Approcher π

Approcher π

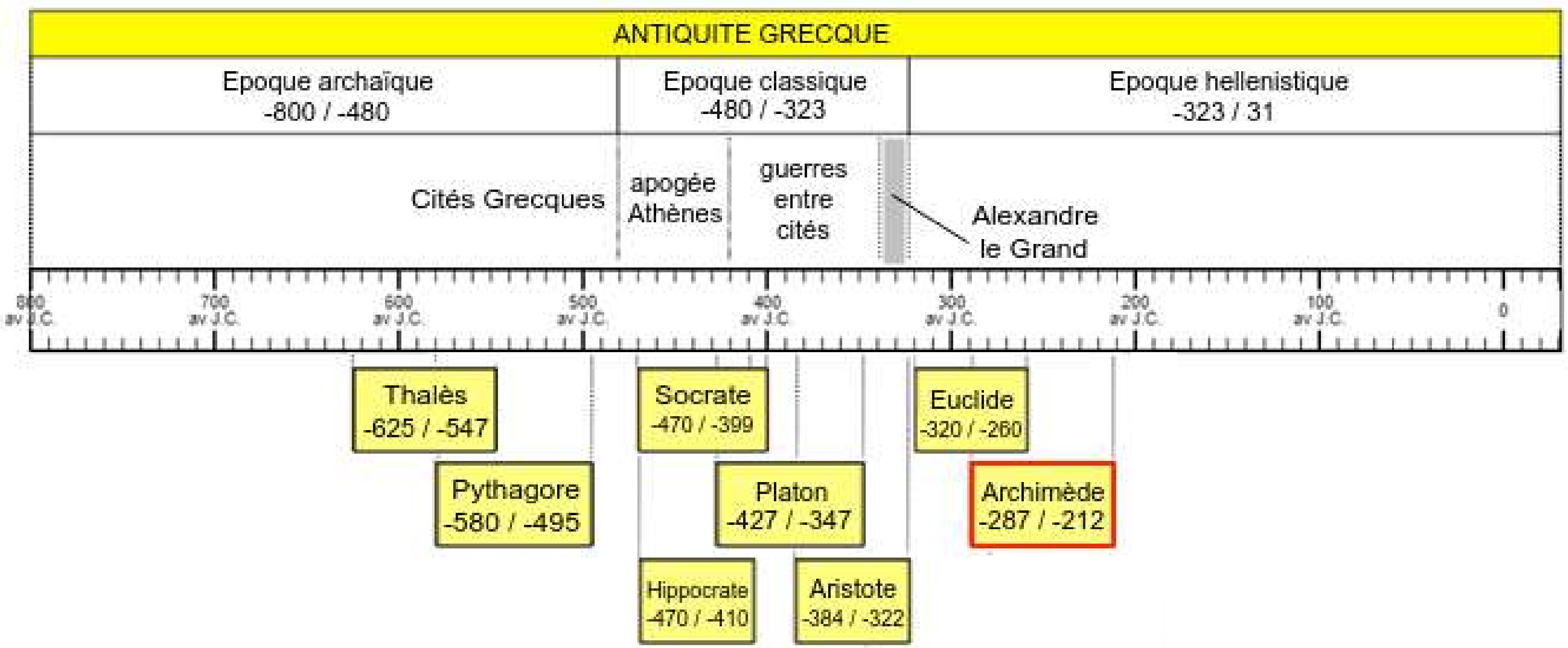
Archimède de Syracuse (-287/-212)

Liu Hui (225/295)

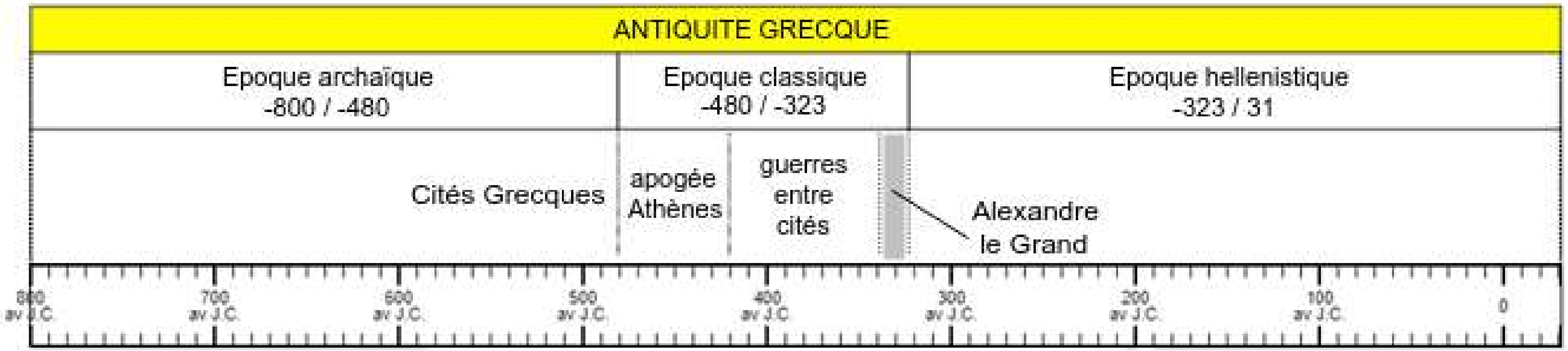
Approcher π

Archimède de Syracuse (-287/-212)

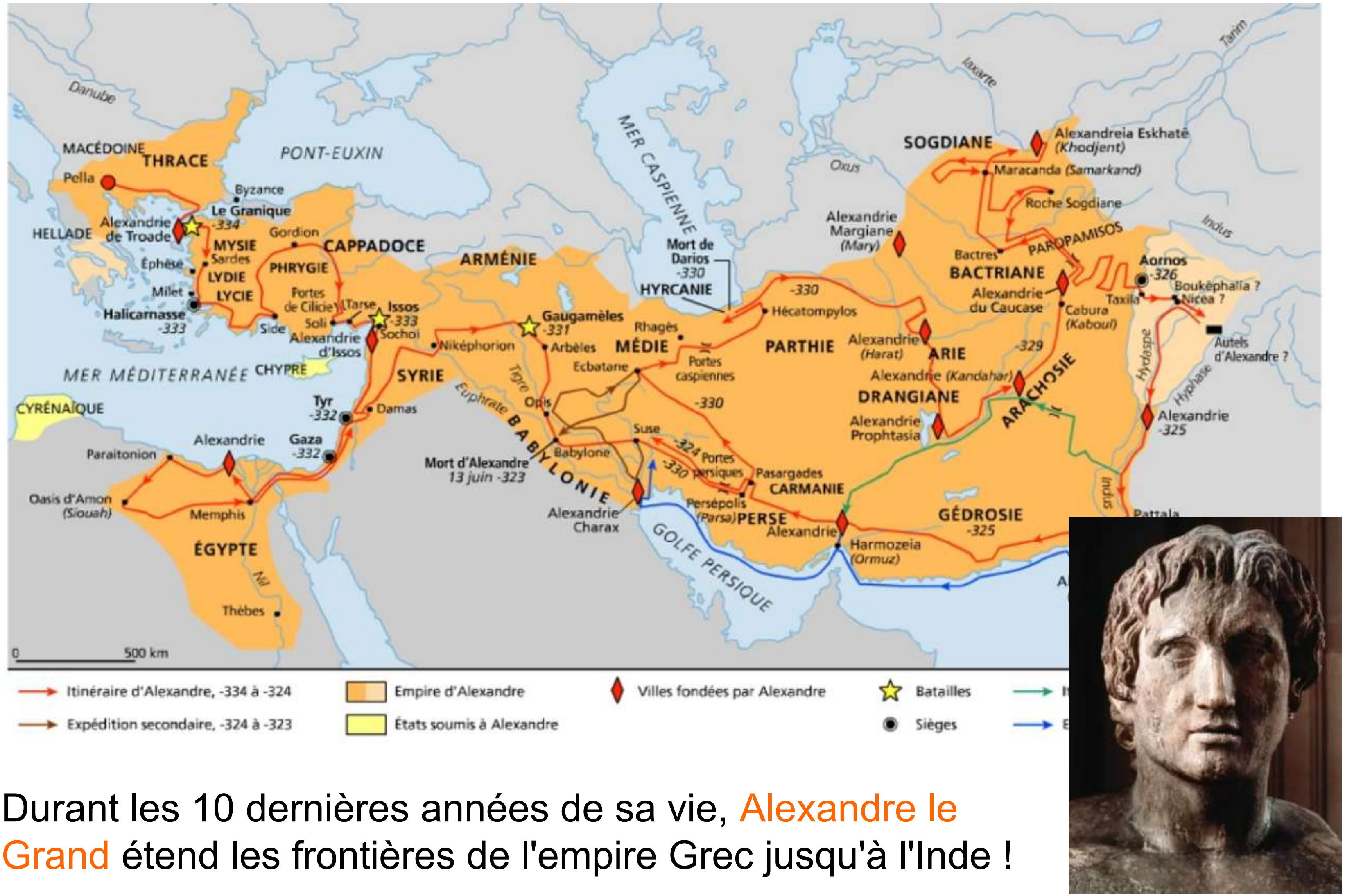
Archimède de Syracuse (-287/-212)



Un peu d'Histoire

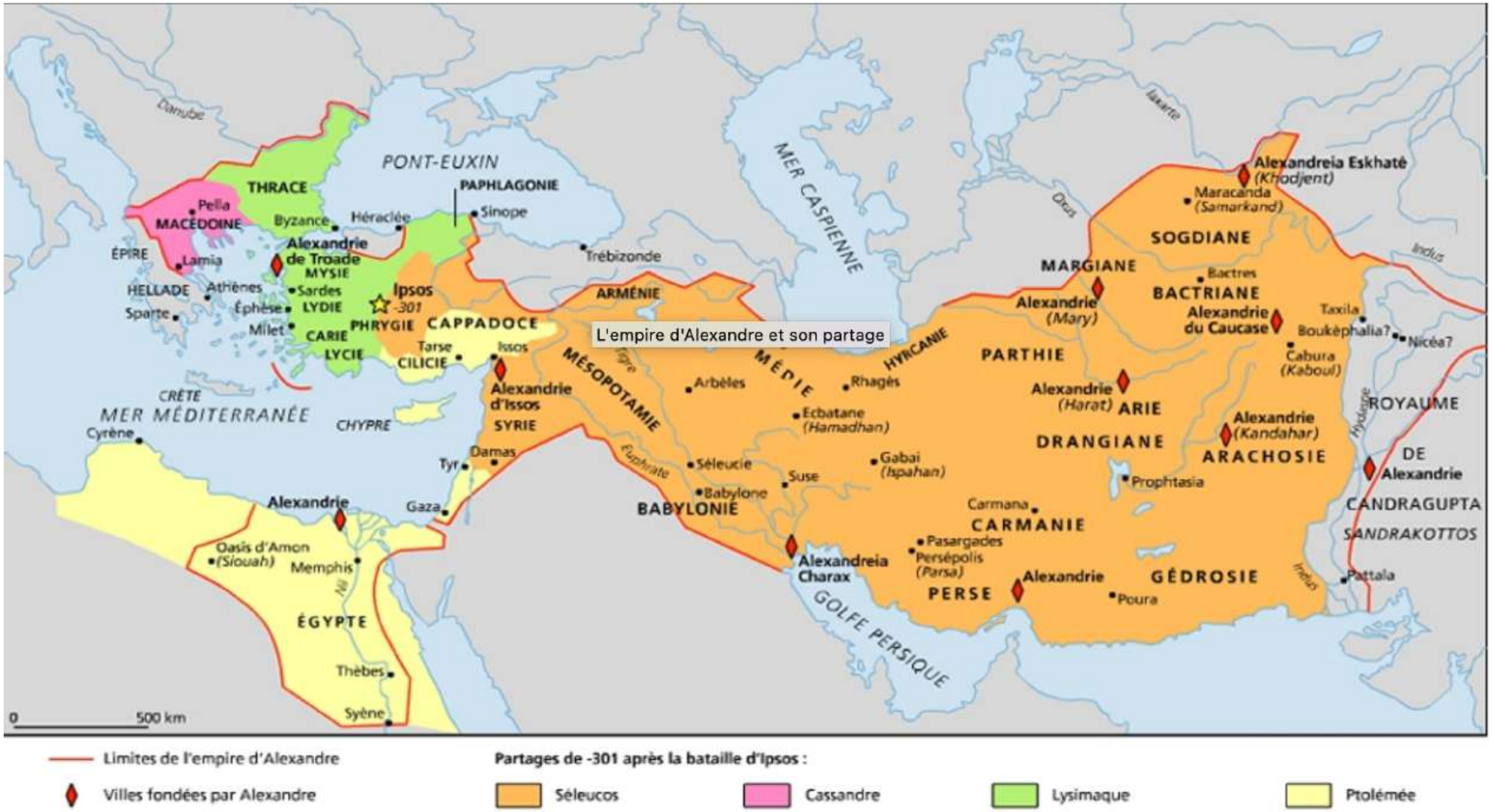


Un peu d'Histoire



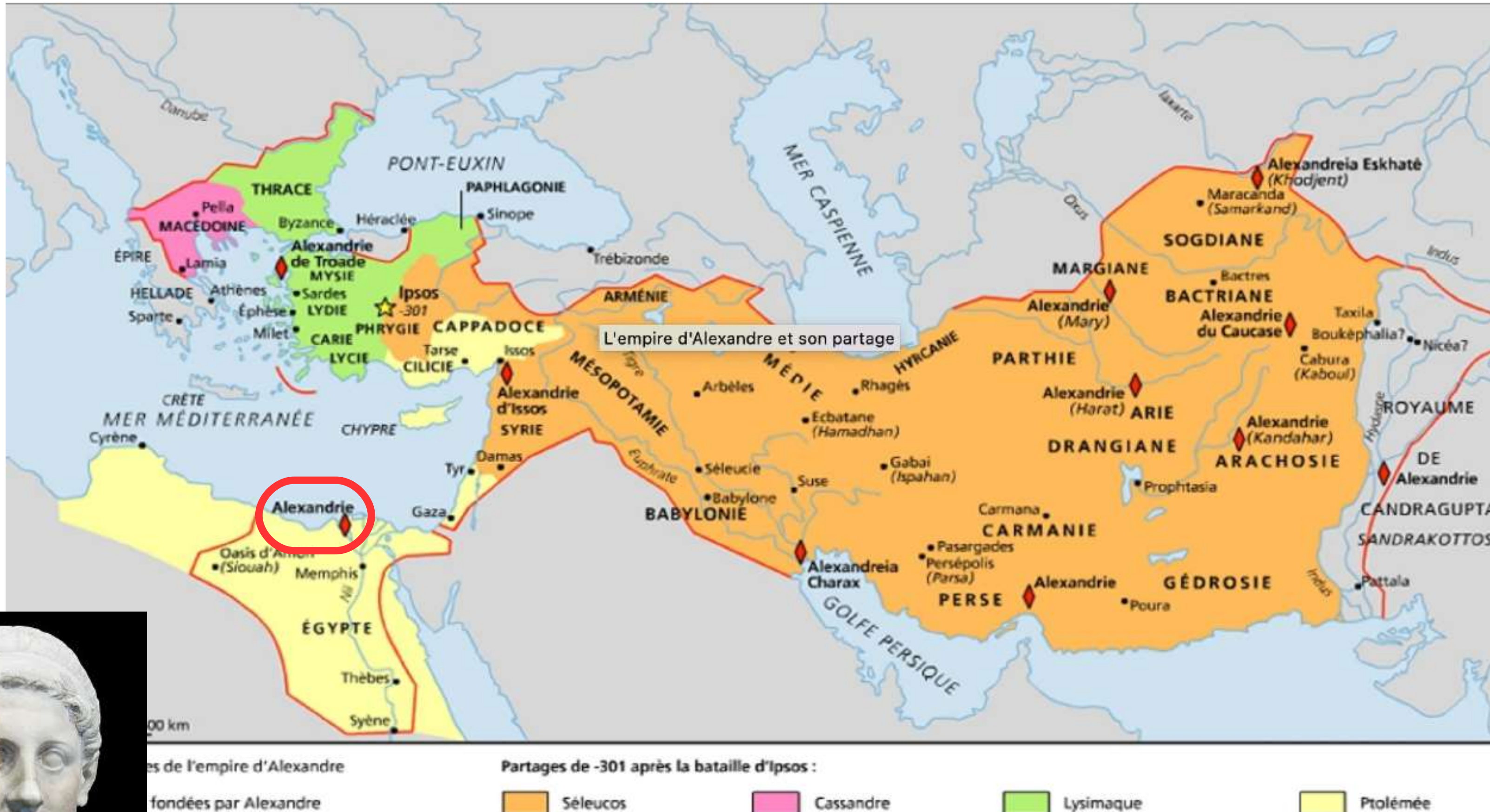
Durant les 10 dernières années de sa vie, Alexandre le Grand étend les frontières de l'empire Grec jusqu'à l'Inde !

Un peu d'Histoire



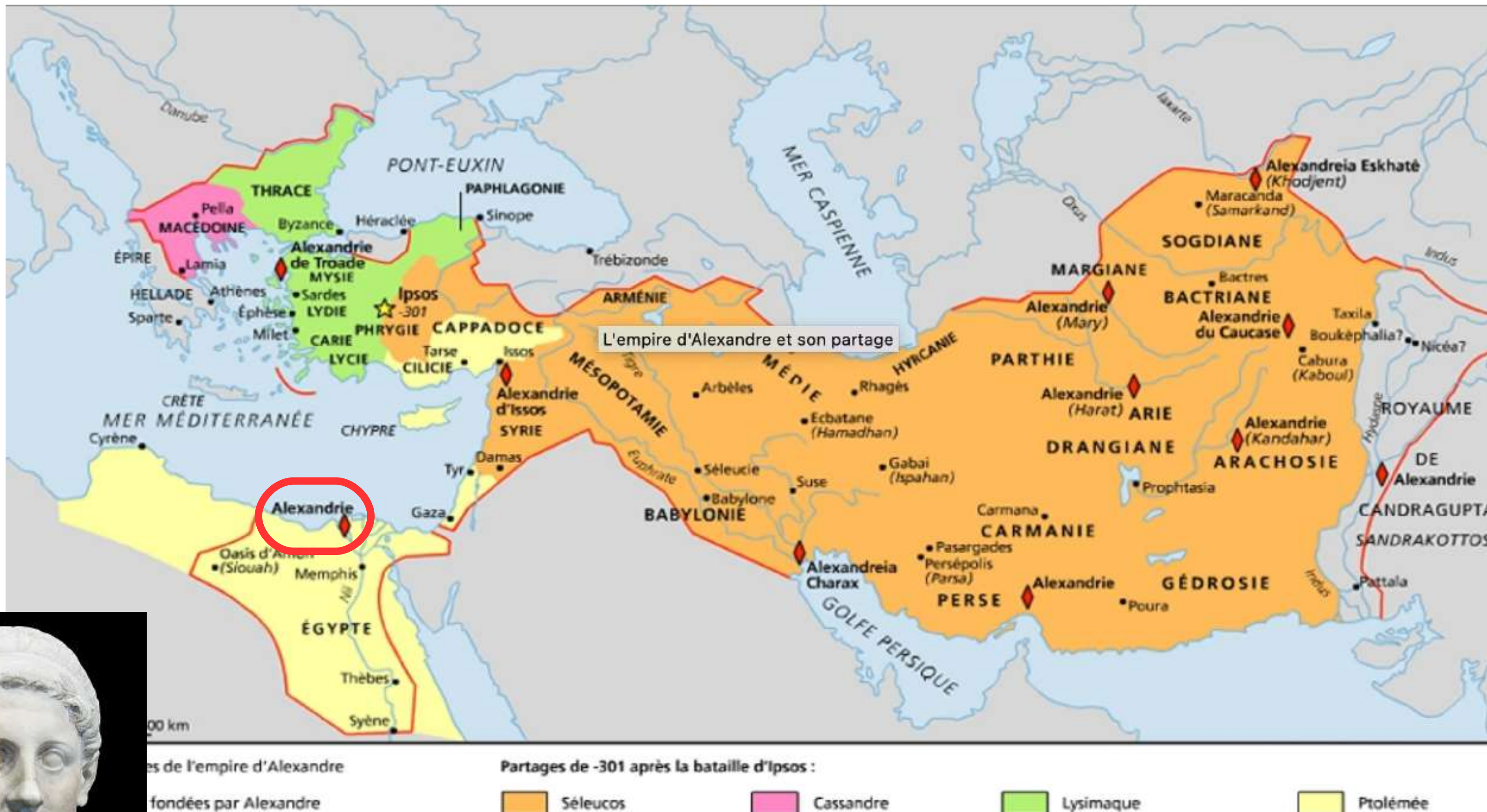
A sa mort en -323, ses généraux se partagent son Empire et créent les royaumes hellénistiques

Un peu d'Histoire



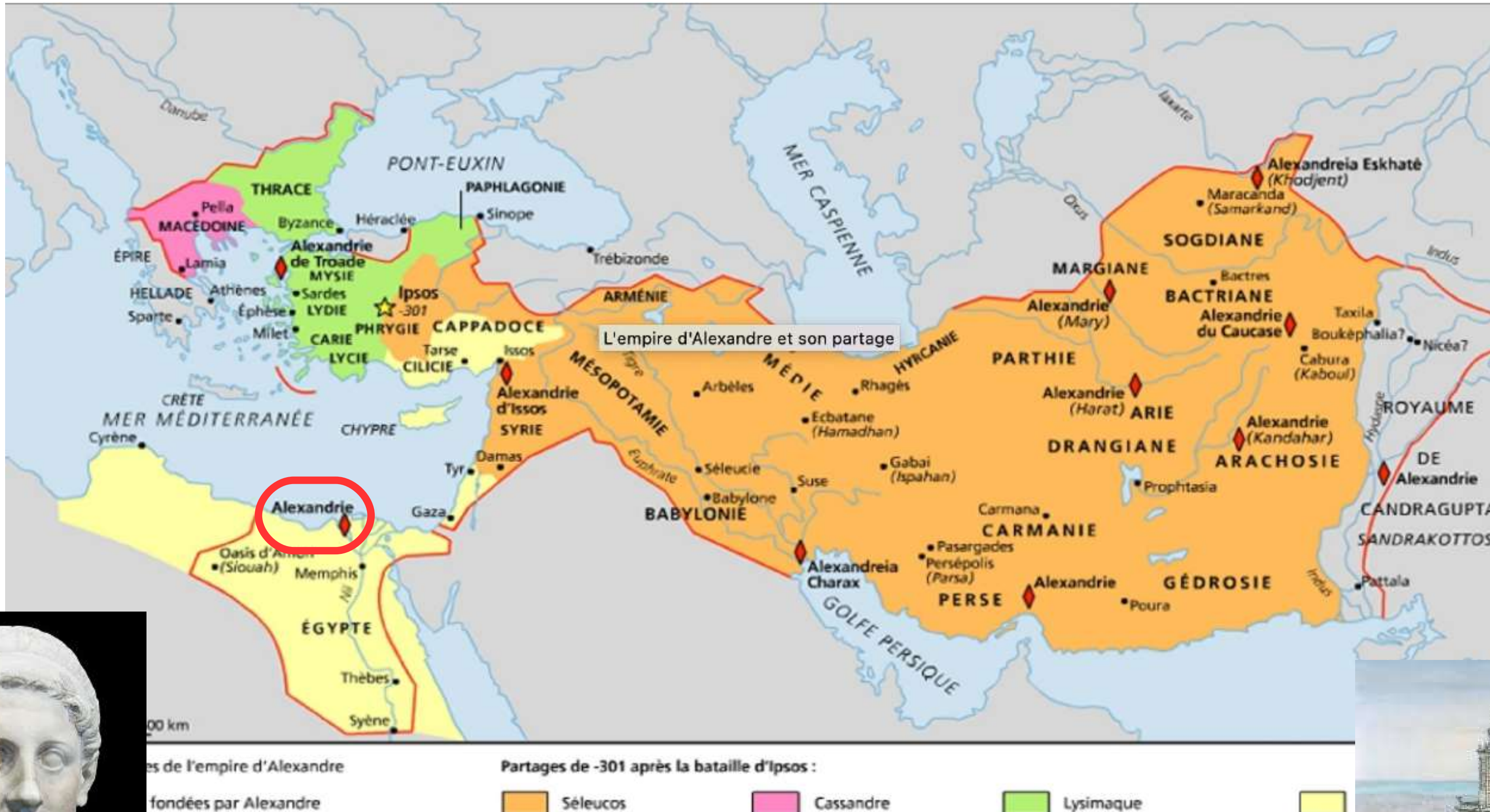
Ptolémée 1er (-368/-283) devient roi d'Egypte.
Dynastie de 3 siècles.

