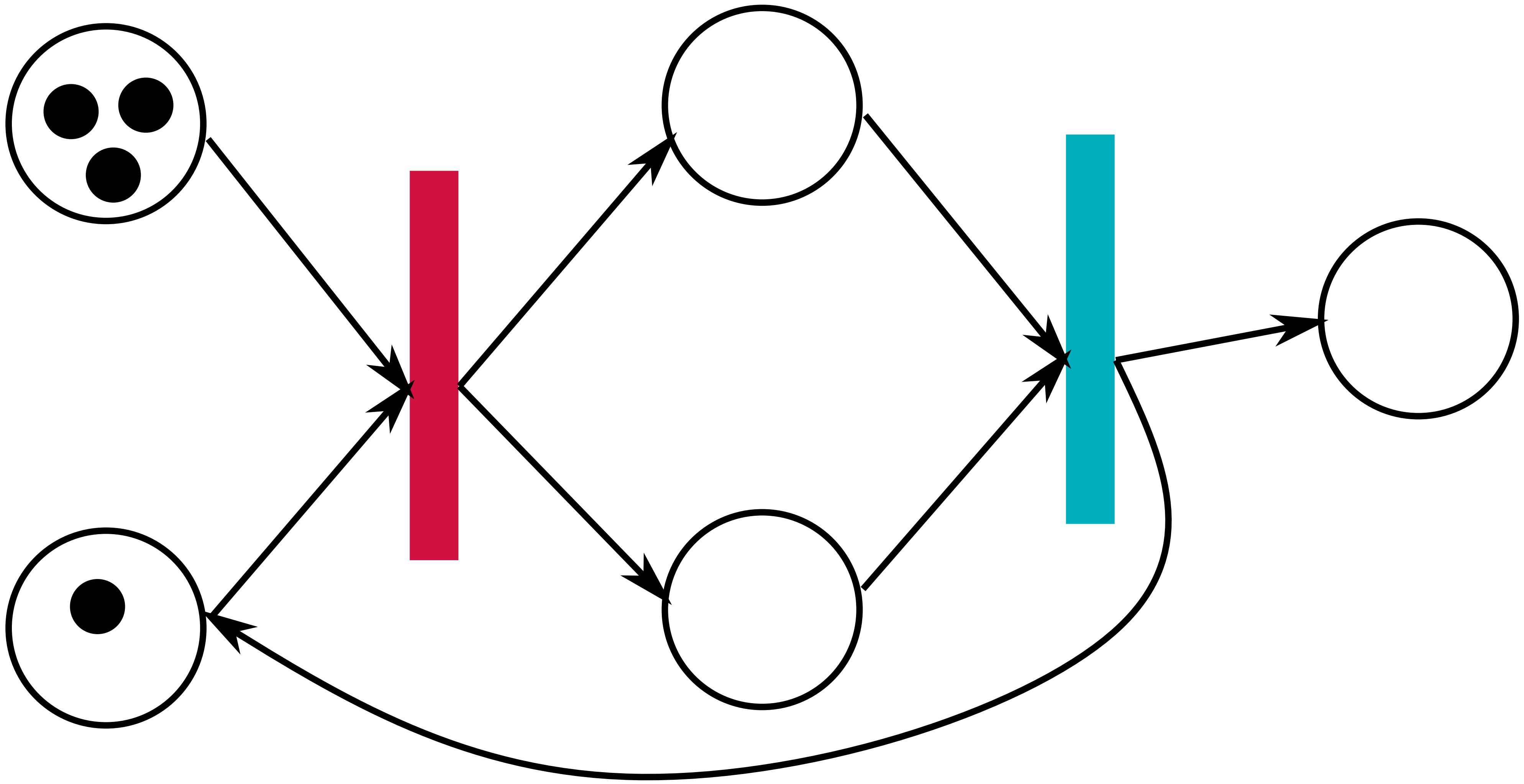


FIGURE 6: R B R B R B R

Jeux

On propose d'étudier un jeu basé sur les réseaux de Petri, donné Figure 7. Ce jeu se joue à deux et se déroule de la façon suivante : chacun leur tour, les joueurs doivent activer une transition du réseau. Le premier joueur a ne plus pouvoir activer de transition a perdu ! Existe-t-il une stratégie gagnante pour le premier (ou le second) joueur ? Le réseau présenté est extrait de http://irem.univ-reunion.fr/IMG/pdf/petrigames1.pdf