Un peu d'Histoire



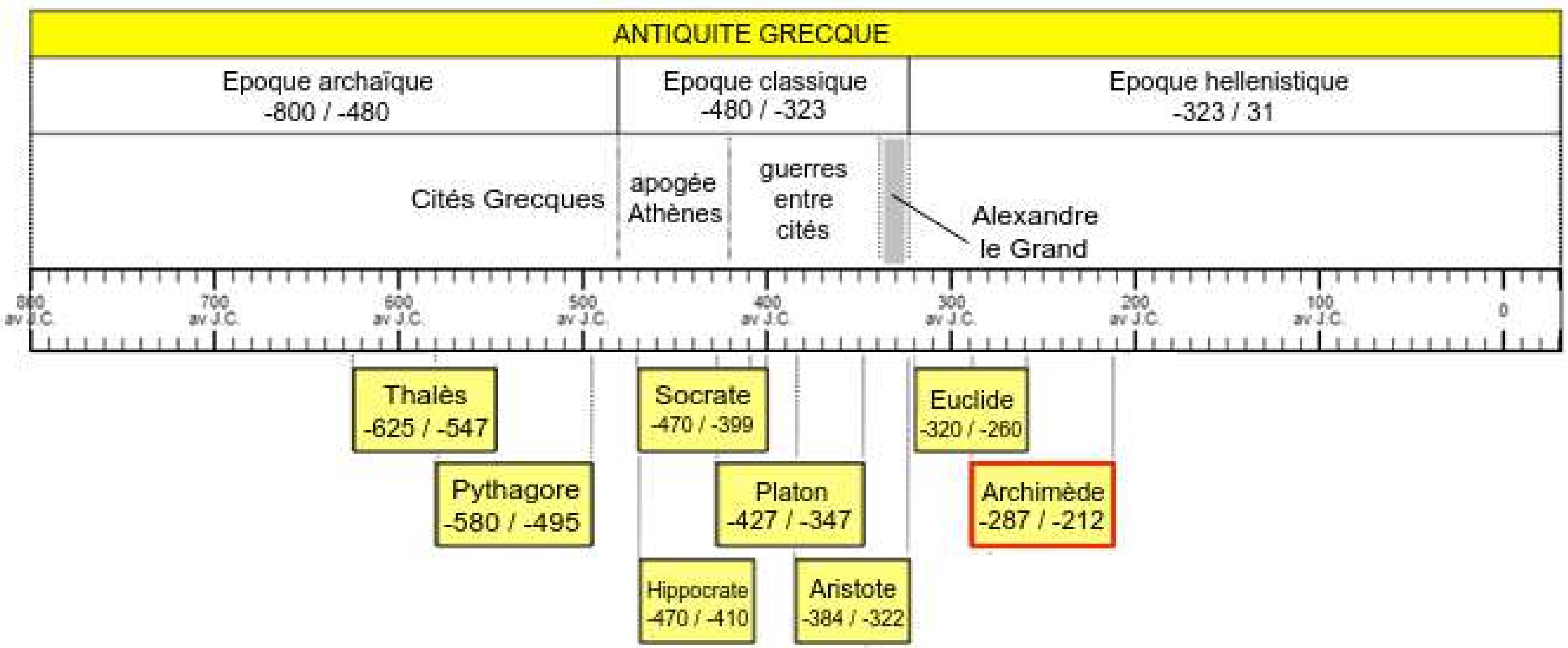
Ptolémée 1er (-368/-283) devient roi d'Egypte.
Dynastie de 3 siècles, dont le (court)
règne de Cléopâtre VII (-51/-30)

Un peu d'Histoire



Ptolémée 1er (-368/-283) devient roi d'Egypte.
Dynastie de 3 siècles.
Il bâtit sa capitale, Alexandrie : phare, bibliothèque...
et l'école mathématique d'Alexandrie (Euclide)

Archimède de Syracuse (-287/-212)



Archimède de Syracuse (-287/-212)

L'un des plus grands savants de l'antiquité, et l'un des plus grands mathématiciens de l'histoire

Né et mort à Syracuse (Sicile)
Ecole d'Alexandrie

Physicien, Ingénieur et Mathématicien

Archimède de Syracuse (-287/-212)

Hydrostatique
poussée d'Archimède

L'un des plus grands savants de l'antiquité, et l'un des plus grands mathématiciens de l'histoire

Né et mort à Syracuse (Sicile)
Ecole d'Alexandrie

Physicien, Ingénieur et Mathématicien

mécanique statique
(équilibre des force, centre de gravité)
Développe le levier, le palan...

Archimède de Syracuse (-287/-212)

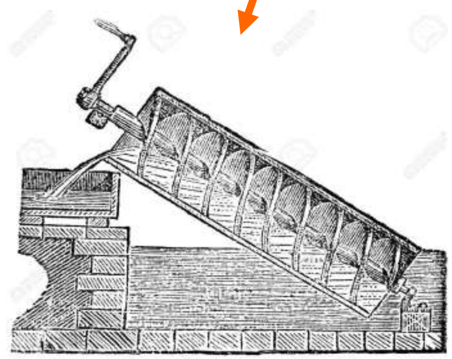
Hydrostatique
poussée d'Archimède

L'un des plus grands savants de l'antiquité, et l'un des plus grands mathématiciens de l'histoire

Né et mort à Syracuse (Sicile)
Ecole d'Alexandrie

Physicien, Ingénieur et Mathématicien

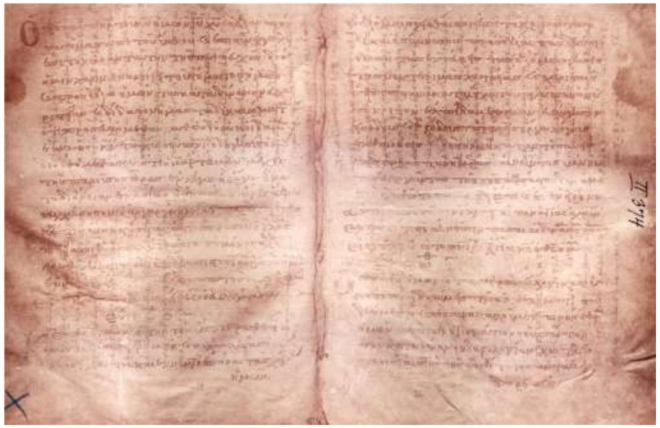
mécanique statique
(équilibre des force, centre de gravité)
Développe le levier, le palan...



Vis d'Archimède

Siège de Syracuse (-213/-212)

Archimède de Syracuse (-287/-212)



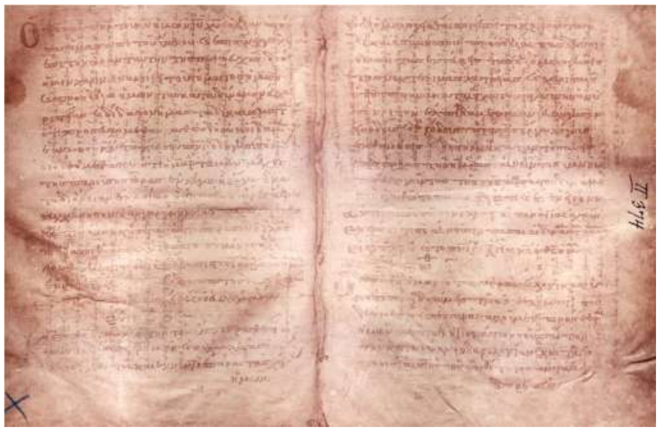
L'un des plus grands savants de l'antiquité, et l'un des plus grands mathématiciens de l'histoire

Né et mort à Syracuse (Sicile)
Ecole d'Alexandrie

Physicien, Ingénieur et Mathématicien

La Quadrature de la parabole
De la sphère et du cylindre, livres I et II
Des spirales
Sur les conoïdes et les sphéroïdes
De la mesure du cercle
L'Arénaire
De la méthode, sur le palimpseste d'Archimède (Xe, redécouvert en 1906)

Archimède de Syracuse (-287/-212)



L'un des plus grands savants de l'antiquité, et l'un des plus grands mathématiciens de l'histoire

Né et mort à Syracuse (Sicile)
Ecole d'Alexandrie

Physicien, Ingénieur et Mathématicien

La Quadrature de la parabole
De la sphère et du cylindre, livres I et II
Des spirales
Sur les conoïdes et les sphéroïdes
De la mesure du cercle ◄ court texte contenant *trois* propositions
L'Arénaire
De la méthode, sur le palimpseste d'Archimède (Xe, redécouvert en 1906)

De la mesure du cercle

Proposition I

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

Proposition III

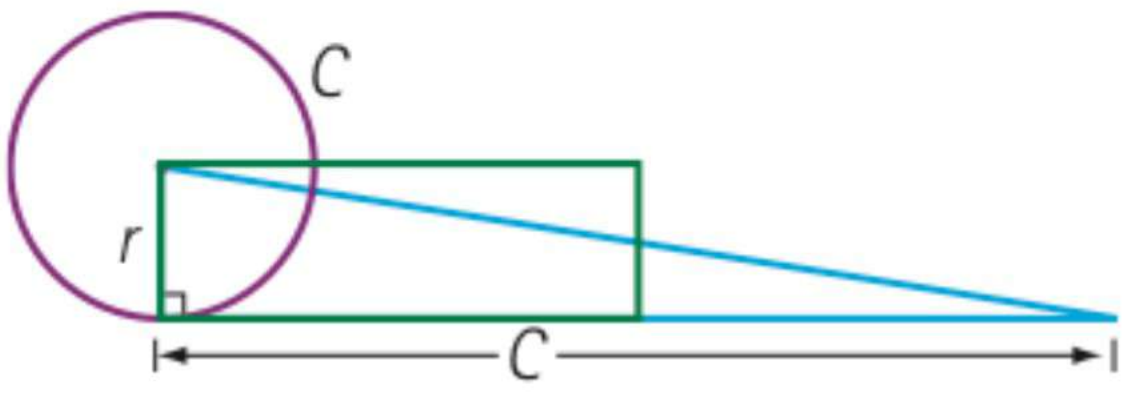
Le périmètre de tout cercle vaut le triple du diamètre augmenté de moins de la septième partie, mais de plus des dix soixante et onzième parties du diamètre.

De la mesure du cercle

Proposition I

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

Aire(Cercle) = (Rayon x Périmètre) / 2



De la mesure du cercle

Proposition I

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

Aire(Cercle) = (Rayon x Périmètre) / 2

Archimède utilise la méthode d’exhaustion

[Eudoxe de Cnide, -408/-355]

De la mesure du cercle

Proposition I

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

Aire(Cercle) = (Rayon x Périmètre) / 2

Archimède utilise la méthode d’exhaustion

Encyclopédie de Diderot et d'Alembert (1751)

La méthode d'exhaustion est une manière de prouver l'égalité de deux grandeurs, en faisant voir que leur différence est plus petite qu'aucune grandeur assignable et en employant, pour le démontrer, la réduction à l'absurde.


ENCYCLOPÉDIE
OU
DICTIONNAIRE RAISONNÉ
DES SCIENCES,
DES ARTS ET DES MÉTIERS
PAR UNE SOCIÉTÉ DE GENS DE LETTRES.
TOME TREIZIEME.

De la mesure du cercle

Proposition I

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

Aire(Cercle) = (Rayon x Périmètre) / 2

Archimède utilise la méthode d'exhaustion

Principe : Si $C \neq T$, alors soit $C > T$, soit $C < T$.

On fait alors un double raisonnement par l'absurde.

[Eudoxe de Cnide, -408/-355]

De la mesure du cercle

Proposition I

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

Aire(Cercle) = (Rayon x Périmètre) / 2

Archimède utilise la méthode d’exhaustion

Principe :   Si $C \neq T$, alors soit $C > T$, soit $C < T$.

Supp. que $C - T > 0$

De la mesure du cercle

Proposition I

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

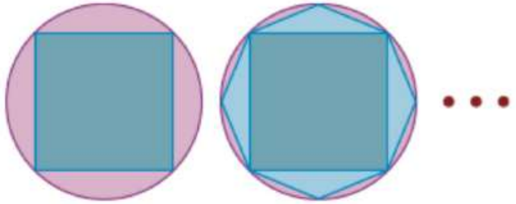
Aire(Cercle) = (Rayon x Périmètre) / 2

Archimède utilise la méthode d’exhaustion

Principe : Si $C \neq T$, alors soit $C > T$, soit $C < T$.

Supp. que $C - T > 0$

Soit P_n = Aire (polygone inscrit à 2^n côtés)



De la mesure du cercle

Proposition I

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

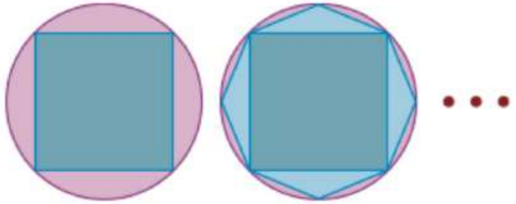
Aire(Cercle) = (Rayon x Périmètre) / 2

Archimède utilise la méthode d’exhaustion

Principe : Si $C \neq T$, alors soit $C > T$, soit $C < T$.

Supp. que $C - T > 0$

Soit P_n = Aire (polygone inscrit à 2^n côtés)



- A partir d'un certain n, $C - P_n < C - T$

De la mesure du cercle

Proposition I

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

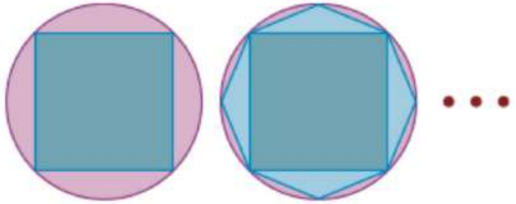
Aire(Cercle) = (Rayon x Périmètre) / 2

Archimède utilise la méthode d’exhaustion

Principe : Si $C \neq T$, alors soit $C > T$, soit $C < T$.

Supp. que $C - T > 0$

Soit Pn = Aire (polygone inscrit à 2^n côtés)



- A partir d'un certain n, $C - Pn < C - T$

  $\rightarrow \quad Pn > T$

De la mesure du cercle

Proposition I

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

Aire(Cercle) = (Rayon x Périmètre) / 2

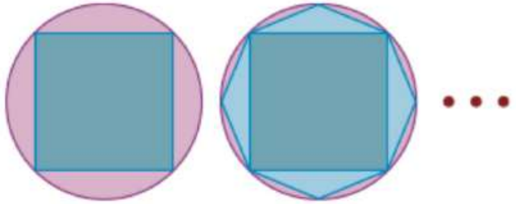
Archimède utilise la méthode d’exhaustion

Principe : Si $C \neq T$, alors soit $C > T$, soit $C < T$.

Supp. que $C - T > 0$

Soit P_n = Aire (polygone inscrit à 2^n côtés)

- A partir d'un certain n, $P_n > T$



De la mesure du cercle

Proposition I

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

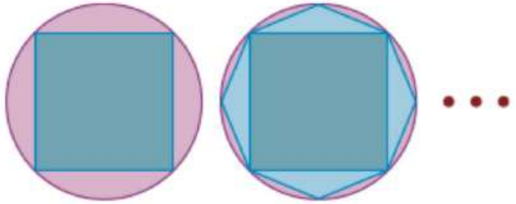
Aire(Cercle) = (Rayon x Périmètre) / 2

Archimède utilise la méthode d'exhaustion

Principe : Si $C \neq T$, alors soit $C > T$, soit $C < T$.

$\boxed{\text{Supp. que } C - T > 0}$

Soit P_n = Aire (polygone inscrit à 2^n côtés)



- A partir d'un certain n, $P_n > T$
- Mais pour tout n, $P_n < T$
  (aire d'un triangle...)

De la mesure du cercle

Proposition I

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

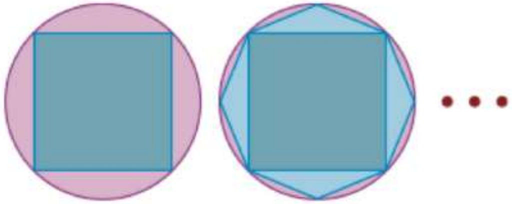
Aire(Cercle) = (Rayon x Périmètre) / 2

Archimède utilise la méthode d’exhaustion

Principe : Si $C \neq T$, alors soit $C > T$, soit $C < T$.

Supp. que $C - T > 0$

Soit Pn = Aire (polygone inscrit à 2^n côtés)



- A partir d'un certain n, Pn > T
- Mais pour tout n, Pn < T

Absurde !

De la mesure du cercle

Proposition I

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

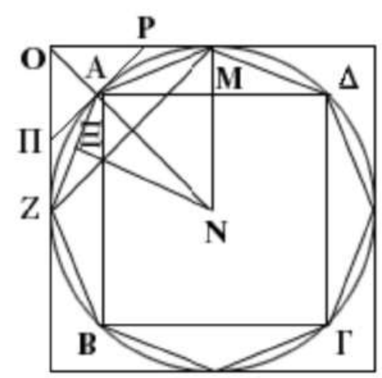
Aire(Cercle) = (Rayon x Périmètre) / 2

Archimède utilise la méthode d'exhaustion

Principe : Si C ≠ T, alors soit C > T, soit C < T.

Supp. que C - T < 0

On procède de même avec des polygones circonscrits



De la mesure du cercle

Proposition I

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

Aire(Cercle) = (Rayon x Périmètre) / 2

Archimède utilise la méthode d'exhaustion

Principe : Si $C \neq T$,
alors soit $C > T$, soit $C < T$.

On fait alors un double raisonnement par l'absurde.

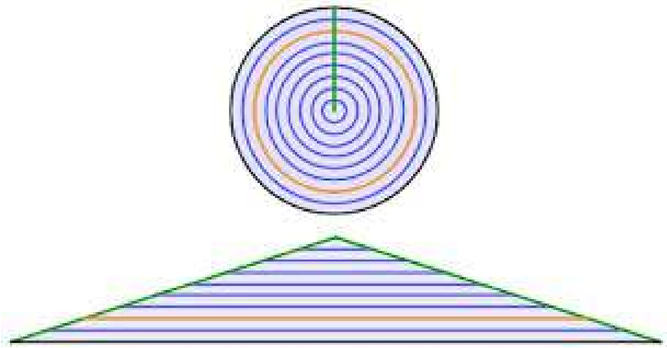
La méthode d'exhaustion permet établir une égalité explicite que l'on a conjecturé

De la mesure du cercle

Proposition I

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

Aire(Cercle) = (Rayon x Périmètre) / 2



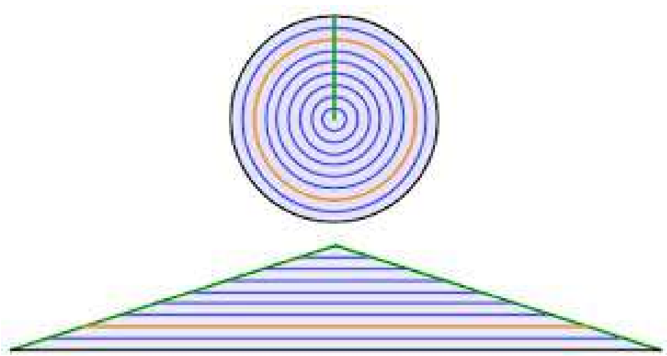
La méthode d'exhaustion permet établir une égalité explicite que l'on a conjecturé

De la mesure du cercle

Proposition I

Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.

Aire(Cercle) = (Rayon x Périmètre) / 2



La méthode d'exhaustion permet établir une égalité explicite que l'on a conjecturé

… elle ne permet donc PAS d'approximer une valeur « inconnue » telle que π

De la mesure du cercle

Proposition III

Le périmètre de tout cercle vaut le triple du diamètre augmenté de moins de la septième partie, mais de plus des dix soixante et onzième parties du diamètre.

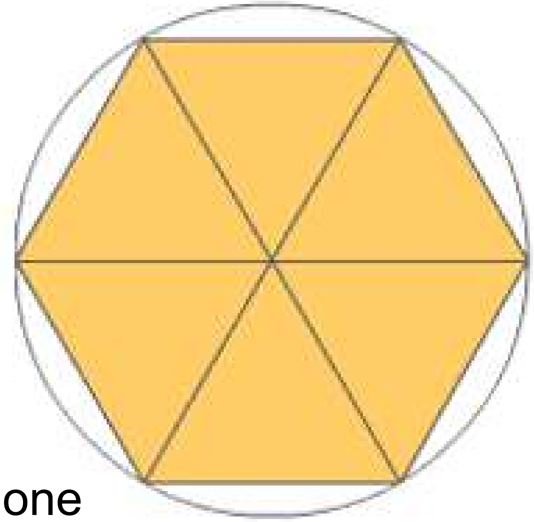
De la mesure du cercle

Proposition III

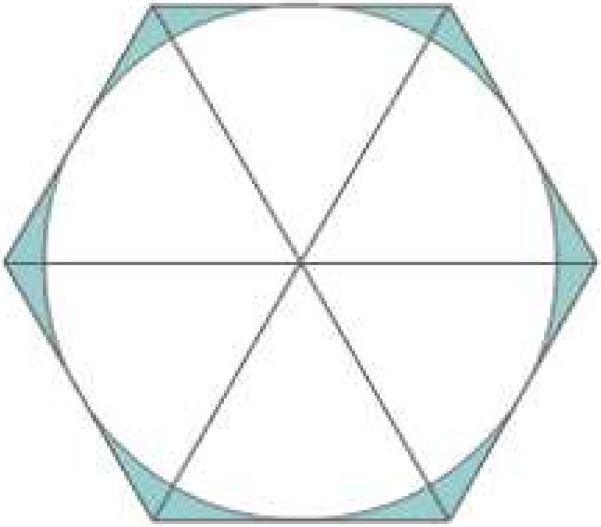
Le périmètre de tout cercle vaut le triple du diamètre augmenté de moins de la septième partie, mais de plus des dix soixante et onzième parties du diamètre.

$$3{,}1408 < 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} < 3{,}1429$$

Approximation de π par Archimède

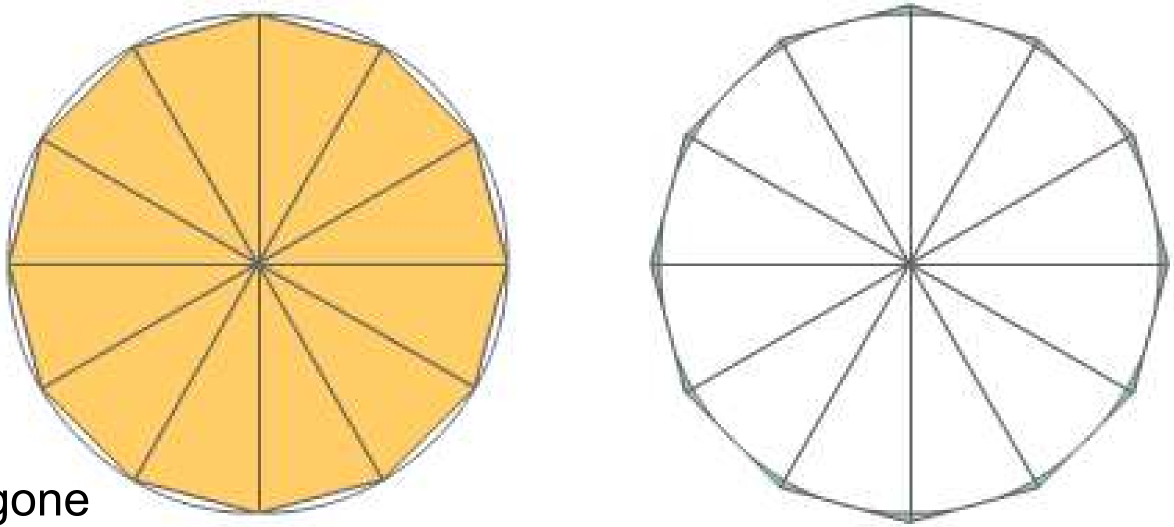


hexagone



$$3{,}1408 < 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} < 3{,}1429$$

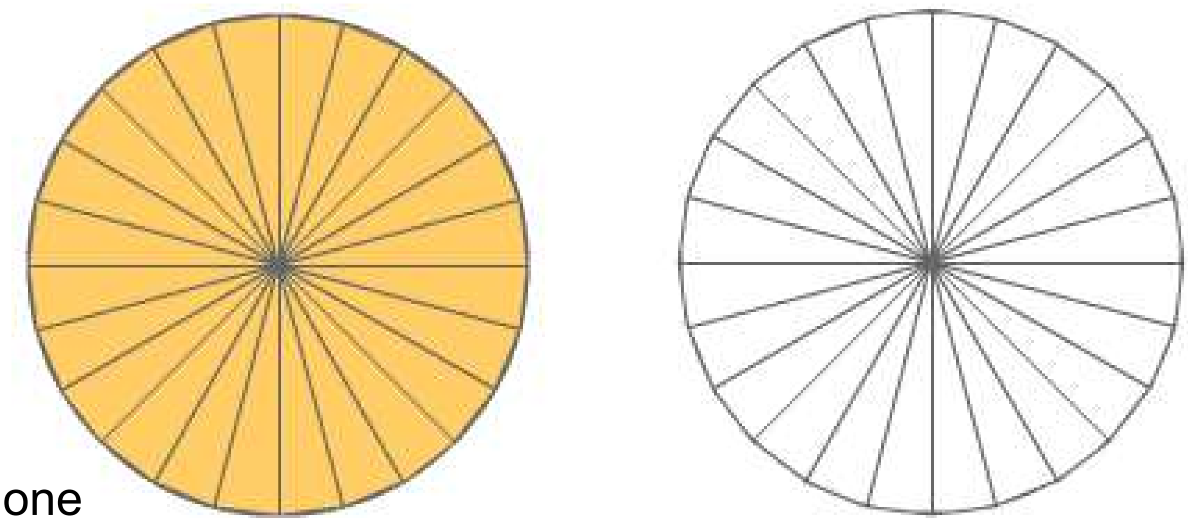
Approximation de π par Archimède



dodécagone

$$3{,}1408 < 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} < 3{,}1429$$

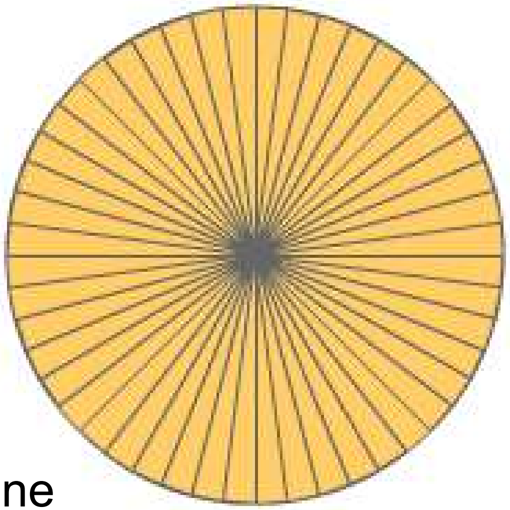
Approximation de π par Archimède

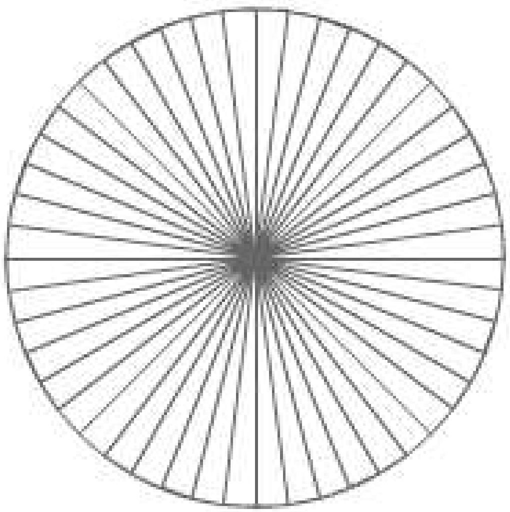


24-gone

$$3{,}1408 < 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} < 3{,}1429$$

Approximation de π par Archimède



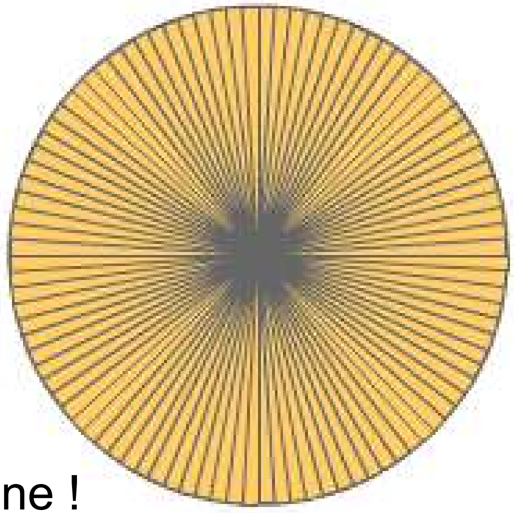


48-gone

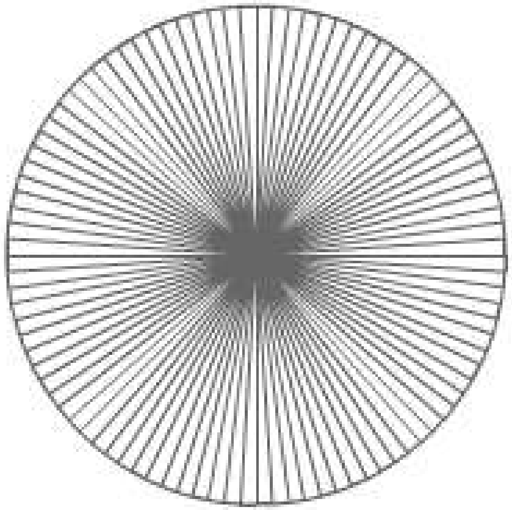
$$3{,}1408 < 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} < 3{,}1429$$

Approximation de π par Archimède

« constante d'Archimède »



96-gone !



$$3{,}1408 < 3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7} < 3{,}1429$$

Approximation de π par Archimède

… et concrètement ?

Approximation de π par Archimède

… et concrètement ?

118 DE LA MESURE DU CERCLE.

au triangle ΑΓΔ comme 21 est à 7, et que le triangle ΑΓΔ est au triangle ΑΓΞ comme 7 est à 1, le triangle ΑΓΞ sera au triangle ΑΓΔ comme 22 est à 7. Mais le quarré ΓΗ est quadruple du triangle ΑΓΔ; donc le triangle ΑΓΞ est au quarré de ΓΗ comme 22 est à 28; ou comme 11 est à 14. Mais le triangle ΑΓΞ est égal au cercle ΑΒ, puisque la hauteur ΑΓ est égale au rayon du cercle, et que sa base est égale à la circonférence du même cercle, cette circonférence étant, à peu de chose près, égale au triple du diamètre réuni au septième de ce diamètre, ainsi que cela sera démontré; donc le cercle est au quarré ΓΗ, à très-peu de chose près, comme 11 est à 14.

PROPOSITION III.

La circonférence d'un cercle quelconque est égale au triple du diamètre réuni à une certaine portion du diamètre, qui est plus petite que le septième de ce diamètre, et plus grande que les $\frac{10}{71}$ de ce même diamètre.

Soit le cercle dont ΑΓ est le diamètre et dont le point Ε est le centre; que la droite ΓΛΖ soit une tangente, et que l'angle ΖΕΓ soit la troisième partie d'un angle droit. La droite ΕΖ sera à la droite ΖΓ comme 306 est à 153; et la raison de ΕΓ à ΓΖ sera plus grande que la raison de 265 à 153 (a).

DE LA MESURE DU CERCLE. 119

Partageons l'angle ΖΕΓ en deux parties égales par la droite ΕΗ; la droite ΖΕ sera à la droite ΕΓ comme ΖΗ est à ΗΓ. Donc, par permutation et par addition, la somme des droites ΖΕ, ΕΓ est à la droite ΖΓ comme ΕΓ est à ΓΗ. Donc la raison de la droite ΓΕ à la droite ΓΗ est plus grande que la raison de 571 à 153. Donc la raison du quarré de ΕΗ au quarré de ΗΓ est plus grande que la raison de 349450 à 23409, et la raison de ΕΗ à ΗΓ plus grande que la raison de 591 $\frac{1}{8}$ à 153 (b).

Partageons l'angle ΗΕΓ en deux parties égales par la droite ΕΘ; la raison de ΕΓ à ΓΘ sera plus grande que la raison de 1162 $\frac{1}{8}$ à 153. Donc la raison de ΘΕ à ΕΓ est plus grande que la raison de 1172 $\frac{1}{8}$ à 153.

Partageons encore l'angle ΘΕΓ en deux parties égales par la droite ΕΚ; la raison de ΕΓ à ΓΚ sera plus grande que la raison de 2334 $\frac{1}{4}$ à 153. Donc la raison de ΕΚ à ΓΚ est plus grande que la raison de 2339 $\frac{1}{4}$ à 153.

Partageons enfin l'angle ΚΕΓ en deux parties égales par la droite ΛΕ; la raison de ΕΓ à ΛΓ sera plus grande que la raison de 4673 $\frac{1}{2}$ à 153.

Donc, puisque l'angle ΖΕΓ qui est la troisième partie d'un angle droit, a été partagé quatre fois en deux parties égales, l'angle ΛΕΓ sera la quarante-huitième partie d'un angle droit. Construisons au point Ε un angle ΓΕΜ égal à l'angle ΛΕΓ et prolongeons ΖΓ vers le point Μ; l'angle ΛΕΜ sera la vingt-quatrième partie d'un angle droit. Donc la droite ΛΜ est le côté d'un polygone de 96 côtés, circonscrit au cercle.

Donc, puisque nous avons démontré que la raison de ΕΓ à ΓΛ est plus grande que la raison de 4673 $\frac{1}{2}$ à 153, et à cause que ΑΓ est double de ΕΓ, et ΛΜ double de ΓΛ, la raison de ΑΓ à ΛΜ sera encore plus grande que la raison de 4673 $\frac{1}{2}$ à 153. Donc

120 DE LA MESURE DU CERCLE.

la raison de la droite ΑΓ au contour d'un polygone de 96 côtés est plus grande que la raison de 4673 $\frac{1}{2}$ à 14688.

Donc la raison du contour de ce polygone à son diamètre est moindre que la raison de 14688 à 4673 $\frac{1}{2}$. Mais parmi ces deux nombres, le premier contient trois fois le second avec un reste qui est de 667 $\frac{1}{2}$, et ce reste est plus petit que la $\frac{1}{7}$ partie du nombre 4673 $\frac{1}{2}$; donc le contour du polygone circonscrit contient le diamètre trois fois, plus une partie de ce diamètre qui est moindre que sa septième partie et demie. Donc, à plus forte raison, la circonférence du cercle est moindre que le triple du diamètre augmenté d'un septième et demi de ce même diamètre.

Soit le cercle dont ΑΓ est le diamètre. Que l'angle ΒΑΓ soit la troisième partie d'un angle droit; la raison de ΑΒ à ΒΓ sera moindre que la raison de 1351 à 780; et la raison de ΑΓ à ΓΒ sera la même que celle de 1560 à 780.

Partageons l'angle ΒΑΓ en deux parties égales par la droite ΑΗ. Puisque l'angle ΒΑΗ est non-seulement égal à l'angle ΗΓΒ, mais encore à l'angle ΗΑΓ, l'angle ΗΓΒ sera égal à l'angle ΗΑΓ. Mais l'angle droit ΑΗΓ est commun; donc le troisième angle ΗΖΓ sera égal au troisième angle ΑΓΗ. Donc les triangles ΑΗΓ, ΓΗΖ sont équiangles; donc ΑΗ est à ΗΓ comme ΓΗ à ΗΖ, et comme

DE LA MESURE DU CERCLE. 121

ΑΓ est à ΓΖ. Mais ΑΓ est à ΓΖ comme la somme des droites ΓΑ, ΑΒ est à la droite ΒΓ; donc la somme des droites ΒΑ, ΑΓ est à la droite ΒΓ comme ΑΗ est à ΗΓ. Donc la raison de ΑΗ à ΗΓ est moindre que la raison de 2911 à 780, et la raison de ΑΓ à ΓΗ moindre que la raison de 3013 $\frac{3}{4}$ à 780.

Partageons l'angle ΓΑΗ en deux parties égales par la droite ΑΘ; la raison de ΑΘ à ΘΓ sera pareillement moindre que la raison de 5924 $\frac{3}{4}$ à 780, ou bien que la raison de 1823 à 240; car ces deux derniers nombres sont chacun les $\frac{4}{13}$ des deux premiers. Donc la raison de ΑΓ à ΓΘ est moindre que la raison de 1838 $\frac{9}{11}$ à 240.

Partageons encore l'angle ΘΑΓ en deux parties égales par la droite ΚΑ; la raison de ΚΑ à ΚΓ sera moindre que la raison de 3661 $\frac{9}{11}$ à 240, ou bien que la raison de 1007 à 66; car ces deux derniers nombres sont chacun les $\frac{11}{40}$ des deux premiers. Donc la raison de ΑΓ à ΓΚ est moindre que la raison de 1009 $\frac{1}{6}$ à 66.

Partageons enfin l'angle ΚΑΓ en deux parties égales par la droite ΛΑ; la raison de ΛΑ à ΛΓ sera moindre que la raison de 2016 $\frac{1}{6}$ à 66, et la raison de ΑΓ à ΓΛ moindre que la raison de 2017 $\frac{1}{4}$ à 66.

Donc la raison de ΓΛ à ΓΑ est plus grande que la raison de 66 à 2017 $\frac{1}{4}$. Donc, la raison du contour du polygone au diamètre est plus grande que la raison de 6336 à 2017 $\frac{1}{4}$. Mais parmi ces nombres, le premier contient le second trois fois avec un reste qui est plus grand que les $\frac{10}{71}$ du second. Donc le contour d'un polygone de 96 côtés inscrit dans un cercle est plus grand que le triple de son diamètre augmenté des $\frac{10}{71}$ de ce diamètre. Donc, à plus forte raison, la circonférence du cercle est plus grande que le triple du diamètre augmenté des $\frac{10}{71}$ de ce diamètre.

16

122 DE LA MESURE DU CERCLE.

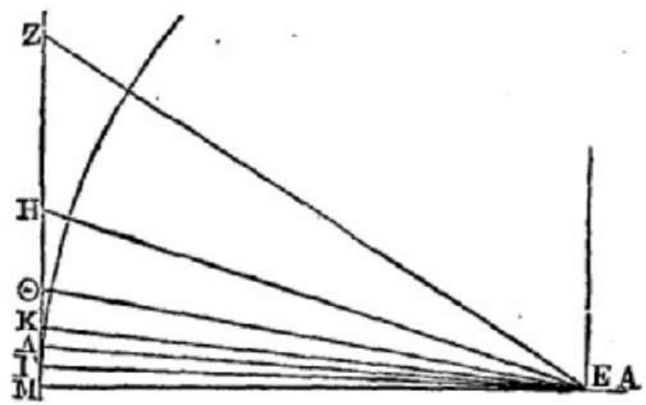
Donc, la circonférence d'un cercle est égale au triple de son diamètre augmenté d'une portion de son diamètre qui est plus petite que le septième de ce diamètre et plus grande que les $\frac{10}{71}$ de ce même diamètre.

Approximation de π par Archimède

PROPOSITION III.

La circonférence d'un cercle quelconque est égale au triple du diamètre réuni à une certaine portion du diamètre, qui est plus petite que le septième de ce diamètre, et plus grande que les $\frac{10}{71}$ de ce même diamètre.

Soit le cercle dont AΓ est le diamètre et dont le point E est le centre ; que la droite ΓΔZ soit une tangente, et que l'angle



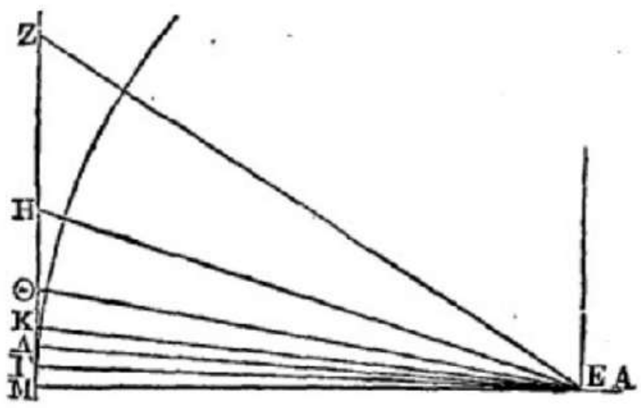
ZEΓ soit la troisième partie d'un angle droit. La droite EZ sera à la droite ZΓ comme 306 est à 153 ; et la raison de EΓ à ΓZ sera plus grande que la raison de 265 à 153 (α).

Approximation de π par Archimède

PROPOSITION III.

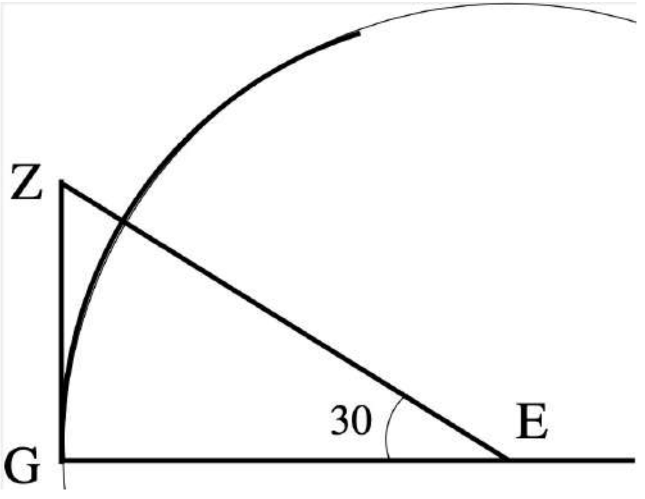
La circonférence d'un cercle quelconque est égale au triple du diamètre réuni à une certaine portion du diamètre, qui est plus petite que le septième de ce diamètre, et plus grande que les $\frac{10}{71}$ de ce même diamètre.

Soit le cercle dont ΑΓ est le diamètre et dont le point Ε est le centre; que la droite ΓΛΖ soit une tangente, et que l'angle

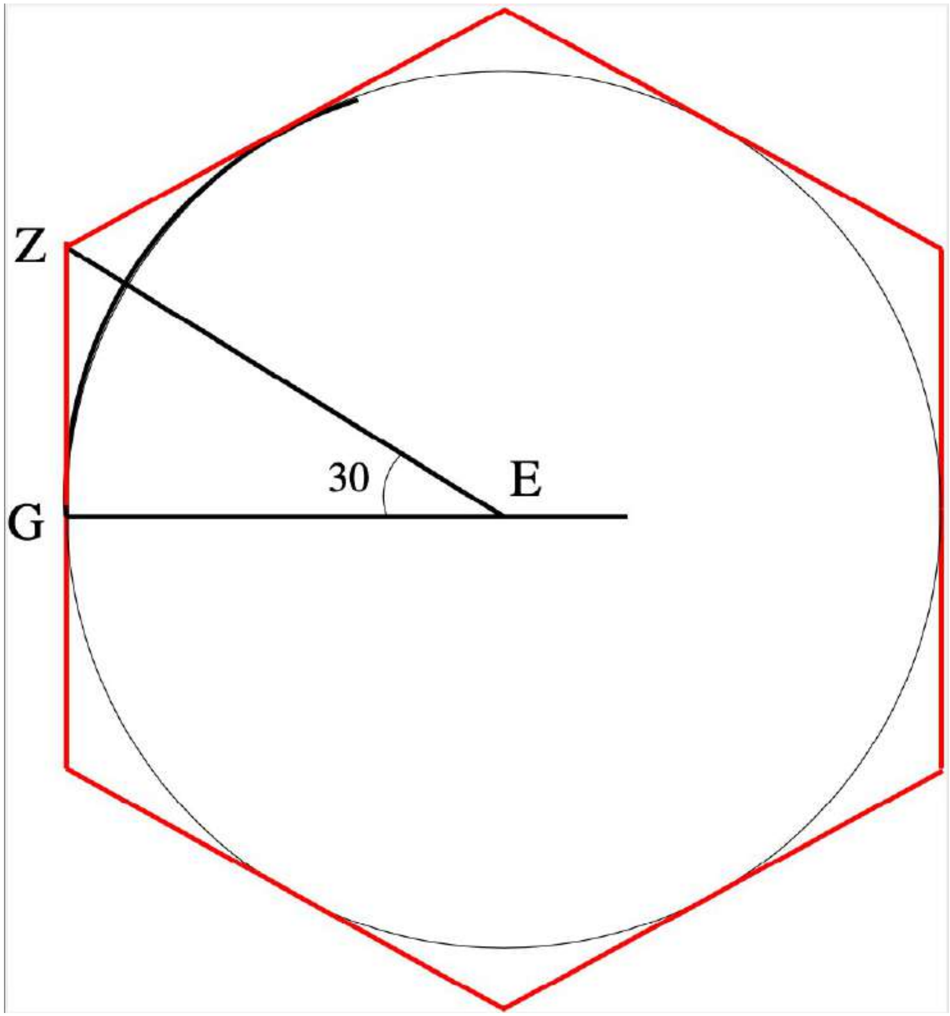


ΖΕΓ soit la troisième partie d'un angle droit. La droite ΕΖ sera à la droite ΖΓ comme 306 est à 153; et la raison de ΕΓ à ΓΖ sera plus grande que la raison de 265 à 153 (α).

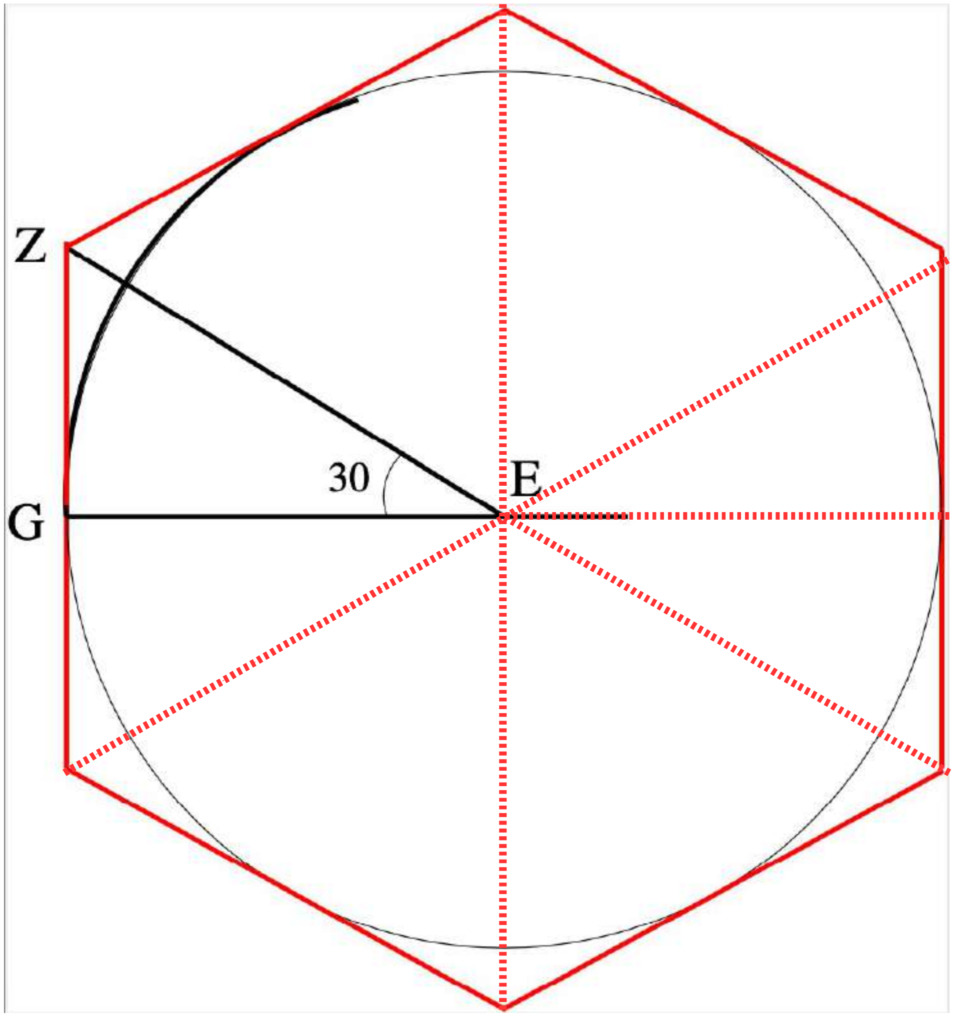
Approximation de π par Archimède



Approximation de π par Archimède

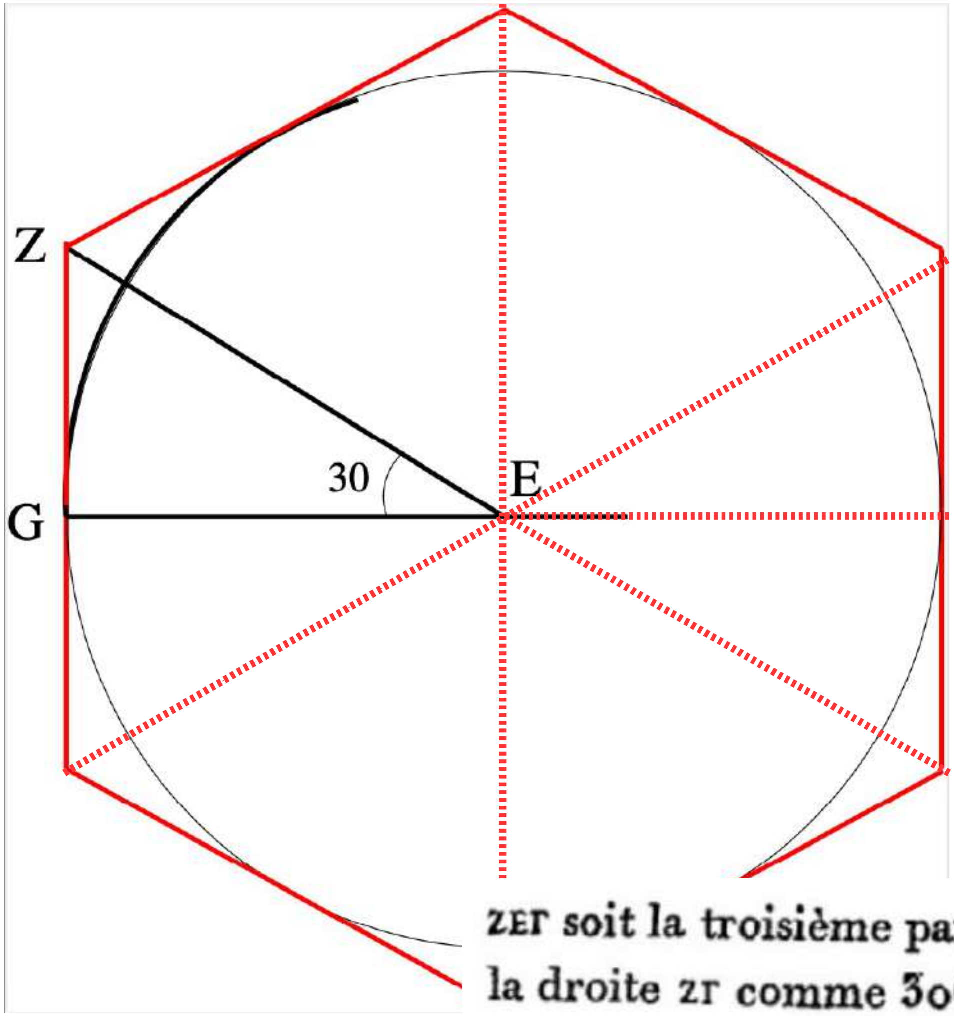


Approximation de π par Archimède



EZ / GZ = 2

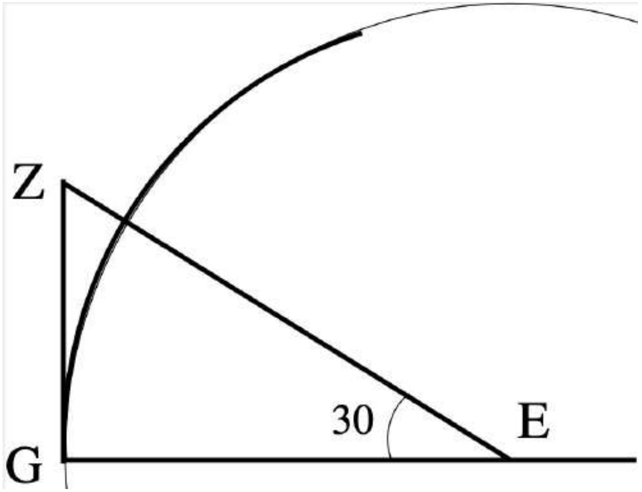
Approximation de π par Archimède



EZ / GZ = 2

ZEΓ soit la troisième partie d'un angle droit. La droite EZ sera à la droite ZΓ comme 306 est à 153; et la raison de EΓ à ΓZ sera plus grande que la raison de 265 à 153 (α).