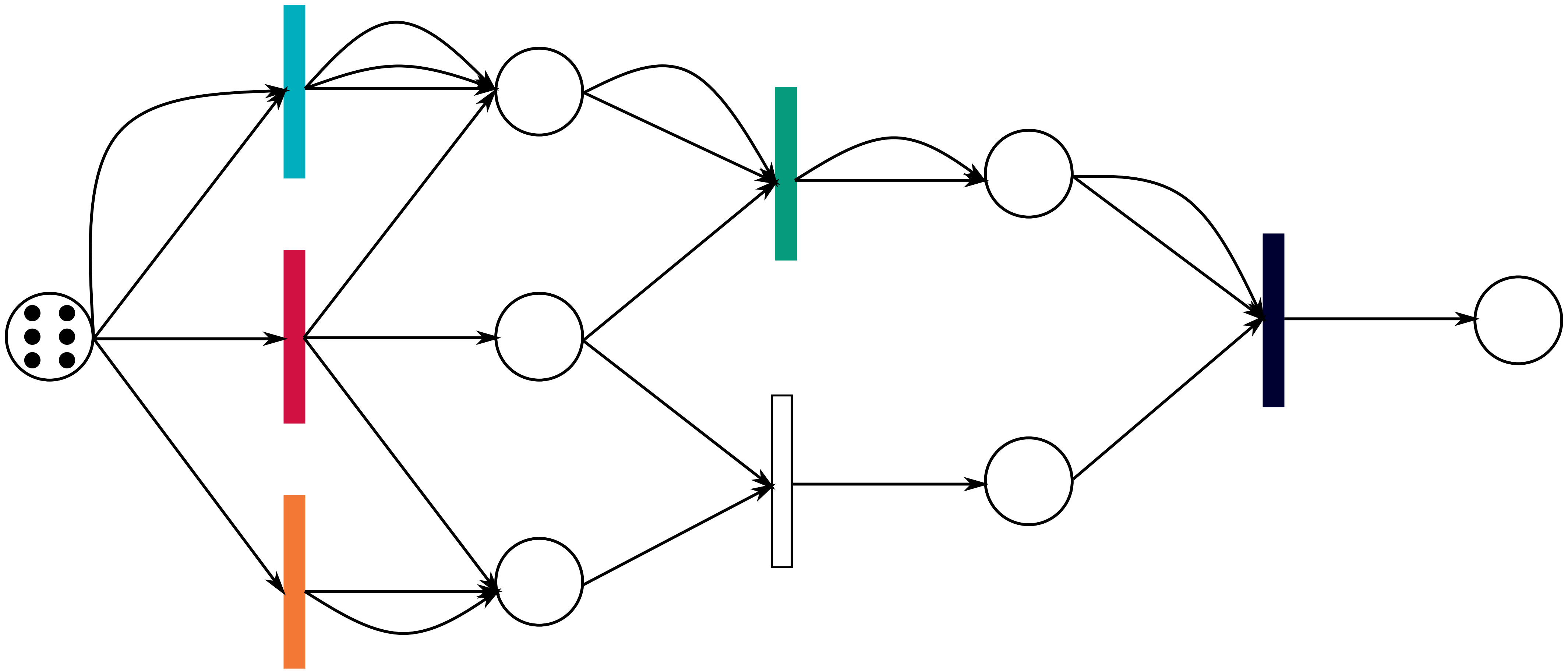


Figure 7: Jeu de Petri 1

Puzzles

Les réseaux présentés Figure 8 et Figure 9 sont des réseaux-puzzles : leur objectif consiste à amener tous les jetons des places vertes à la place bleue, sans qu'aucune des places blanches ne contienne le moindre jeton à la fin. Pour chacun d'entre eux, pouvez-vous donner une séquence de transitions permettant d'arriver à ce résultat ?