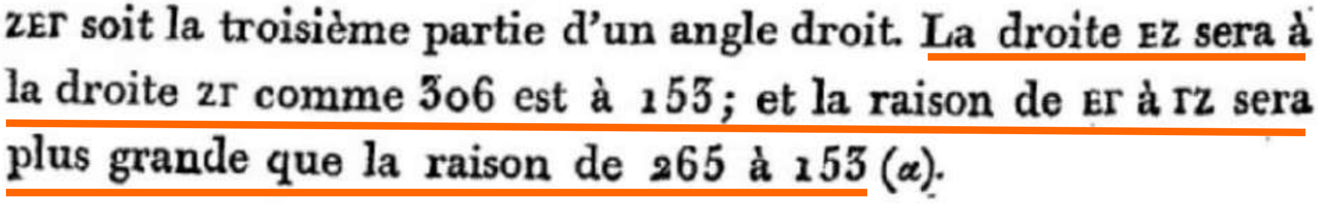
Approximation de π par Archimède



EZ / GZ = 306 / 153 = 2

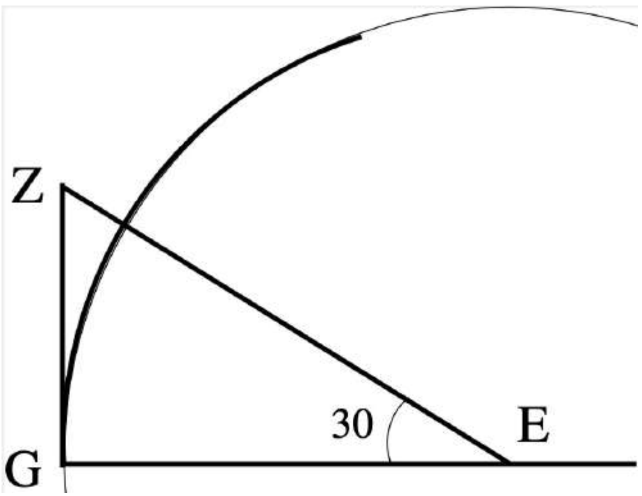
EG / GZ = 265 / 153 ~ √3

… avec Pythagore



ZEΓ soit la troisième partie d'un angle droit. La droite EZ sera à la droite ZΓ comme 306 est à 153 ; et la raison de EΓ à ΓZ sera plus grande que la raison de 265 à 153 (α).

Approximation de π par Archimède



EZ / GZ = 306 / 153 = 2

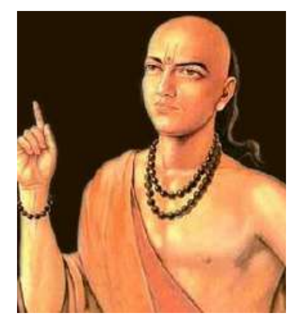
EG / GZ = 265 / 153 ~ √3

… avec Pythagore

Un peu tôt pour parler de trigonométrie !

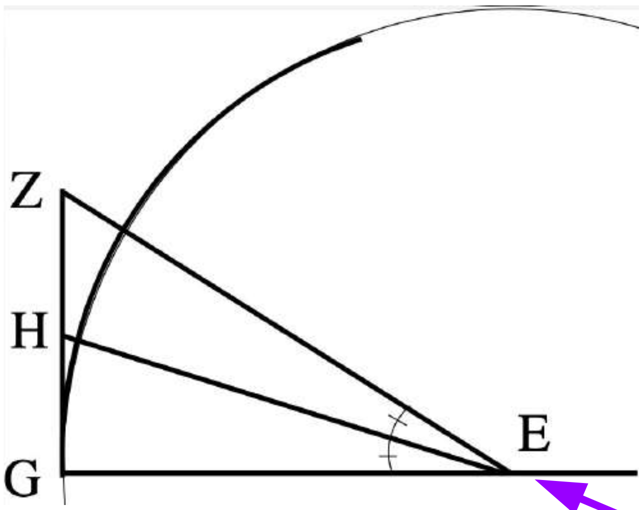
Hipparque (-190/-120)

Ptolémée (IIe siècle)



Aryabhata (476/550)

Approximation de π par Archimède

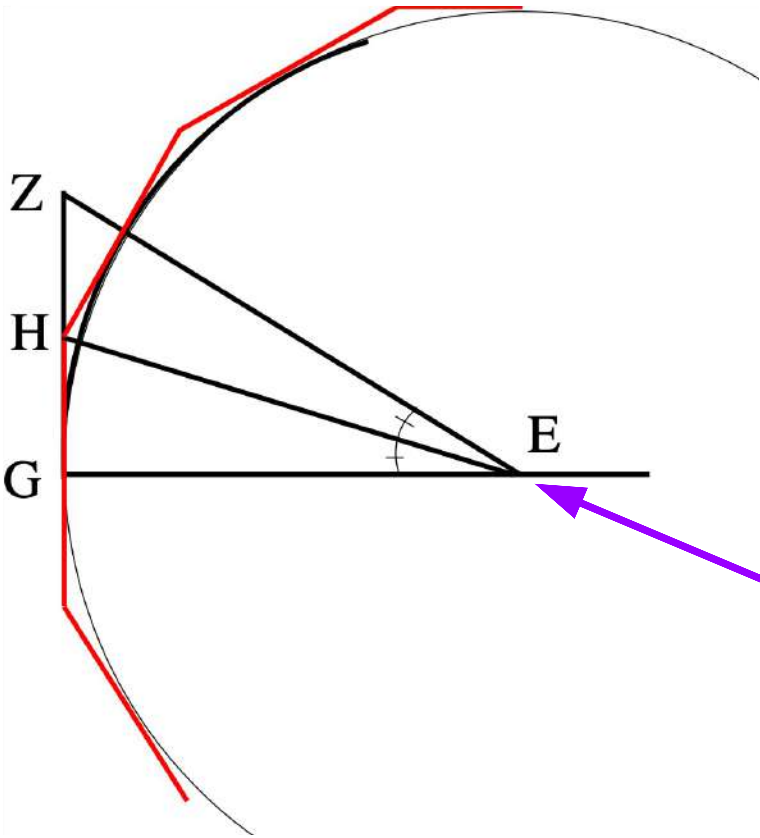


EZ / GZ = 306 / 153

EG / GZ = 265 / 153

Archimède considère ensuite l'angle *moitié*, et le point H

Approximation de π par Archimède



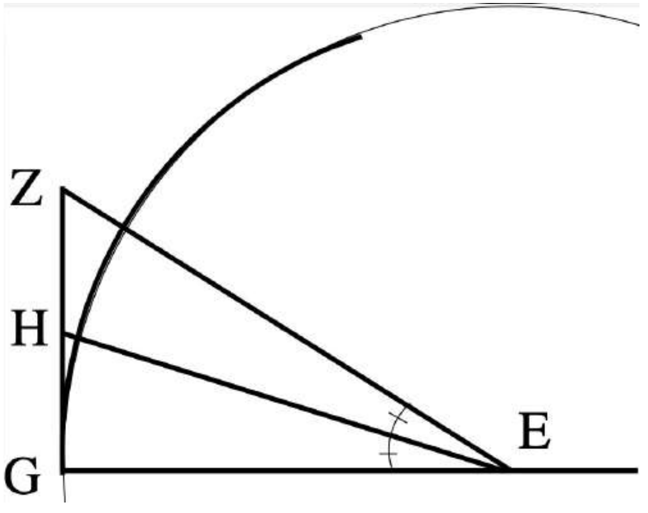
EZ / GZ = 306 / 153

EG / GZ = 265 / 153

Archimède considère ensuite l'angle *moitié*, et le point H

HG = ½ (côté du dodécagone)

Approximation de π par Archimède

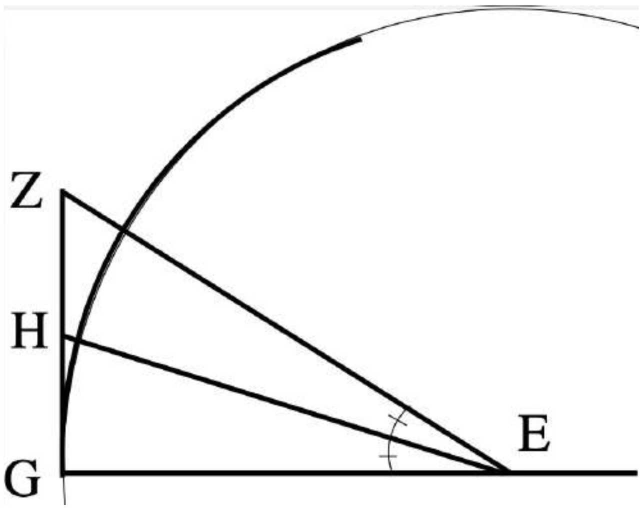


$EZ / GZ = 306 / 153$

$EG / GZ = 265 / 153$

$EZ / ZH = EG / HG$

Approximation de π par Archimède

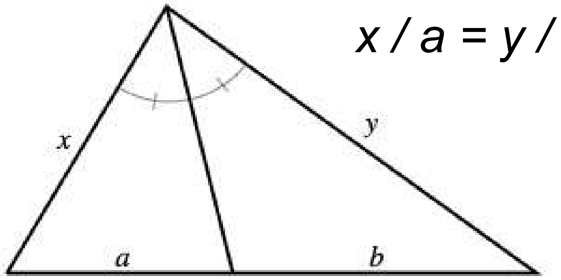


EZ / GZ = 306 / 153

EG / GZ = 265 / 153

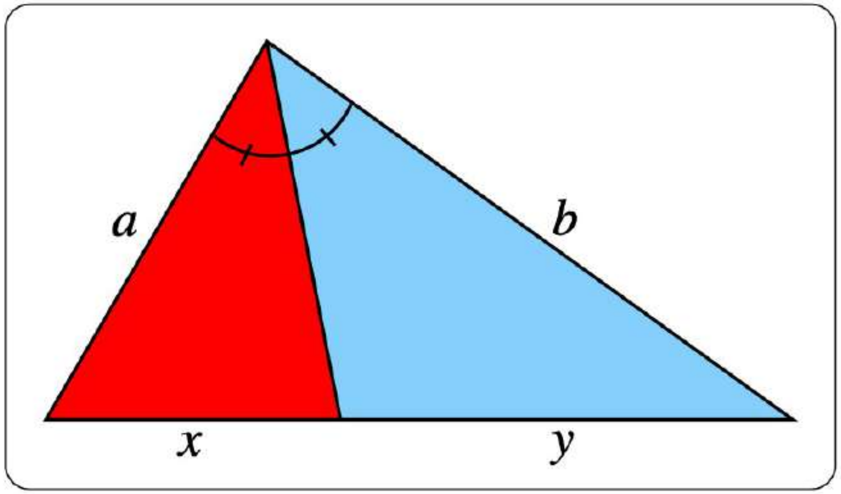
EZ / ZH = EG / HG

Euclide VI - 3

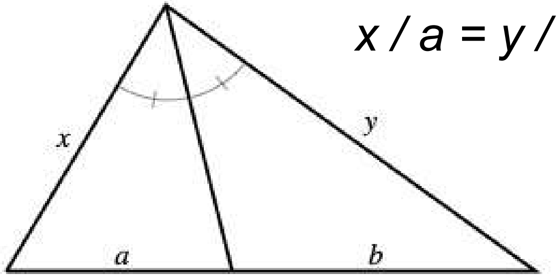


x / a = y / b

Approximation de π par Archimède

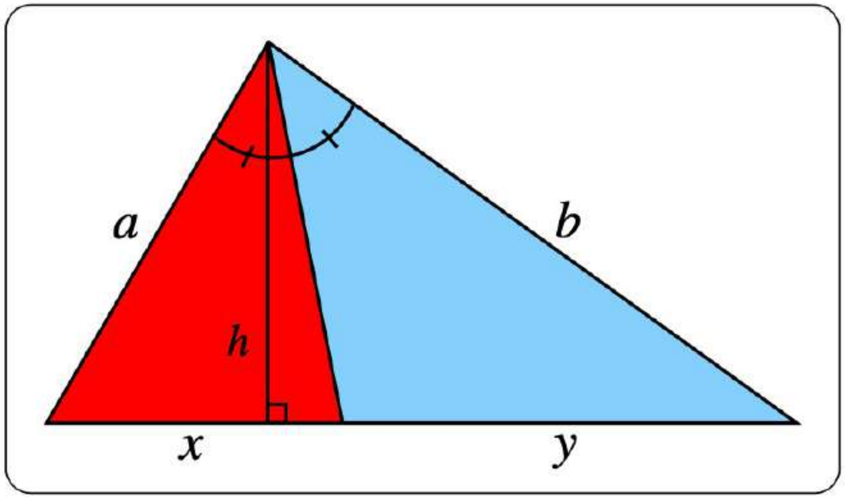


Euclide VI - 3



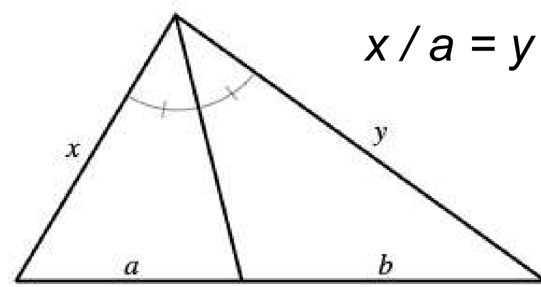
$x / a = y / b$

Approximation de π par Archimède



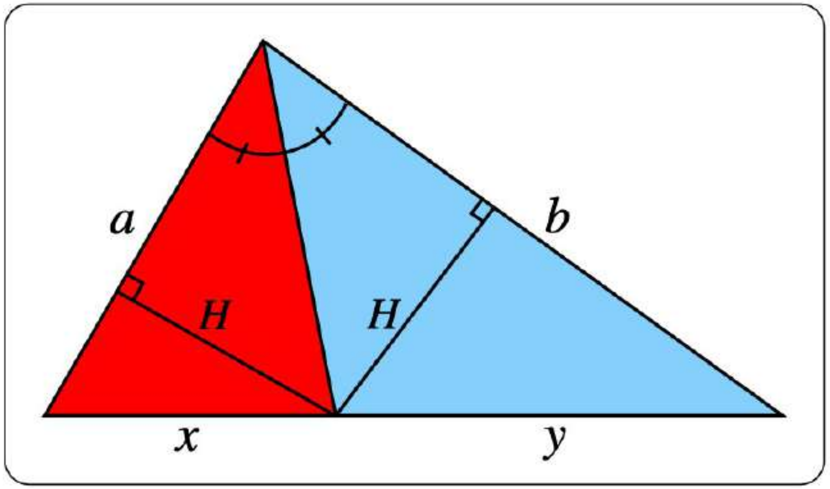
2.$\color{red}{T}$ = x.h
2.$\color{blue}{T}$ = y.h

Euclide VI - 3



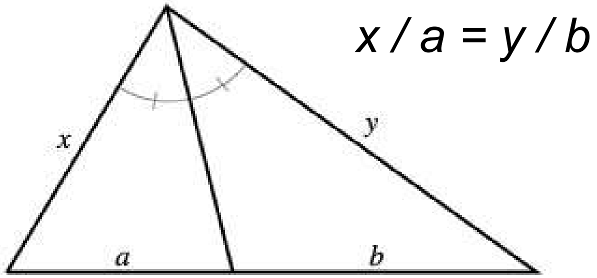
$x / a = y / b$

Approximation de π par Archimède

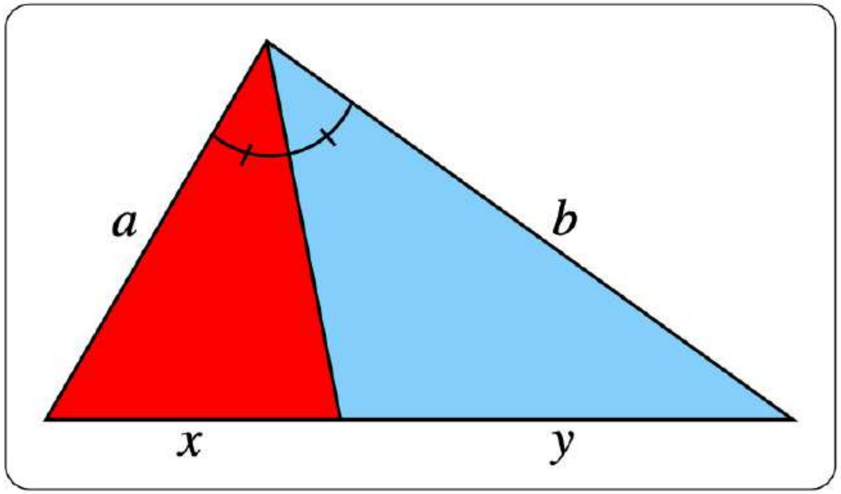


2.T = x.h = $a.H$
2.T = y.h = $b.H$

Euclide VI - 3



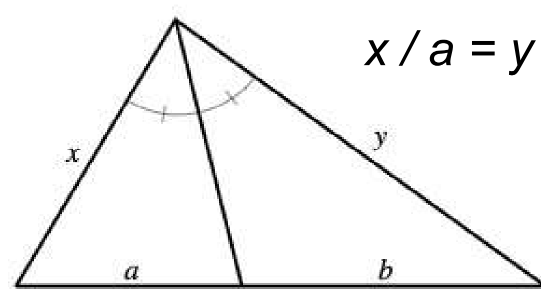
Approximation de π par Archimède



$2.T = x.h = a.H$
$2.T = y.h = b.H$

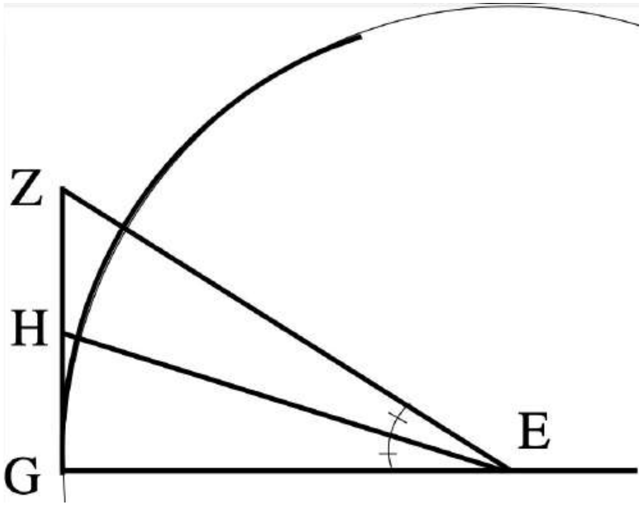
$\rightarrow \quad h / H = x / a = y / b$

Euclide VI - 3



$x / a = y / b$

Approximation de π par Archimède

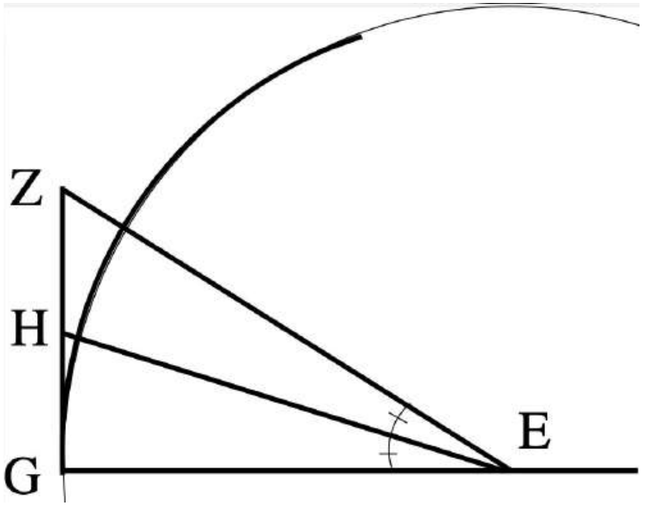


EZ / GZ = 306 / 153

EG / GZ = 265 / 153

EZ / ZH = EG / HG

Approximation de π par Archimède

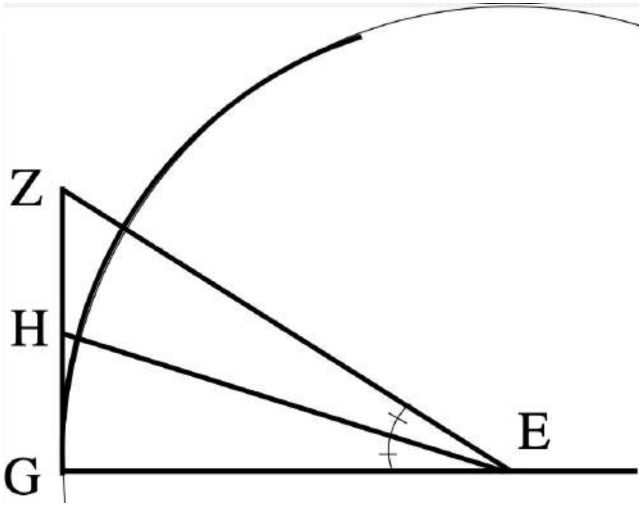


EZ / GZ = 306 / 153

EG / GZ = 265 / 153

EZ / ZH = EG / HG = (EZ + EG) / (ZH+HG)