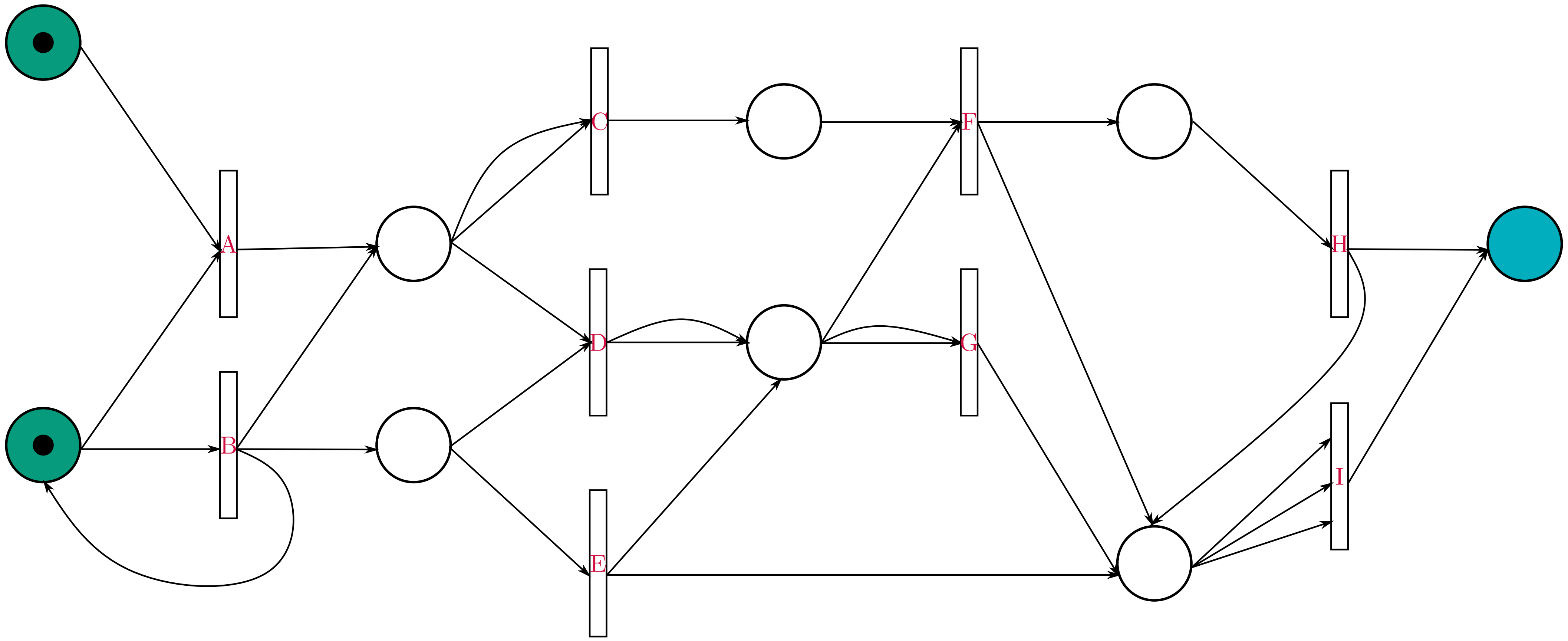


FIGURE 8: Réseau puzzle 1