Approximation de π par Archimède



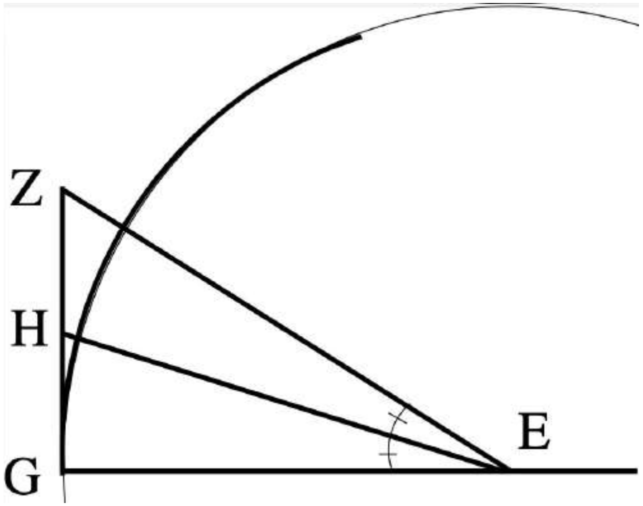
$$EZ / GZ = 306 / 153$$

$$EG / GZ = 265 / 153$$

$$EZ / ZH = EG / HG = (EZ + EG) / (ZH+HG)$$

$$x / a = y / b = (x+y) / (a+b)$$

Approximation de π par Archimède

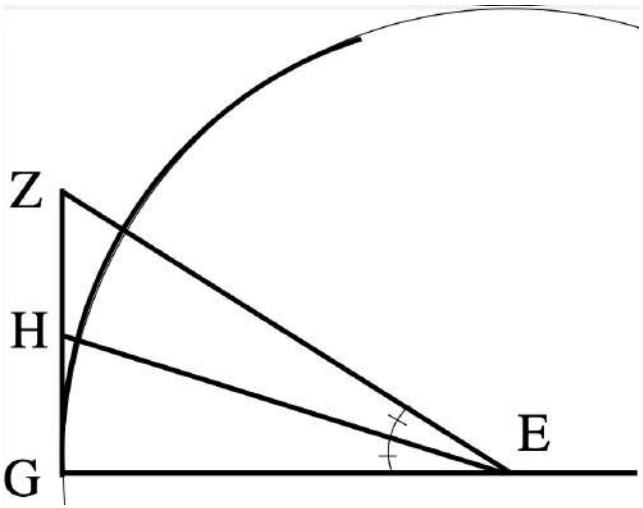


EZ / GZ = 306 / 153

EG / GZ = 265 / 153

EZ / ZH = EG / HG = (EZ + EG) / (ZH+HG) = (EZ + EG) / GZ

Approximation de π par Archimède

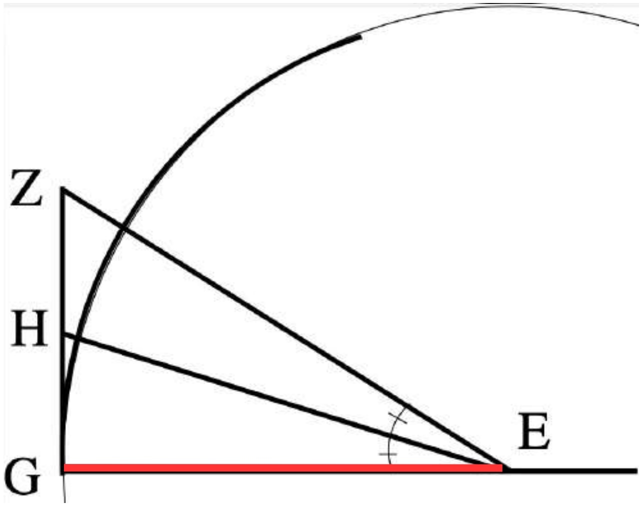


EZ / GZ = 306 / 153

EG / GZ > 265 / 153

EG / HG = (EZ + EG) / GZ

Approximation de π par Archimède

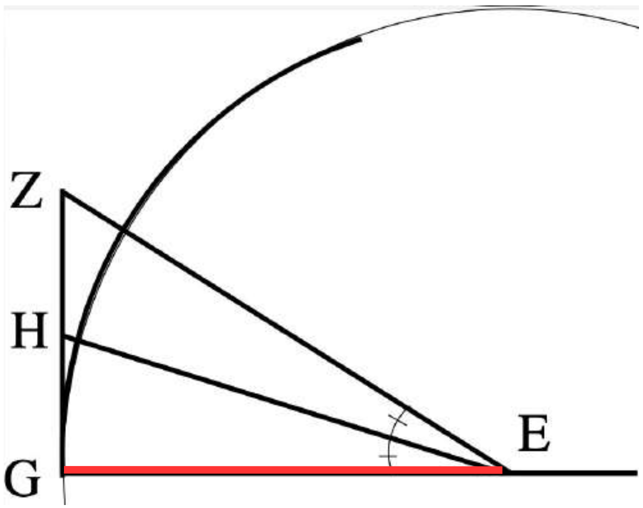


EZ / GZ = 306 / 153

EG / GZ > 265 / 153

EG / HG = (EZ + EG) / GZ

Approximation de π par Archimède

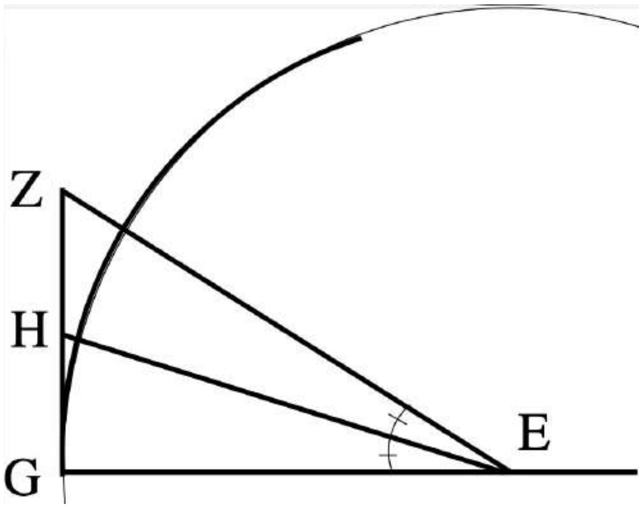


EZ / GZ = 306 / 153

EG / GZ > 265 / 153

EG / HG = (EZ + EG) / GZ > (306 + 265) / 153

Approximation de π par Archimède

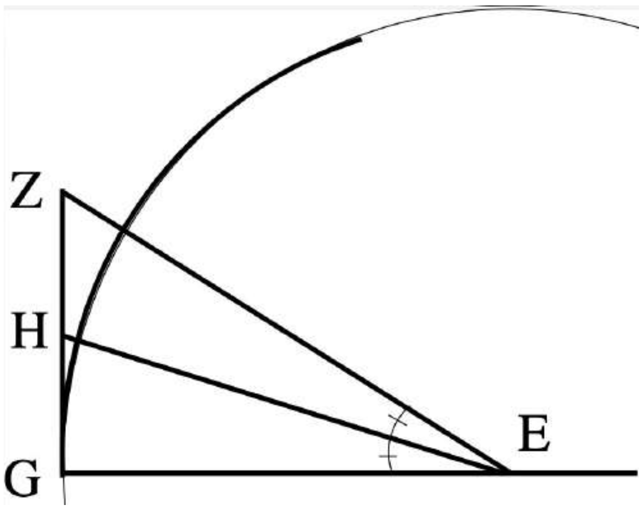


EZ / GZ = 306 / 153

EG / GZ > 265 / 153

EG / GH > 571 / 153

Approximation de π par Archimède



$$EZ / GZ = 306 / 153$$

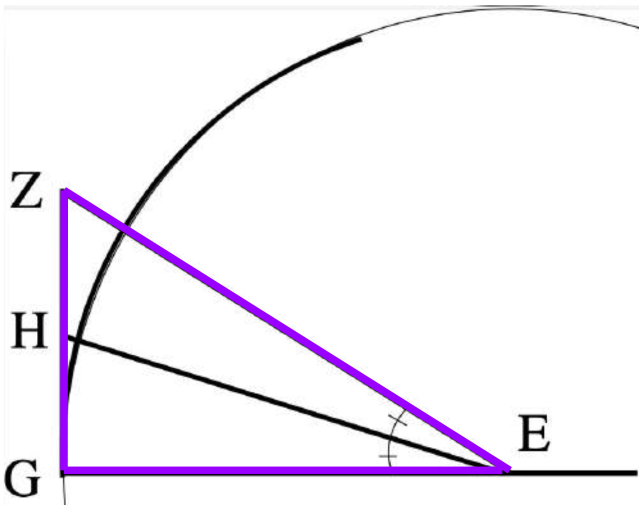
$$EG / GZ > 265 / 153$$

$$EG / GH > 571 / 153$$

et donc (Pythagore)

$$(EH / GH)^2 = (EG / GH)^2 - 1.$$

Approximation de π par Archimède



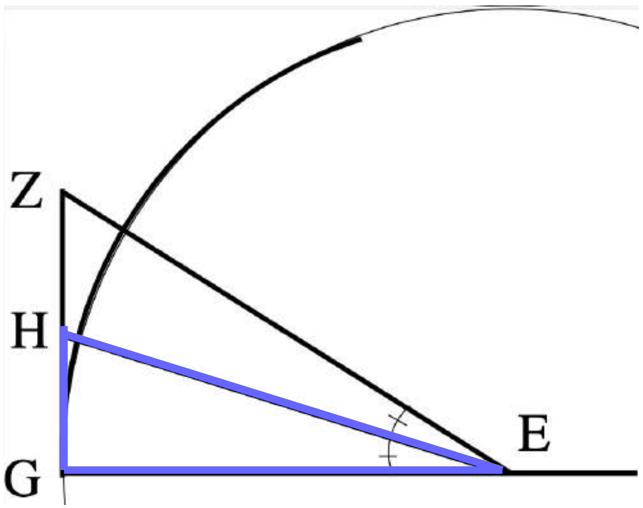
EZ / GZ = 306 / 153

EG / GZ > 265 / 153

EH / GH > 591 $\frac{1}{8}$ / 153

EG / GH > 571 / 153

Approximation de π par Archimède



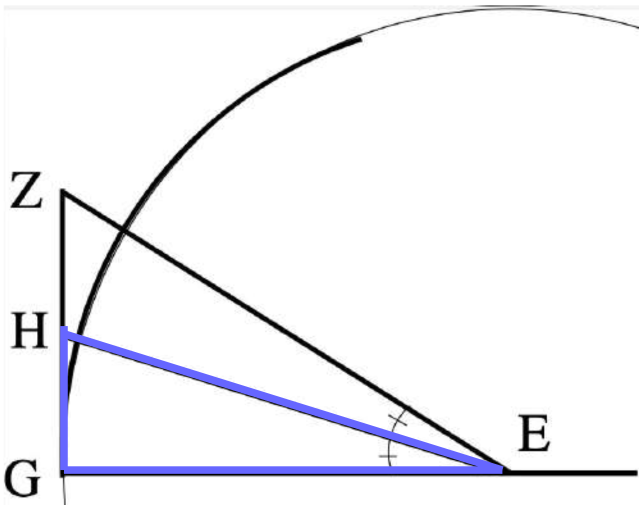
$EZ / GZ = 306 / 153$

$EG / GZ > 265 / 153$

$EH / GH > 591\tfrac{1}{8} / 153$

$EG / GH > 571 / 153$

Approximation de π par Archimède



EZ / GZ = 306 / 153

EG / GZ > 265 / 153

↓

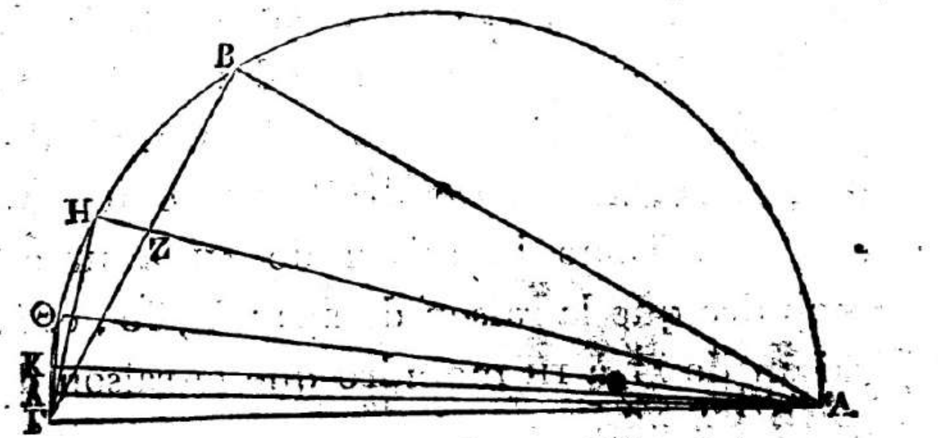
EH / GH > 591 $\frac{1}{8}$ / 153

EG / GH > 571 / 153

→ Connaissant le rayon,
on peut calculer Périmètre(dodécagone) = 24.HG, et *itérer*...

Approximation de π par Archimède

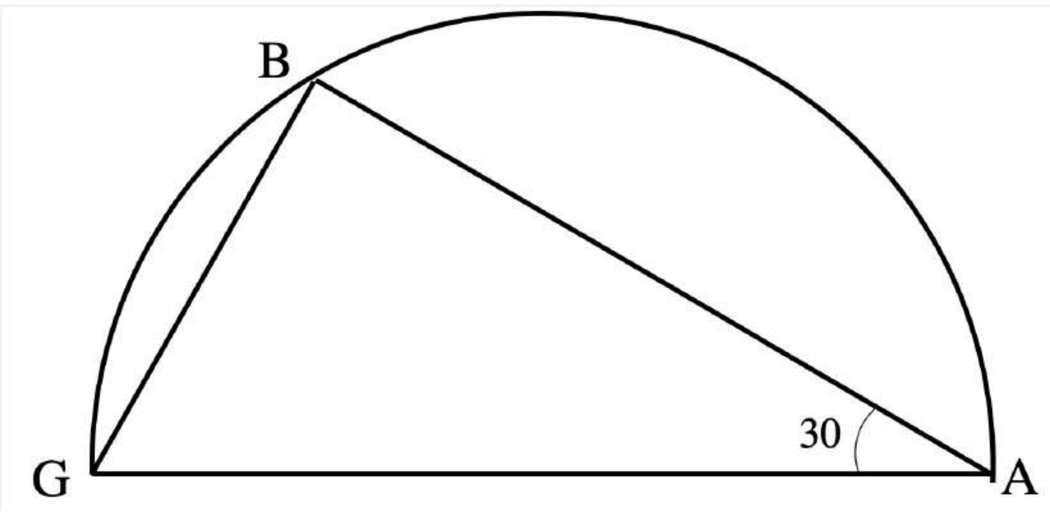
Soit le cercle dont AΓ est le diamètre. Que l'angle BAΓ soit la troisième partie d'un angle droit; la raison de AB à BΓ sera moindre que la raison de 1351 à 780; et la raison



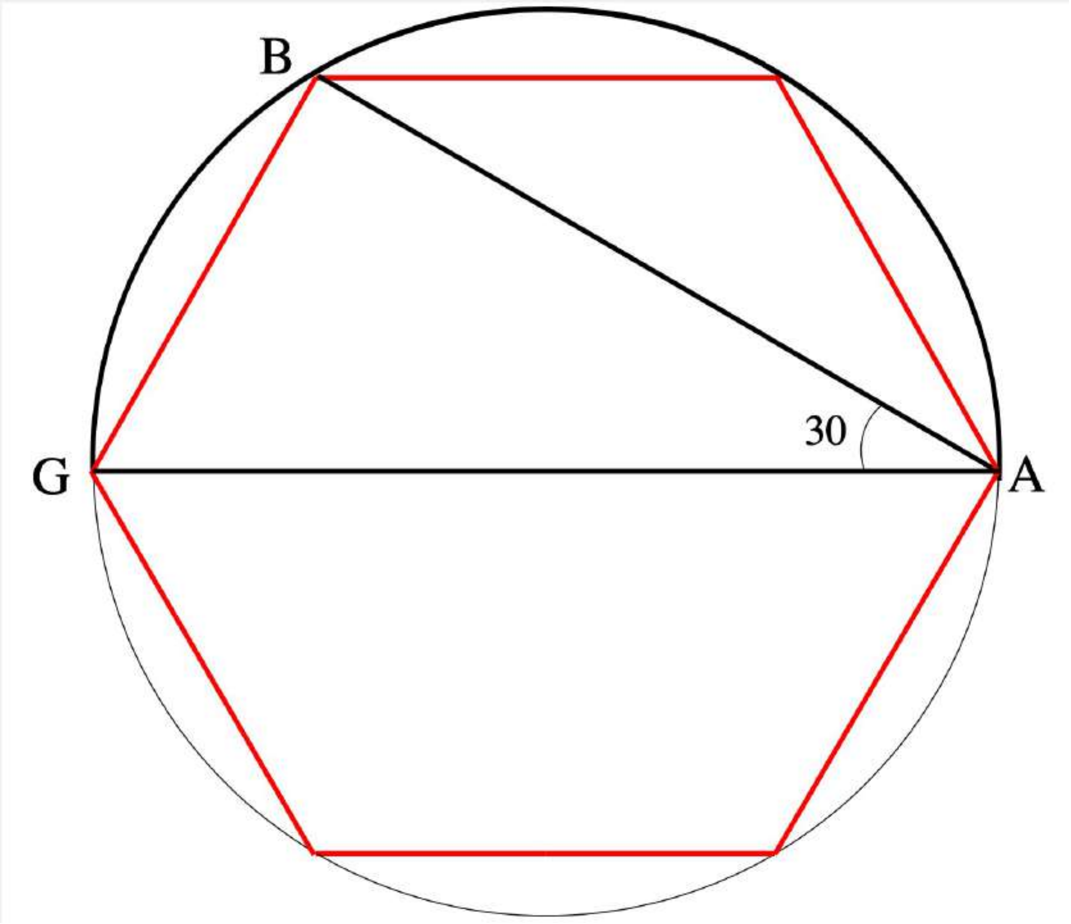
de AΓ à ΓB sera la même que celle de 1560 à 780.

Partageons l'angle BAΓ en deux parties égales par la droite AH. Puisque l'angle BAH est non-seulement égal à l'angle HΓB, mais encore à l'angle HAΓ, l'angle HΓB sera égal à

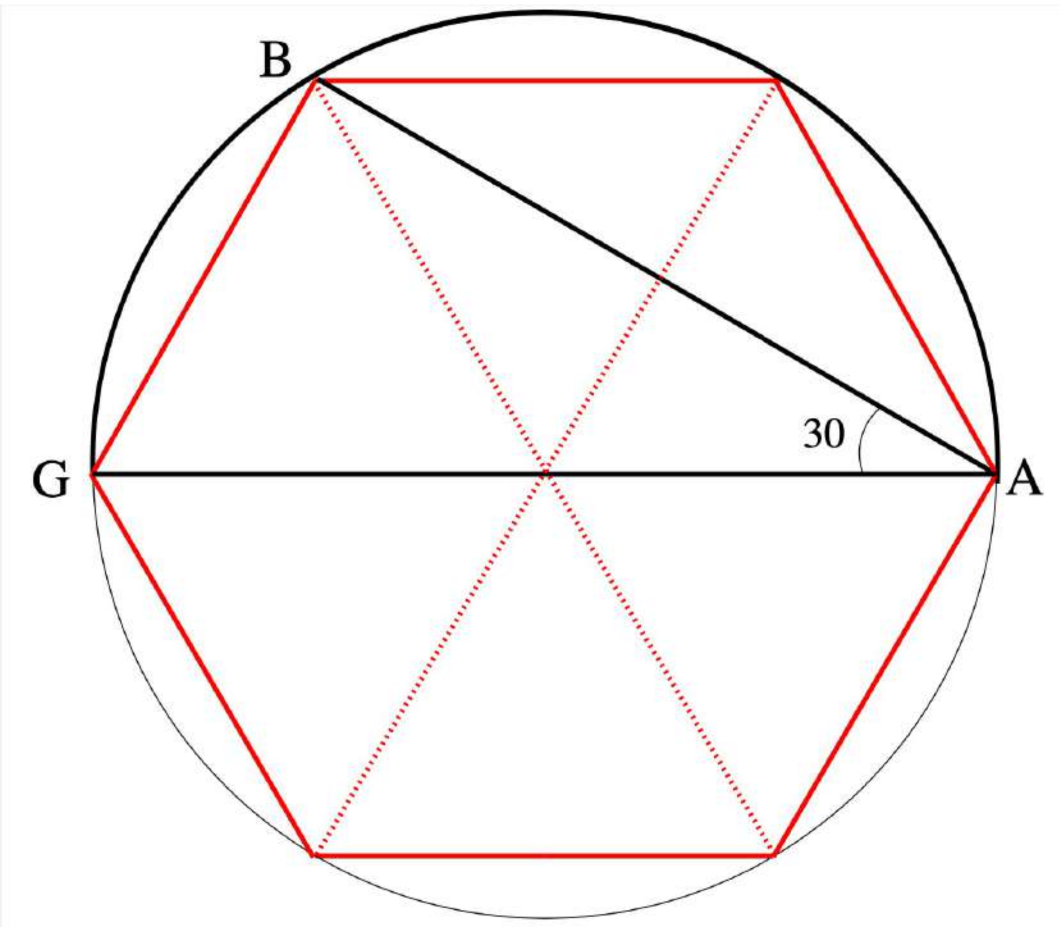
Approximation de π par Archimède



Approximation de π par Archimède

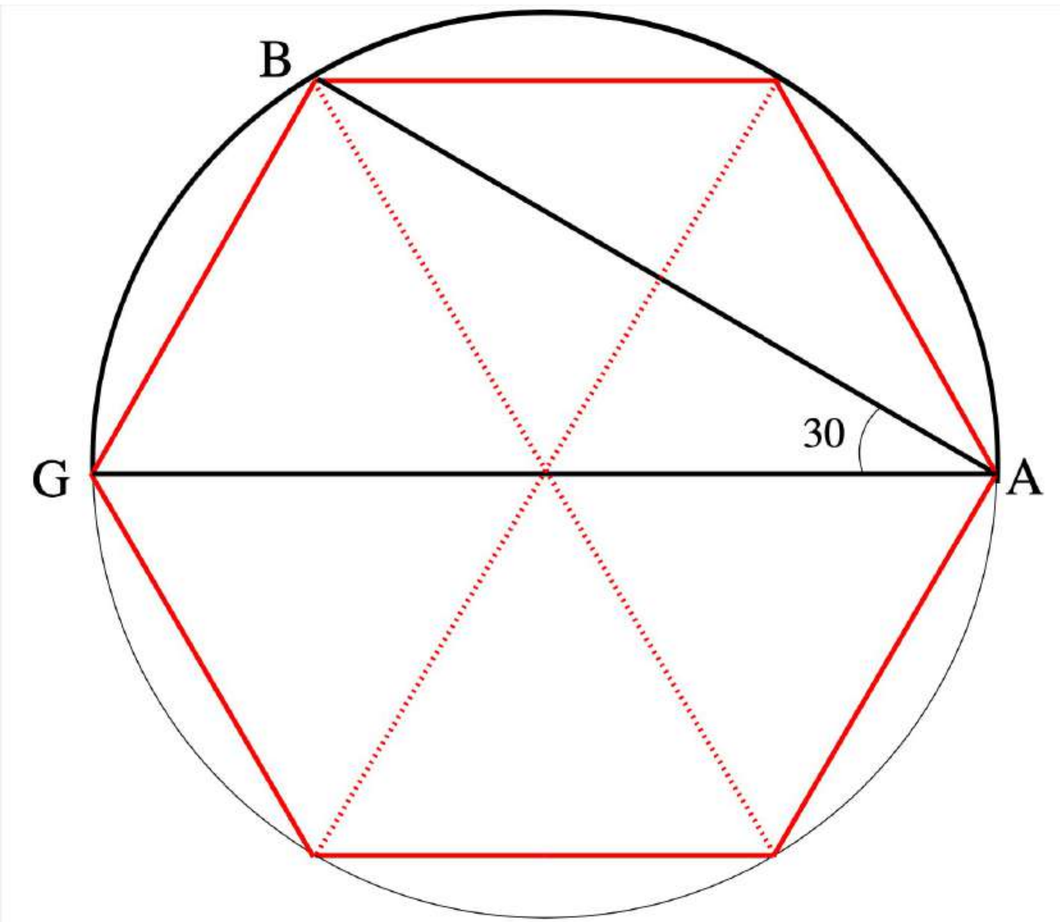


Approximation de π par Archimède



AG / GB = 2

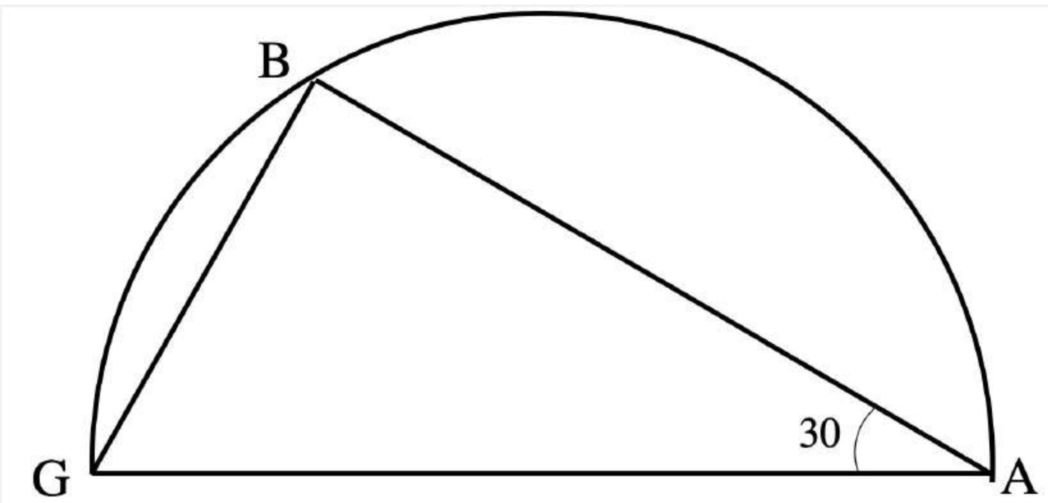
Approximation de π par Archimède



AB / GB = √3 (Pythagore)

AG / GB = 2

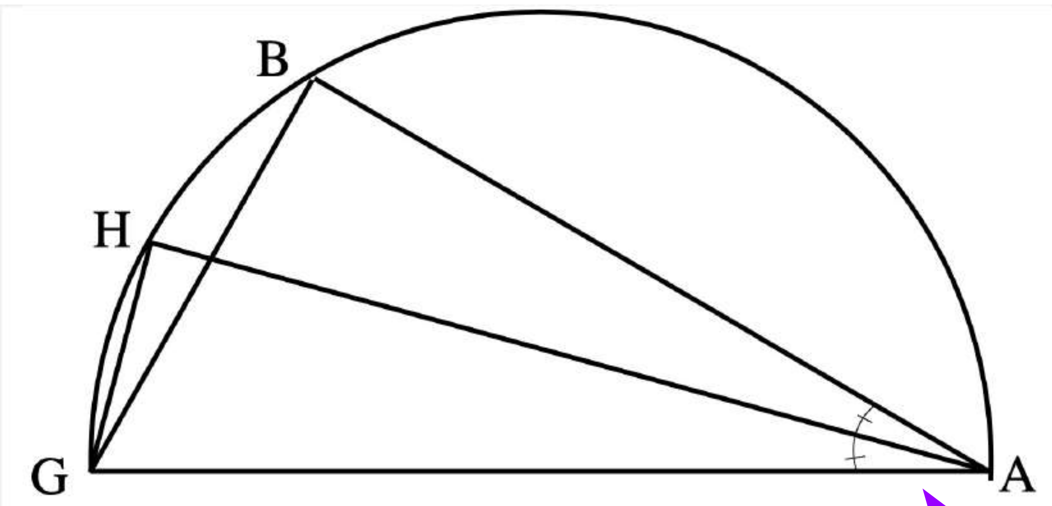
Approximation de π par Archimède



AB / GB < 1351 / 780

AG / GB = 1560 / 780

Approximation de π par Archimède

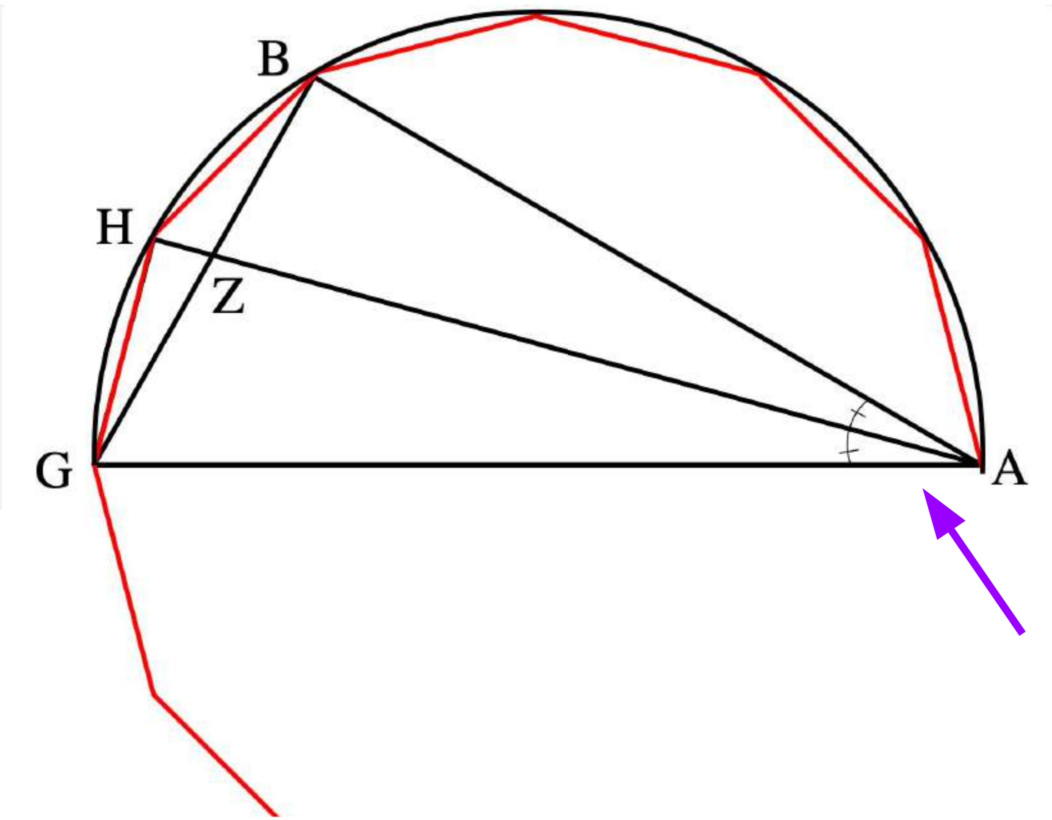


AB / GB < 1351 / 780

AG / GB = 1560 / 780

Archimède considère à nouveau l'angle *moitié*, et le point H

Approximation de π par Archimède



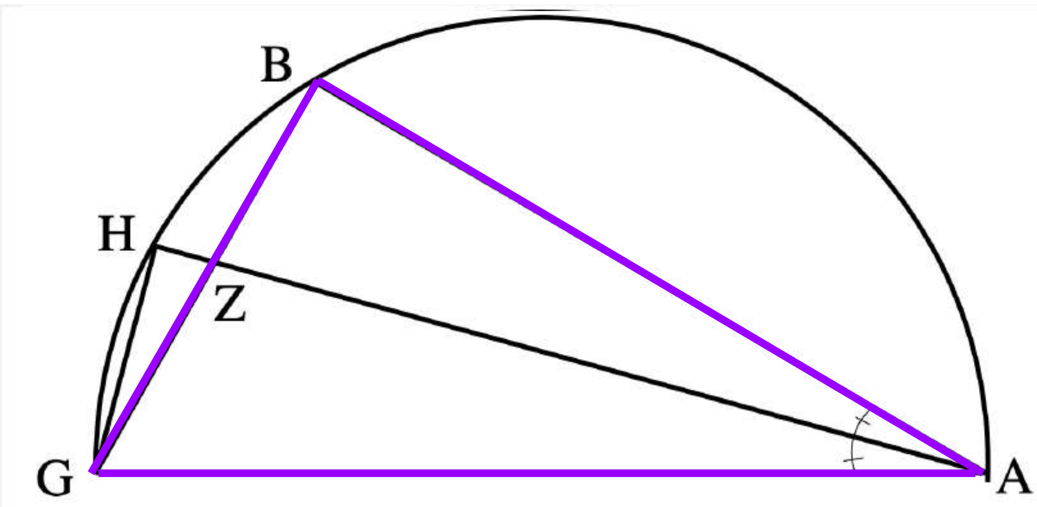
AB / GB < 1351 / 780

AG / GB = 1560 / 780

Archimède considère à nouveau l'angle *moitié*, et le point H

HG = ½ (côté du dodécagone)

Approximation de π par Archimède

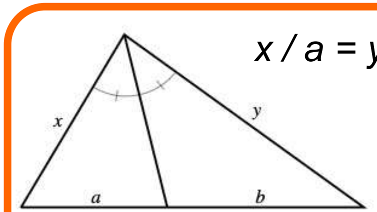


AB / GB < 1351 / 780

AG / GB = 1560 / 780

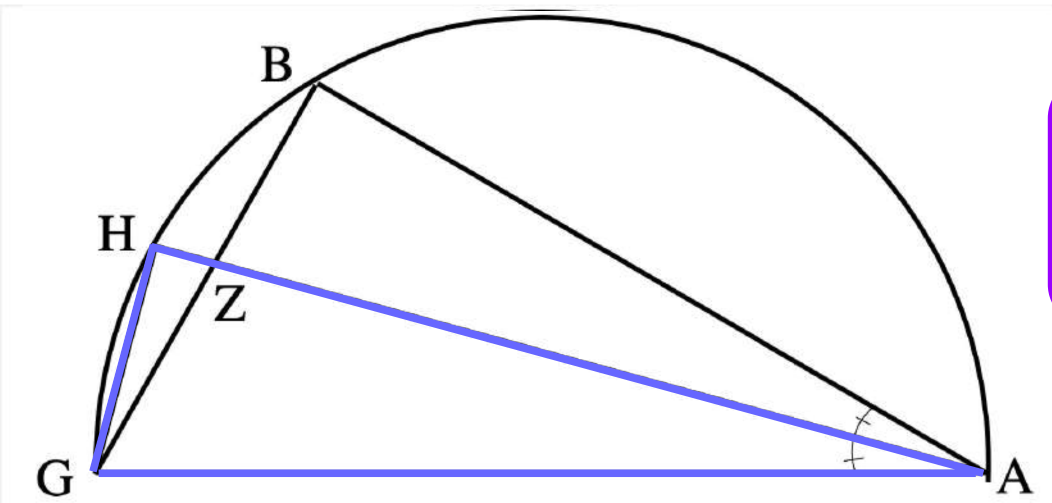
… et par des méthodes similaires

x / a = y / b



x / a = y / b = (x+y) / (a+b)

Approximation de π par Archimède



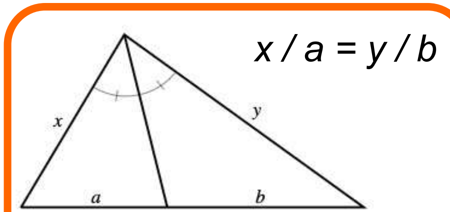
AB / GB < 1351 / 780

AG / GB = 1560 / 780

AH / HG < 2911 / 780

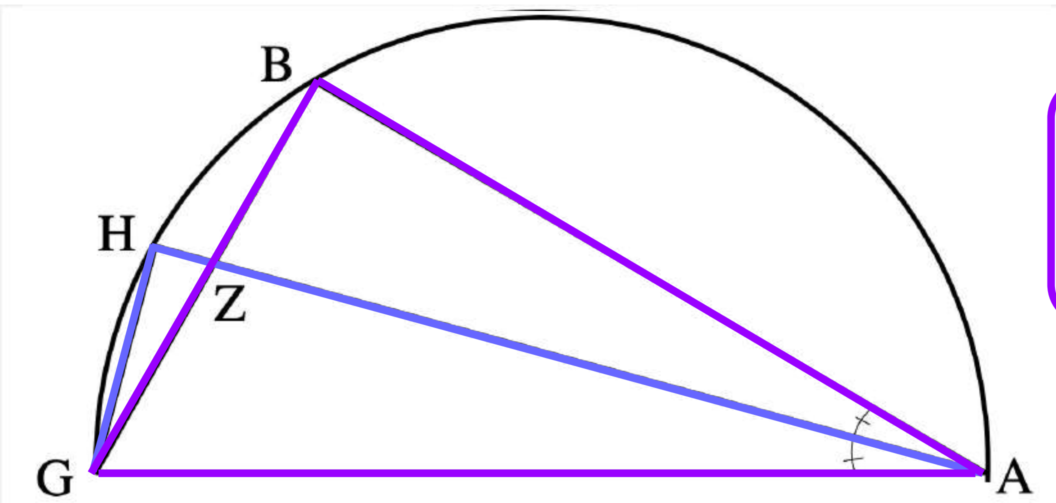
AG / HG = 3013 $\frac{1}{4}$ / 780

… et par des méthodes similaires



x / a = y / b = (x+y) / (a+b)

Approximation de π par Archimède



AB / GB < 1351 / 780

AG / GB = 1560 / 780

AH / HG < 2911 / 780

AG / HG < 3013 $\frac{1}{4}$ / 780

→ On peut calculer Périmètre(dodécagone) = 12.HG

… et *itérer* !

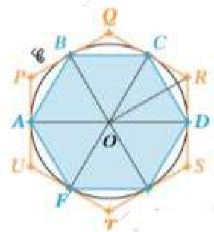
et dans les manuels...

Partie A **« Papier-crayon » : mise en place de deux s**

On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Étape $n = 1$

Sur la figure ci-contre, les hexagones réguliers $ABCDEF$ et $PQRSTU$ sont respectivement inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ et circonscrit à $\mathscr{C}$.
Les milieux des côtés de $PQRSTU$ sont les sommets de $ABCDEF$.



a. Justifier que (OR) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DOC}$.

b. Justifier que :

• l'arête de l'hexagone $ABCDEF$ mesure $2\sin\frac{\pi}{6}$

• l'arête de l'hexagone $PQRSTU$ mesure $2\tan\frac{\pi}{6}$.

c. En déduire que $3 < \pi < 2\sqrt{3}$.

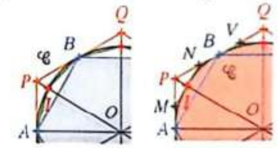
2. D'une étape k à l'étape $(k+1)$

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on note $\mathscr{I}_k$ le polygone inscrit dans $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}_k$ le polygone circonscrit à $\mathscr{C}$ à l'étape k.

Les polygones de l'étape $(k+1)$ se construisent à partir des polygones $\mathscr{I}_k$, $\mathscr{P}_k$ et des points d'intersection des rayons « point O - sommet de $\mathscr{P}_k$ » avec le cercle $\mathscr{C}$:

• le polygone inscrit $\mathscr{I}_{k+1}$ a pour sommets ces points et les sommets de $\mathscr{I}_k$;

• le polygone circonscrit $\mathscr{P}_{k+1}$ est porté par les parallèles en ces points aux arêtes de $\mathscr{I}_k$ et les arêtes de $\mathscr{P}_k$.



Justifier que pour tout entier $n \geqslant 1$:

a. les polygones $\mathscr{I}_n$ et $\mathscr{P}_n$ possèdent $6 \times 2^{n-1}$ arêtes ;

b. l'arête du polygone $\mathscr{I}_n$ mesure $2\sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$;

c. l'arête du polygone $\mathscr{P}_n$ mesure $2\tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$.

3. En déduire un encadrement de π obtenu à l'étape n.

Partie B **Estimation de π et précision**

1. On considère la fonction `périmètre_inscrit` écrite en langage Python suivante.

```
from math import*
def périmètre_inscrit(n):
    a=2*sin(pi/(3*2**n))
    N=6*2**(n-1)
    return a*N/2
```

a. Calculer les images par `périmètre_inscrit` des entiers compris entre 1 et 5.

b. Que représentent ces valeurs dans le contexte de l'exercice ?

c. Que renvoie la fonction `périmètre_inscrit` de façon générale ?

2. Écrire une fonction `périmètre_circonscrit` qui prend en argument le numéro n de l'étape et qui renvoie le périmètre du polygone $\mathscr{P}_n$. La programmer.

3. a. Soit un réel $p > 0$. Écrire et programmer une fonction `encadrement` prenant en argument le réel p et renvoyant une valeur approchée de π à p près.

b. Au bout de combien d'étapes obtient-on une estimation de π à 0,001 près ?

4. Dans son ouvrage *De la mesure du cercle*, Archimède propose l'encadrement suivant :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

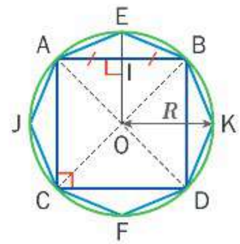
Cet encadrement est-il compatible avec les calculs précédents ?

Déclic
1ère Spé
Hachette
TP (p. 231)

et dans les manuels...

1re méthode : avec le théorème de Pythagore

1. ABCD est un carré de côté c_1 inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R comme sur la figure ci-contre.



a. Exprimer c_1 en fonction de R en utilisant le théorème de Pythagore.

b. Exprimer le périmètre p_1 de ce carré en fonction de R.

c. Quelle valeur de R faut-il choisir pour que p_1 soit une approximation de π ?

2. On cherche à calculer le périmètre p_2 de l'octogone AEBKDFCJ de côté c_2 inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$.
La médiatrice de [AB] coupe $\mathscr{C}$ en E et [AB] en I.
À l'aide du théorème de Pythagore, exprimer la longueur EI en fonction de AB et de R.
En déduire c_2, puis p_2, en fonction de c_1 et R.

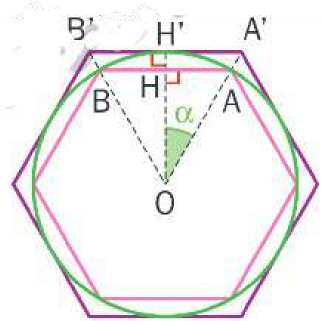
3. PROGRAMMATION python

a. Écrire un algorithme qui permet d'obtenir le côté et le périmètre d'un polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans un cercle de rayon R ($n \geqslant 3$).

b. Programmer cet algorithme en Python.

c. **Chercher** | Exécuter ce programme et comparer les résultats obtenus avec ceux d'Archimède qui a trouvé $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$.

2e méthode : avec la trigonométrie



Calculer dans ce cas la mesure de l'angle α, en degrés, puis montrer que :

$$AB = 2\sin(\alpha) \quad \text{et} \quad A'B' = 2\tan(\alpha).$$

En déduire p_6 et P_6.

b. Si on généralise à des polygones réguliers à n côtés (n pair), exprimer p_n et P_n en fonction de n.

c. TICE À l'aide d'un tableur, calculer les valeurs de p_n, P_n et $P_n - p_n$ pour n pair jusqu'à $n = 96$ (valeurs calculées par Archimède).

d. Que peut-on conclure au sujet de l'encadrement de π obtenu ?

Variations Maths
1ère Spé
Hatier
Exercice (p. 210)

et dans les internets...

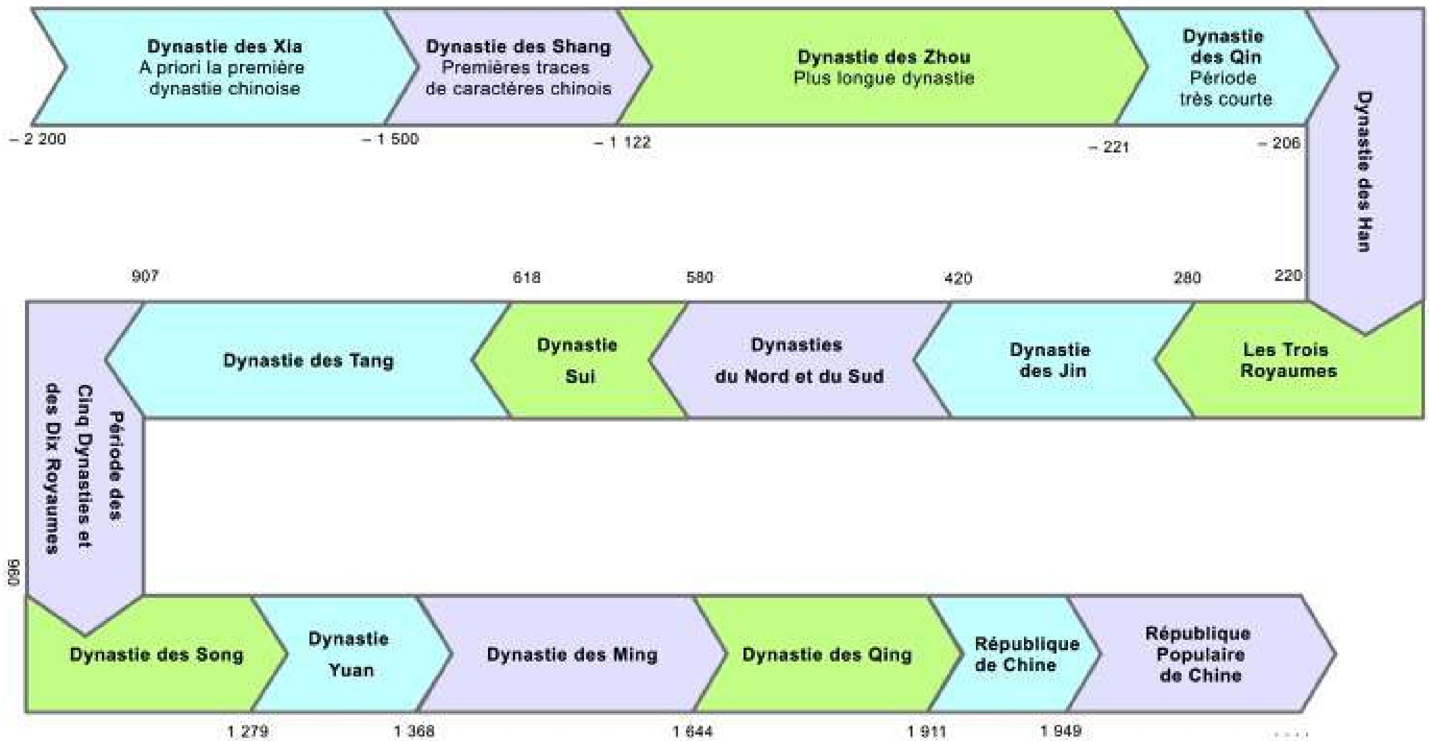
(s'il y a du réseau)

Archimède de Syracuse (-287/-212)

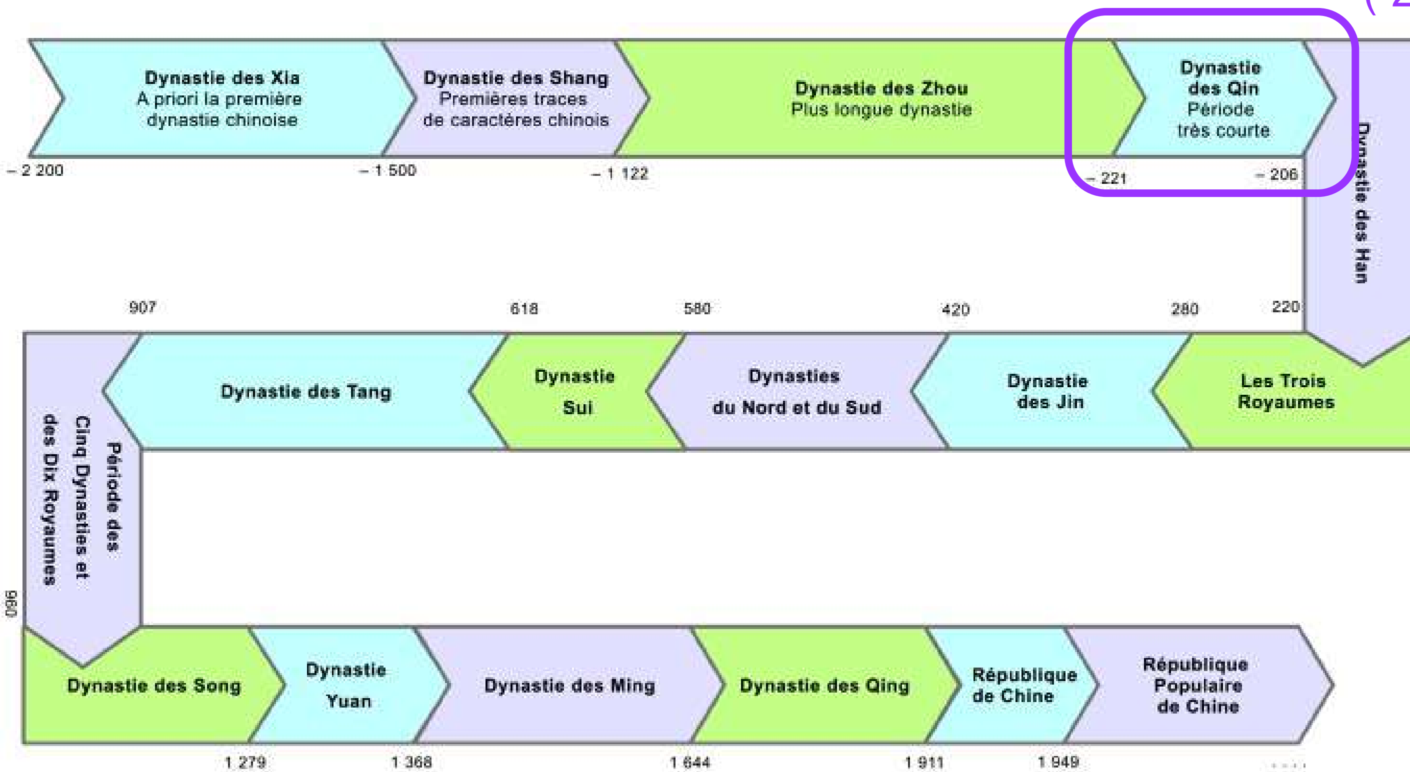
Liu Hui (225/295)

Liu Hui (225/295)

Aperçu historique



Qin Shi Huang
(-221 à -210)

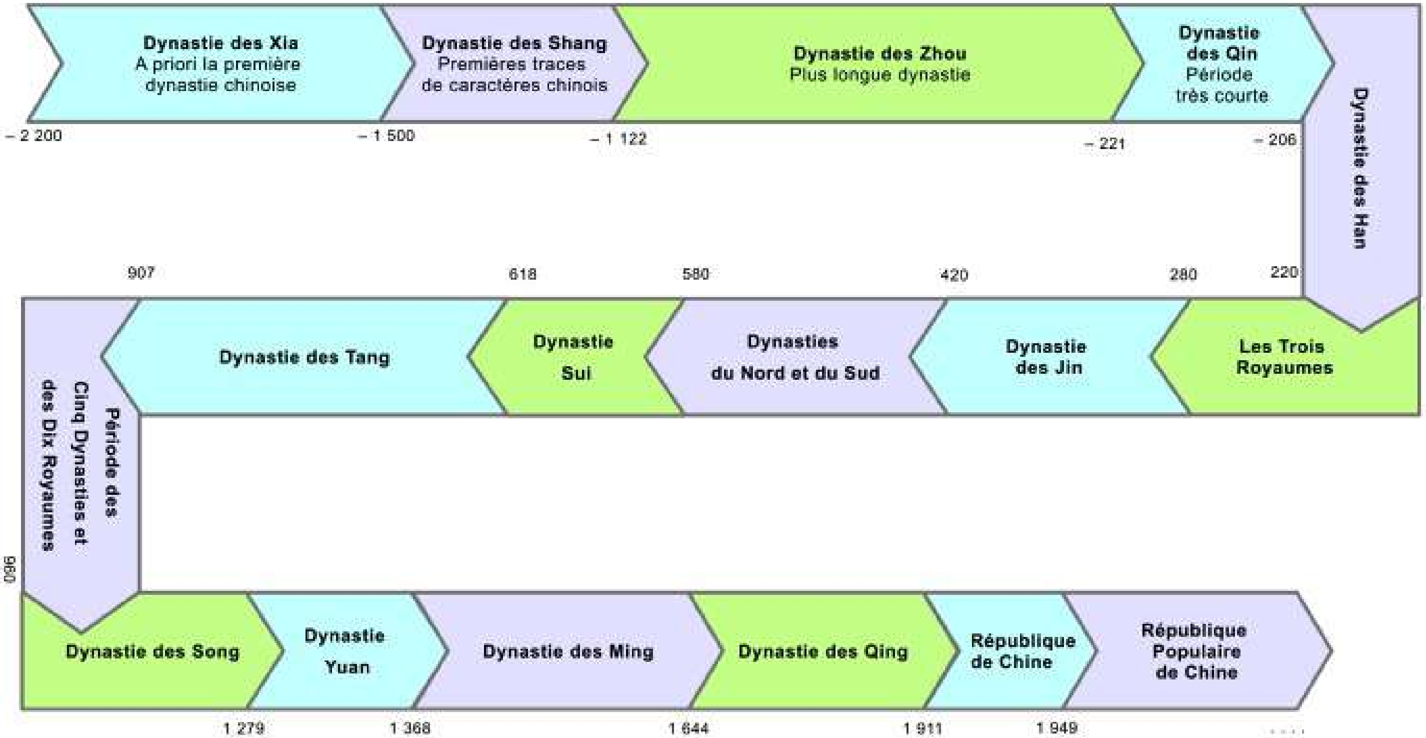


-221 : Qin Shi Huang, premier empereur de Chine

Réforme/unification du système administratif, des systèmes de mesure, de monnaie, d'écriture...