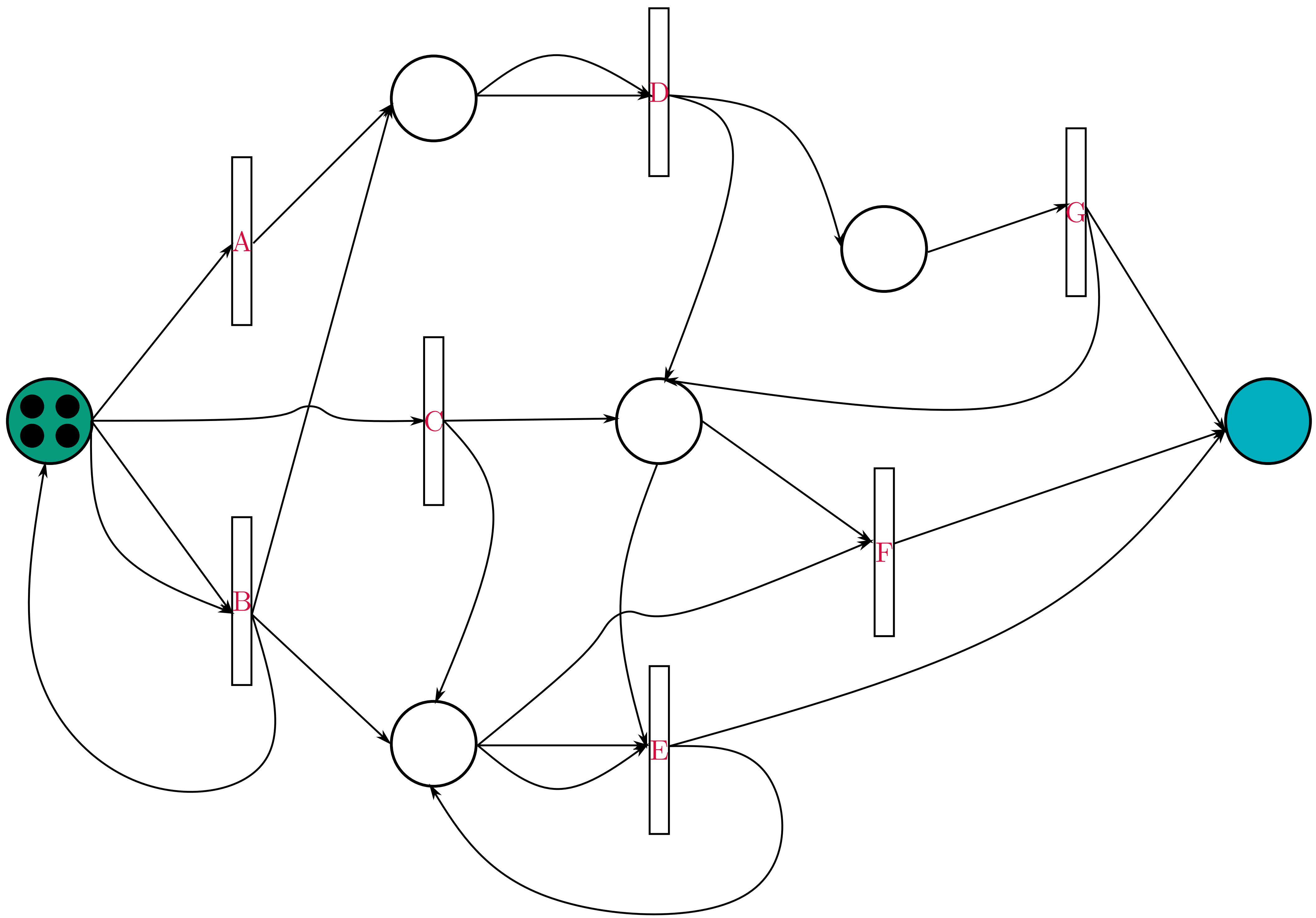


Figure 9: Réseau puzzle 2