Début de la construction de la grande muraille

Qin Shi Huang (-221 à -210)

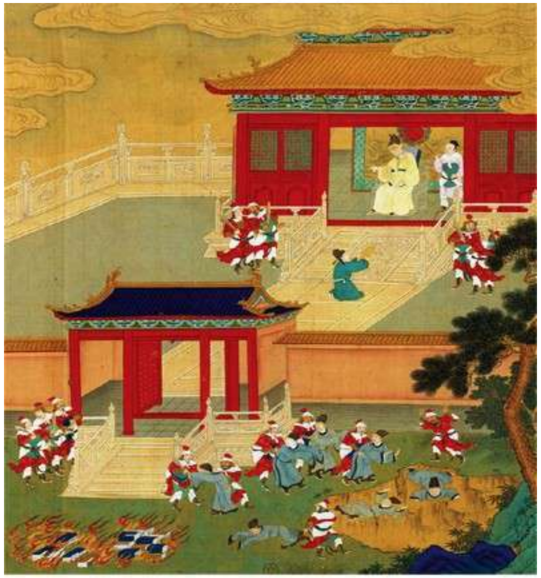


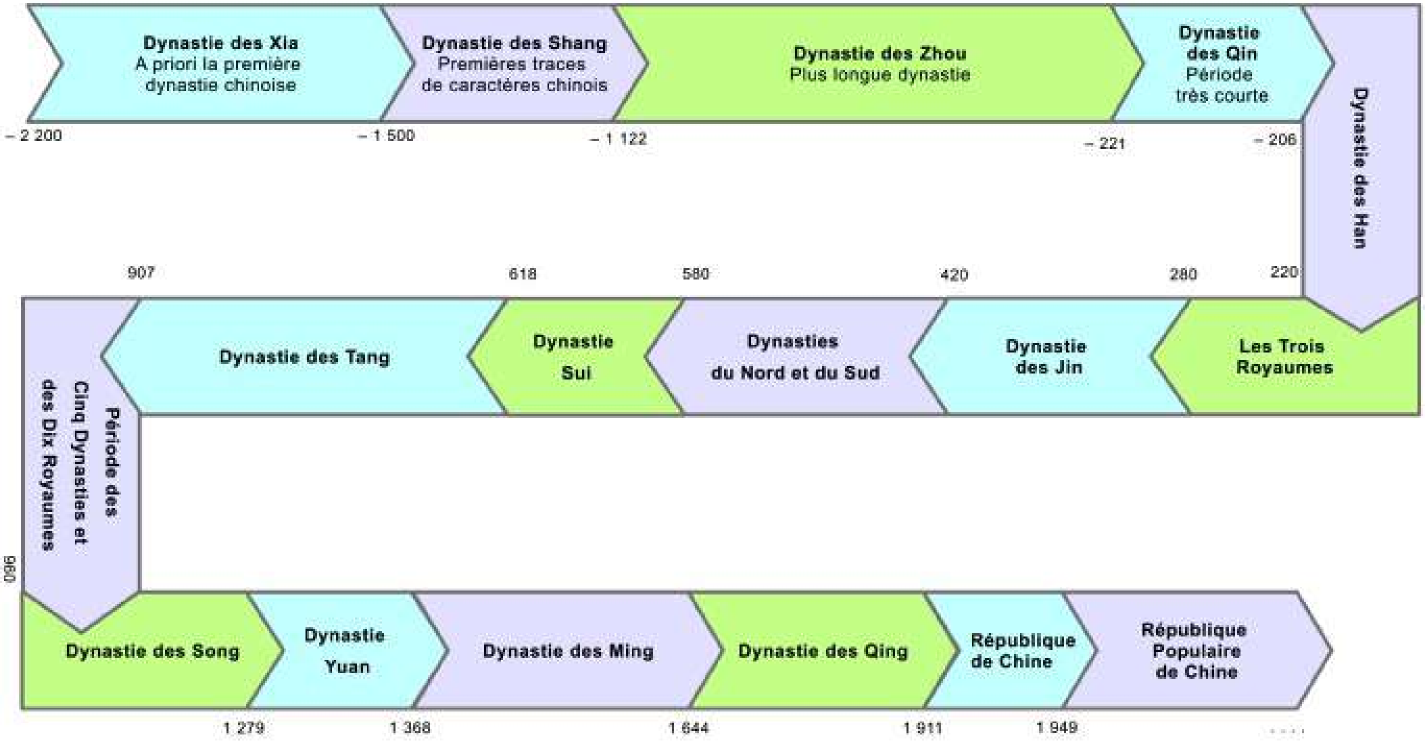
-221 : Qin Shi Huang, premier empereur de Chine

Réforme/unification du système administratif, des systèmes de mesure, de monnaie, d'écriture...

Début de la construction de la grande muraille

-213 : Autodafé, 460 lettrés enterrés vivants





-221 : Qin Shi Huang, premier empereur de Chine

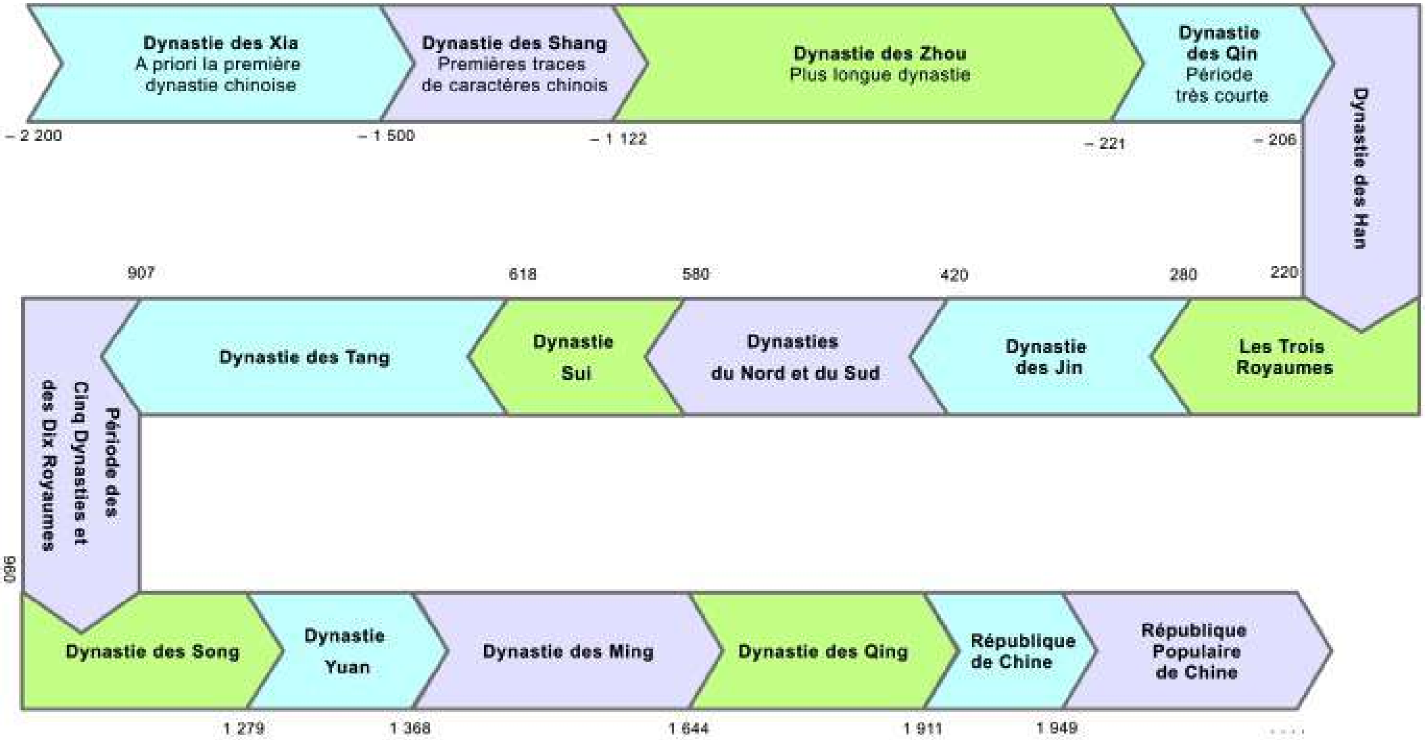
Réforme/unification du système administratif, des systèmes de mesure, de monnaie, d'écriture...

Début de la construction de la grande muraille

-213 : Autodafé, 460 lettrés enterrés vivants

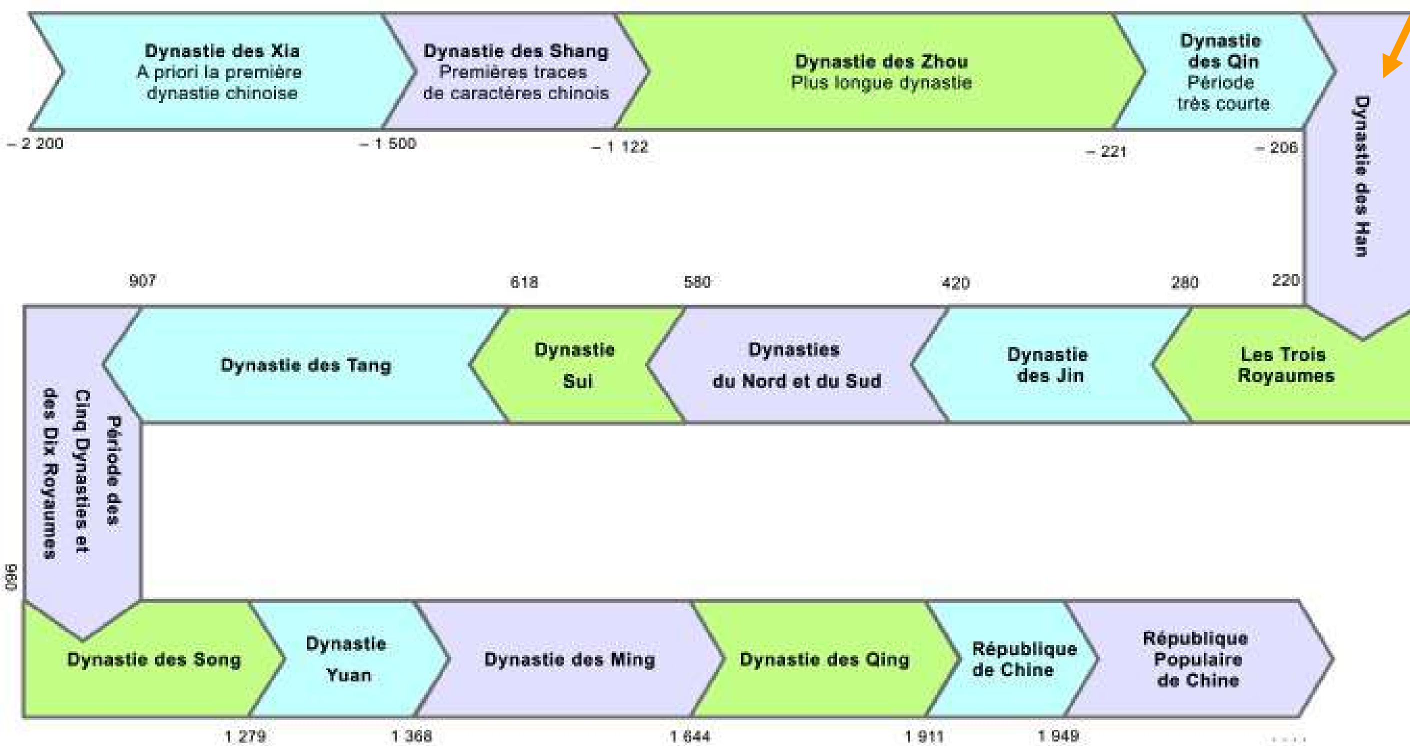
-210 : mort de Qin Shi Huang

Déclin rapide de l'empire Qin



Les Neuf Chapitres (IIe / Ier siècle av. JC)
Auteur(s) et date d'écriture inconnus

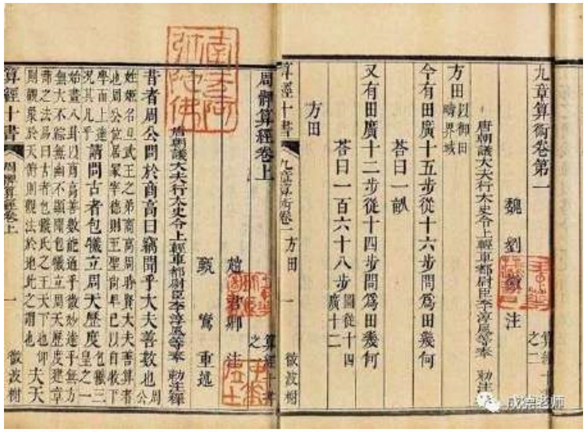
Les Neuf Chapitres
(entre -200 et -100)



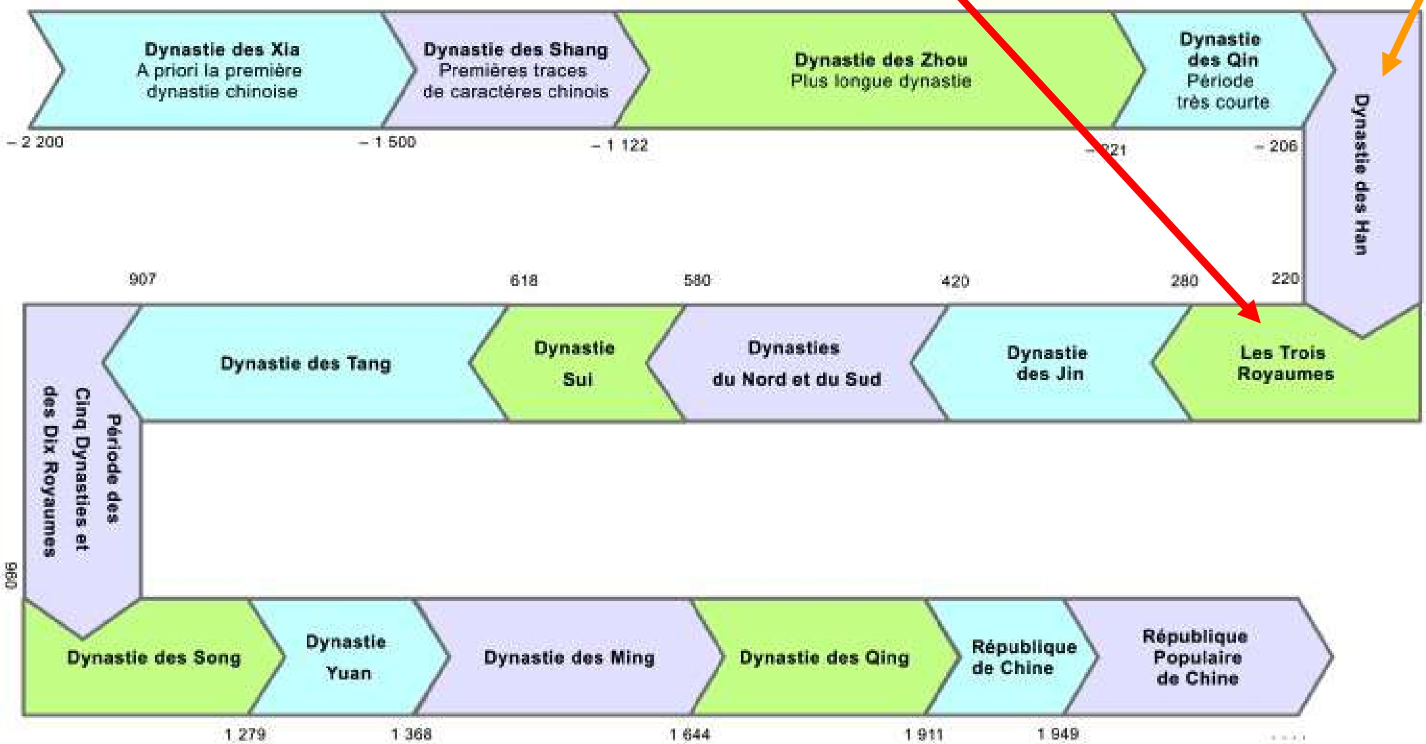
Les Neuf Chapitres (IIe / Ier siècle av. JC)
Auteur(s) et date d'écriture inconnus

Commentaires de Liu Hui (IIIe)
premières démonstrations connues en langue Chinoise

Liu Hui
(~225-275)



Les Neuf Chapitres
(entre -200 et -100)

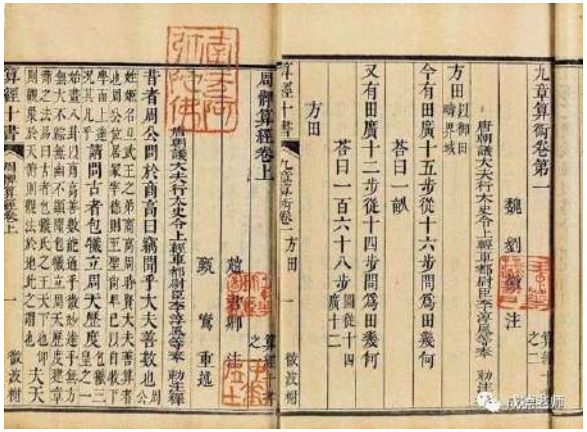


Les Neuf Chapitres (IIe / Ier siècle av. JC)
Auteur(s) et date d'écriture inconnus

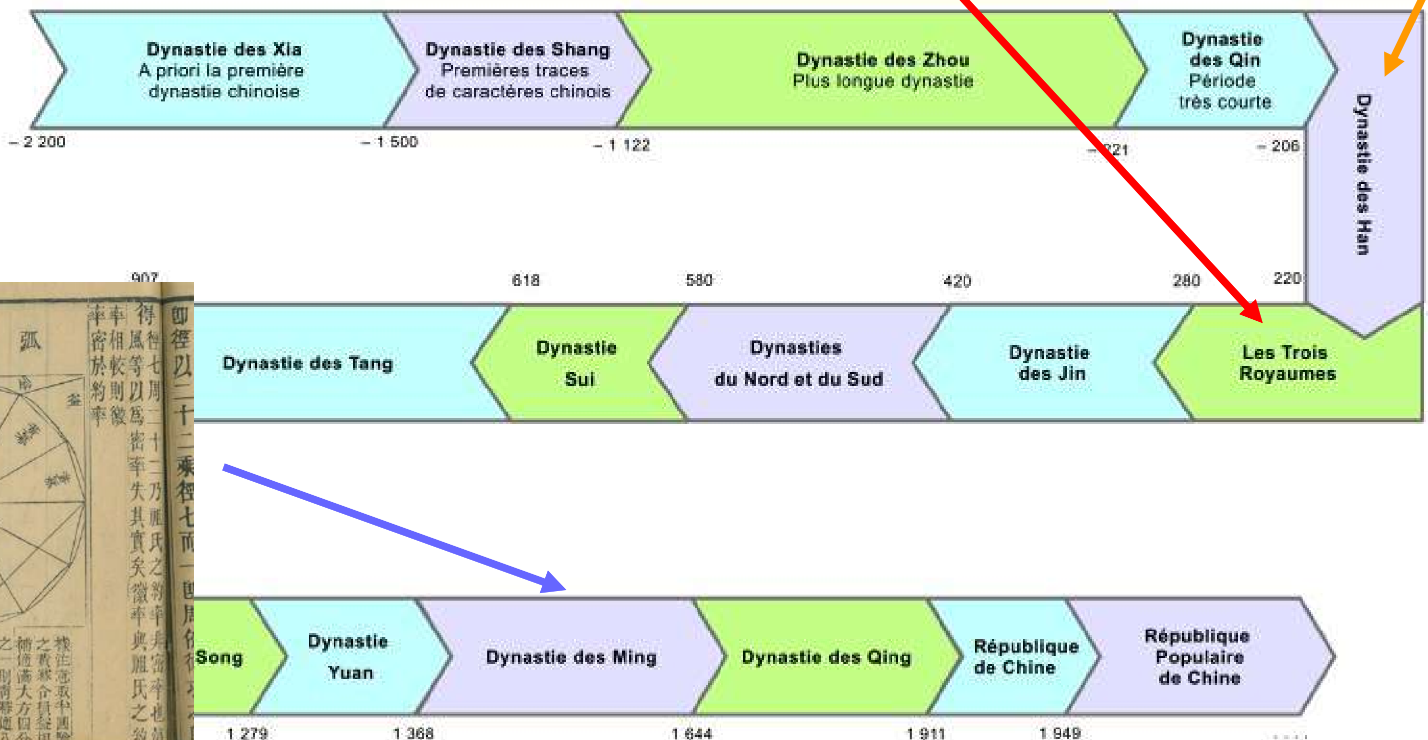
Commentaires de Liu Hui (IIIe)
premières démonstrations connues en langue Chinoise

Texte de référence (Chine, Japon, Corée) jusqu'au XVIe

Liu Hui
(~225-275)

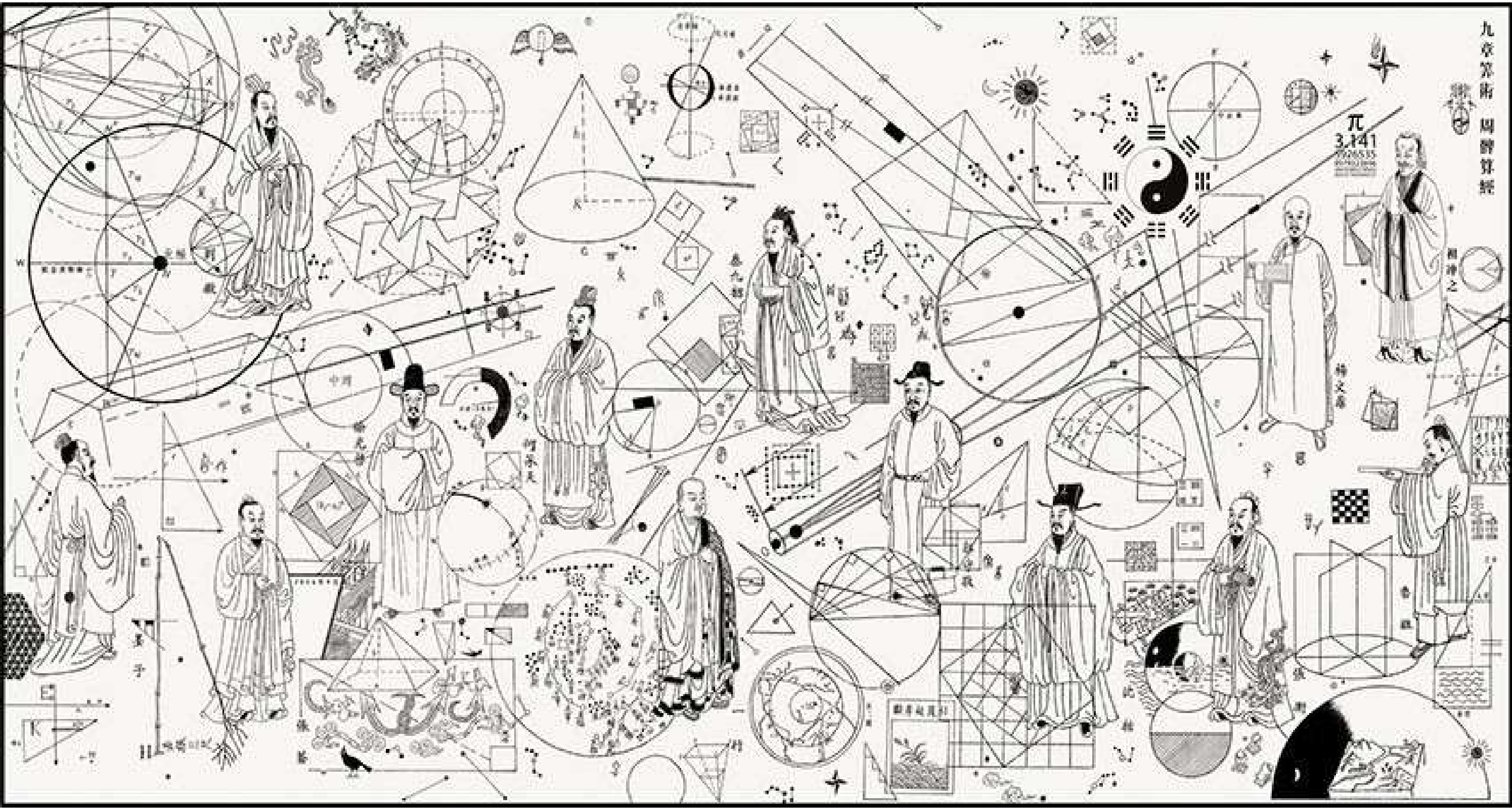


Les Neuf Chapitres
(entre -200 et -100)



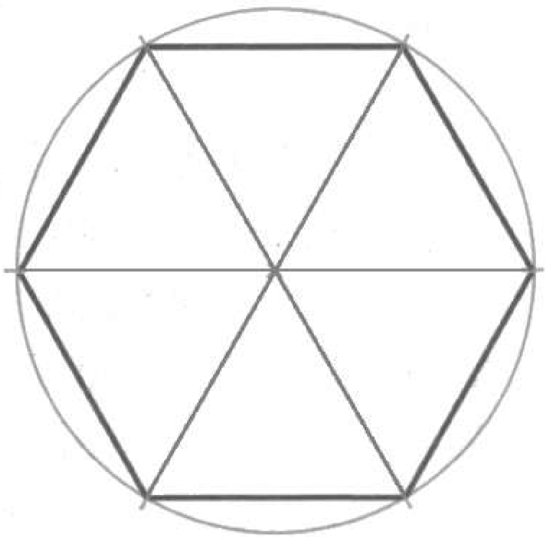
Aperçu du Chapitre 1

Aire du cercle et approximation de π



Approximation de π par Liu Hui

Avant Liu Hui, le périmètre de l'*hexagone inscrit*
servait d'approximation pour la *circonférence* du cercle...



lorsque la circonférence vaut 3, le diamètre vaut 1

Approximation de π par Liu Hui

Liu Hui avait conscience que ce rapport est inexact :

à propos d'un problème de calcul d'aire d'un champ circulaire, il écrit :

Avec ma procédure, ceci devrait faire un champ de 71 bu 103/157 de bu.

Approximation de π par Liu Hui

Liu Hui avait conscience que ce rapport est inexact :

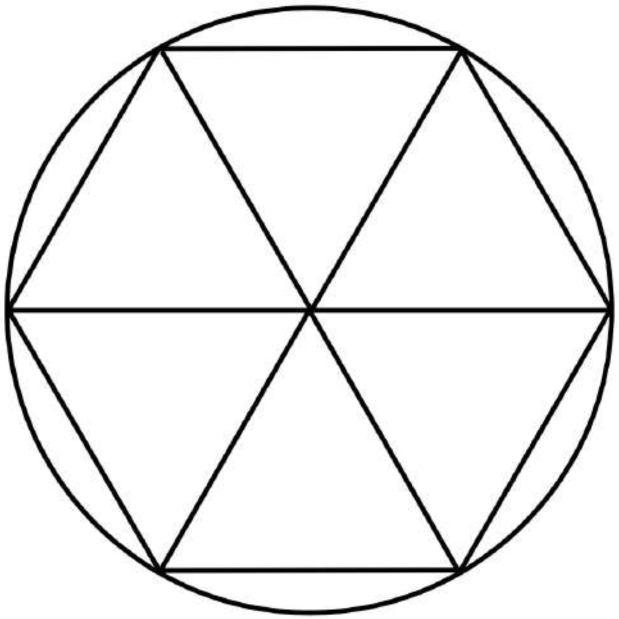
à propos d'un problème de calcul d'aire d'un champ circulaire, il écrit :

Avec ma procédure, ceci devrait faire un champ de 71 bu 103/157 de bu.

Liu Hui explique « sa procédure ».

...qui utilise une méthode d'approximation de l'aire du cercle, par des polygones réguliers inscrits dont le nombre de côtés double à chaque étape, le premier étant l'hexagone.

Approximation de π par Liu Hui

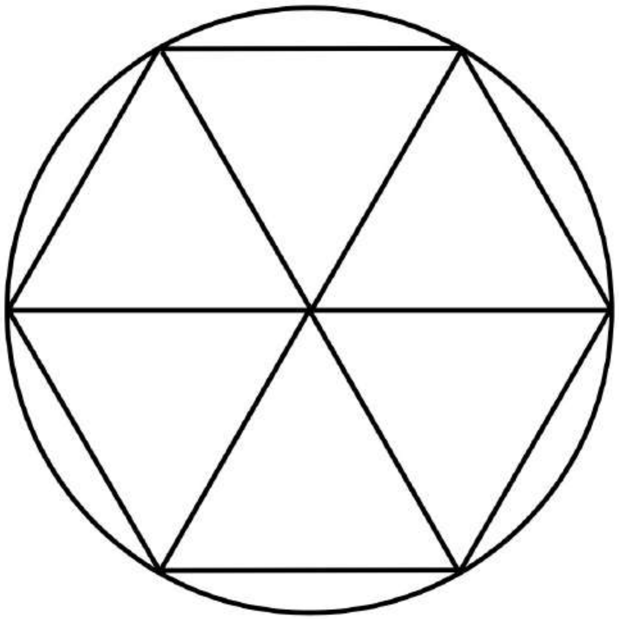


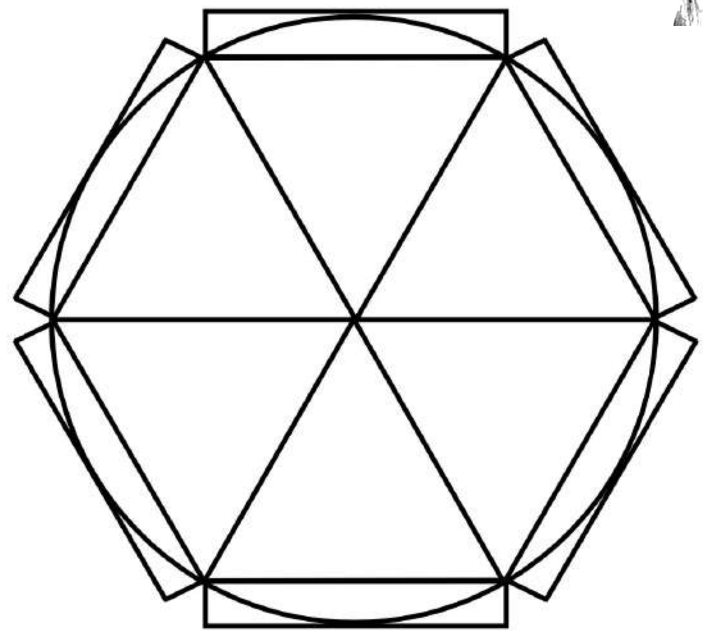
$$S_n < A$$

Aire du n-gône inscrit

Aire du Cercle

Approximation de π par Liu Hui





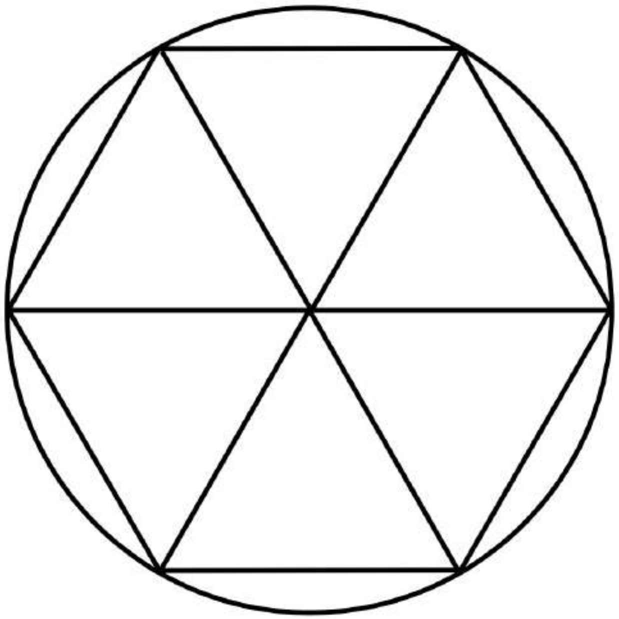
$$S_n < A < S_n + n.R_n$$

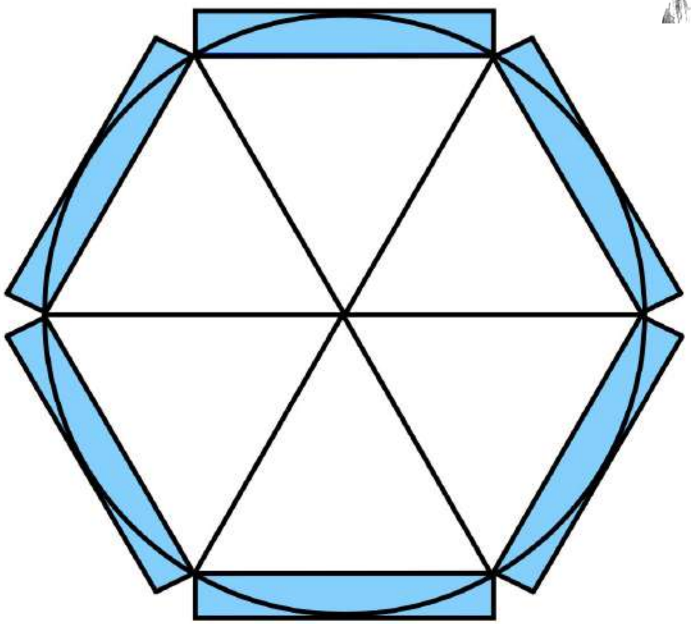
Aire du n-gône inscrit

Aire du Cercle

Aire du rectangle

Approximation de π par Liu Hui





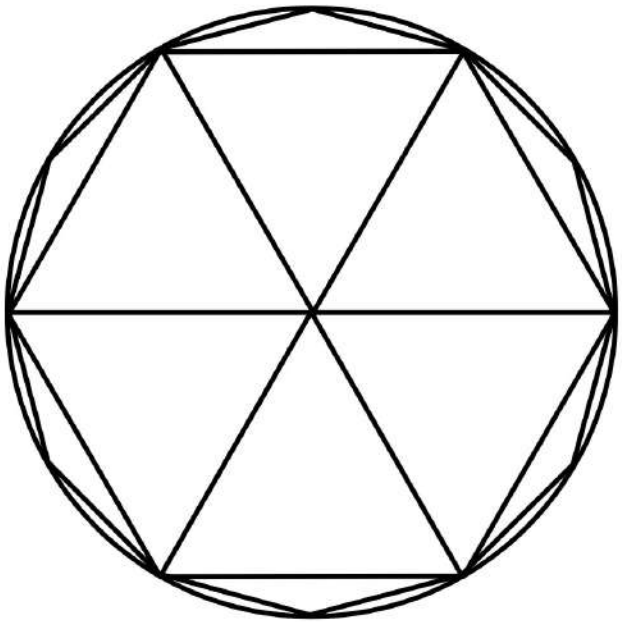
$$S_n < A < S_n + n.R_n$$

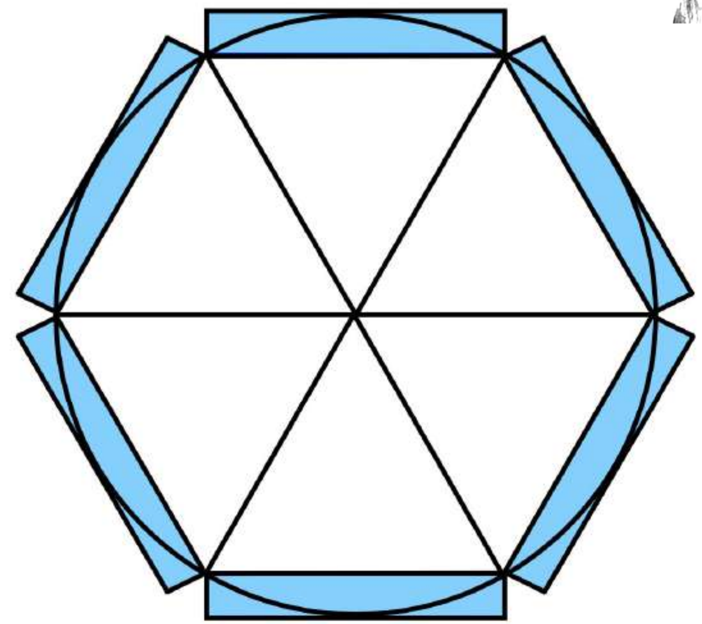
Aire du n-gône inscrit

Aire du Cercle

Aire du rectangle

Approximation de π par Liu Hui





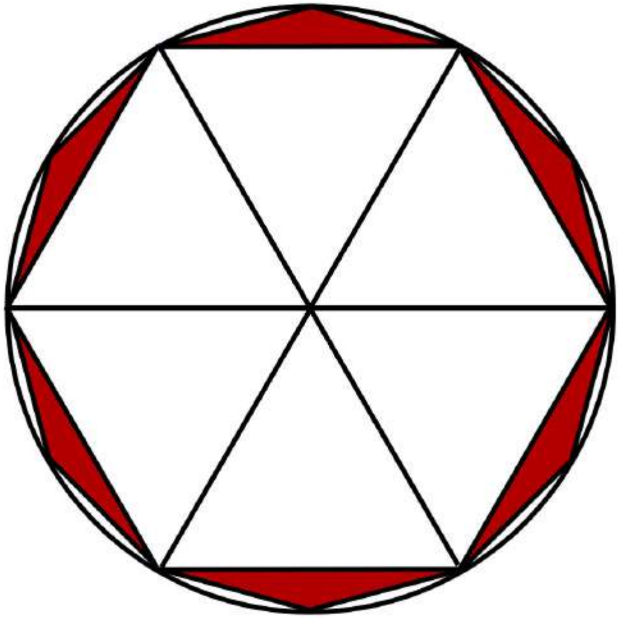
$$S_n < A < S_n + n.R_n$$

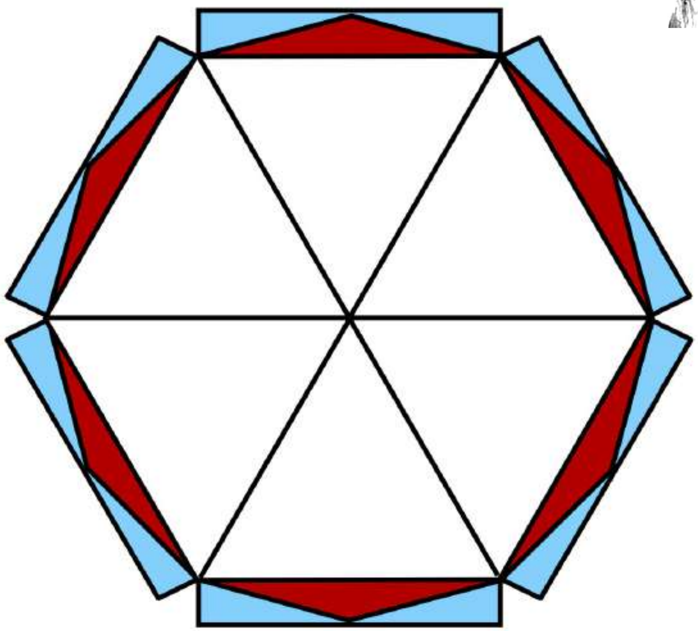
Aire du n-gône inscrit

Aire du Cercle

Aire du rectangle

Approximation de π par Liu Hui





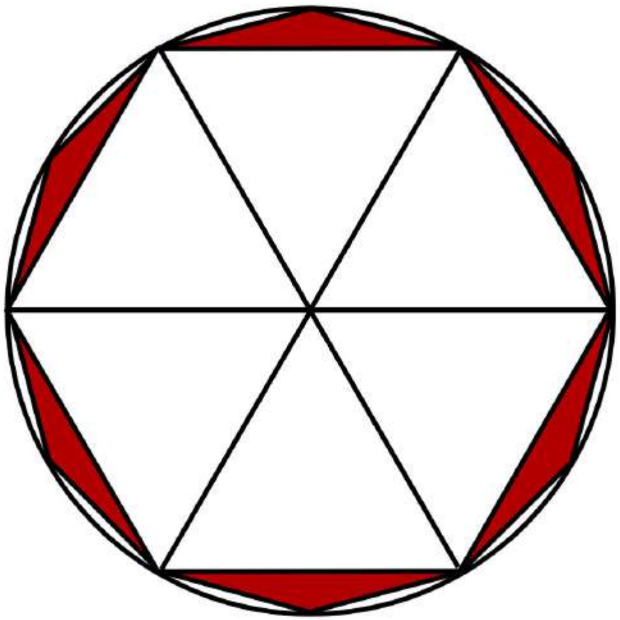
$$S_n < A < S_n + n.R_n$$

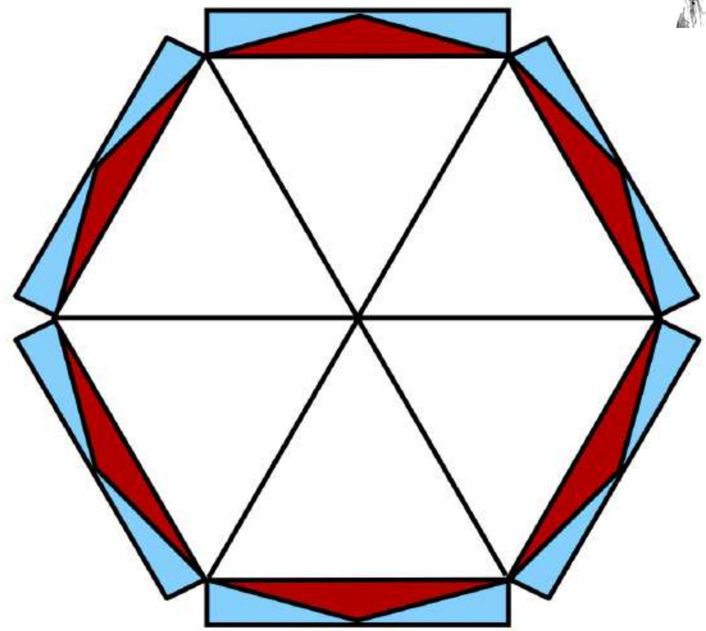
Aire du n-gône inscrit

Aire du Cercle

Aire du rectangle

Approximation de π par Liu Hui





$$S_n < A < S_n + 2.(S_{2n} - S_n)$$

Aire du n-gône inscrit

Aire du Cercle

Aire du rectangle

Approximation de π par Liu Hui

… et concrètement ?

Approximation de π par Liu Hui

… et concrètement ?

PROCÉDURE : ON SOMME TALON ET LANGUE, ON PREND LA MOITIÉ DE CECI ET ON EN MULTIPLIE LA LONGUEUR DROITE. ON DIVISE PAR LE DIVISEUR DES *MU*.

Si l'on coupe en son milieu le champ trapézoïdal, alors cela fait deux champs obliques, c'est pourquoi leurs procédures sont semblables l'une à l'autre[95]. Autrement, on peut sommer talon et langue, prendre la moitié de la longueur droite et en multiplier ceci.

(1.31)

SUPPOSONS QU'ON AIT UN CHAMP CIRCULAIRE DE 30 *BU* DE CIRCONFÉRENCE ET DE 10 *BU* DE DIAMÈTRE[96].

Li Chunfeng et ses associés commentent respectueusement : L'idée (*yi*) de la procédure[97] est de prendre, comme *lü*, 3 pour la circonférence et 1 pour le diamètre : une circonférence de 30 *bu* correspond à un diamètre 10 *bu*. Si maintenant on s'appuie sur les *lü* plus précis, cela correspond à un diamètre de 9 *bu* 6/11 de *bu*[98].

ON DEMANDE COMBIEN FAIT LE CHAMP.

RÉPONSE : 75 *BU*.

Avec ma procédure[99], ceci devrait faire un champ de 71 *bu* 103/157 de *bu*.

Li Chunfeng et ses associés respectueusement[100] : s'appuient sur les *lü* plus précis : cela fait un champ de 71 *bu* 13/22 de *bu*.

(1.32)

SUPPOSONS À NOUVEAU[101] QU'ON AIT UN CHAMP CIRCULAIRE DE 181 *BU* DE CIRCONFÉRENCE ET DE 60 *BU* 1/3 DE *BU* DE DIAMÈTRE.

Li Chunfeng et ses associés commentent respectueusement : Si, lorsque la circonférence vaut 3, le diamètre vaut 1, lorsque la circonférence vaut 181 *bu*, le diamètre vaut 60 *bu* 1/3 de *bu*. En s'appuyant sur les *lü* plus précis, le diamètre vaut 57 *bu* 13/22 de *bu*.

ON DEMANDE COMBIEN FAIT LE CHAMP.

RÉPONSE : 11 *MU* 90 *BU* 1/12 DE *BU*.

Avec ma procédure, ceci devrait faire un champ de 10 *mu* 208 *bu* 113/314 de *bu*.

Li Chunfeng et ses associés respectueusement : s'appuient sur les *lü* plus précis : cela fait[102] un champ de 10 *mu* 205 *bu* 87/88 de *bu*.

PROCÉDURE : LA MOITIÉ DE LA CIRCONFÉRENCE ET LA MOITIÉ DU DIAMÈTRE ÉTANT MULTIPLIÉES L'UNE PAR L'AUTRE, ON OBTIENT LES *BU* DU PRODUIT (*JI*)[103].

Commentaire : La moitié de la circonférence fait la longueur et la moitié du diamètre la largeur. Par conséquent, la largeur et la longueur étant multipliées l'une par l'autre, cela fait les *bu* du produit (*ji*)[104]. Supposons que le diamètre du cercle soit de 2 *chi*. Les valeurs (*shu*) d'un côté de l'hexagone inscrit dans le cercle et du demi-diamètre du cercle sont égales[105]. Cela correspond au fait que, lorsque le *lü* du diamètre vaut 1, par suite le *lü* de la circonférence correspondant aux segments circulaires[106] vaut 3.

Commentaire additionnel : Faisons une figure. Si l'on multiplie par un côté de l'hexagone le demi-diamètre du cercle correspondant au segment circulaire, et que l'on multiplie ceci par 3, on obtient l'aire (*mi*) du dodécagone[107]. Si, à nouveau, on coupe celui-ci[108], puis que l'on multiplie par un côté du dodécagone le demi-diamètre pour un segment circulaire, et qu'on multiplie ceci par 6, alors on obtient l'aire (*mi*) du 24-gone.

Plus l'on coupe fin, plus ce qui est perdu est petit[109]. On coupe ceux-ci (les polygones) et on les recoupe jusqu'à atteindre ce que l'on ne peut pas couper. Alors le corps en coïncide avec la circonférence du cercle[110] et il n'y a rien qui soit perdu. A l'extérieur des côtés du polygone, il y a encore du diamètre de reste. Si on multiplie par les côtés le diamètre de reste, alors l'aire (*mi*) déborde à l'extérieur des segments circulaires[111]. Pour ce qui est du polygone dont le degré de finesse est tel que son corps coïncide avec le cercle, à l'extérieur [de ses côtés], il n'y a, par suite, pas de diamètre de reste[112]. Si, à l'extérieur, il n'y a pas de diamètre de reste, alors l'aire (*mi*) ne déborde pas au-dehors. Multiplier par un côté le demi-diamètre, cela revient à trancher un quartier du polygone et chaque morceau est dans tous les cas obtenu deux fois[113]. C'est pourquoi, quand on multiplie la moitié du diamètre par la moitié de la circonférence, alors cela fait l'aire (*mi*) du cercle.

Ici [dans la procédure], par circonférence et diamètre, on désigne les quantités (*shu*) exactes à l'extrême[114], ce que ne sont pas les *lü* de 3 pour la circonférence et 1 pour le diamètre. Donner pour la circonférence 3, c'est se conformer au pourtour de l'hexagone qui lui correspond, et c'est tout. Pour en déduire combien fait sa différence avec le cercle, eh bien, c'est celle de l'arc et de la corde. Pourtant, depuis des générations, on a transmis cette méthode ; c'est que personne n'a voulu la vérifier avec minutie. Les érudits ont emboîté le pas des anciens, et ils ont copié leurs erreurs. Sans avoir de preuves claires, il était difficile de discuter cela[115].

En général, les figures des catégories des choses sont soit le cercle, soit le carré[116]. Si les *lü* du carré et du cercle sont de fait manifestes dans le domaine de ce qui est près, alors, même s'ils sont loin, on peut les connaître ; de ce point de vue, ils sont utilisables largement. Un examen respectueux de la figure à l'appui[117], j'ai élaboré de nouveaux *lü* plus précis. Mais je craignais que si cette méthode était exposée abstraitement, les quantités (*shu*) n'en soient obscures et difficiles à saisir[118]. C'est pourquoi je l'ai mise sous une forme réglée[119] et j'ai respectueusement rédigé ici, de manière détaillée, un commentaire à son sujet.

Procédure qui consiste à couper l'hexagone pour en faire un dodécagone[120] : Plaçons le diamètre du cercle, 2 *chi*. Si l'on en prend la moitié, cela fait 1 *chi* et donne les côtés de l'hexagone inscrit dans le cercle. On prend le demi-diamètre, 1 *chi*, comme hypoténuse, la moitié du côté, 5 *cun*, comme base (*gou*), et l'on cherche la hauteur (*gu*) qui leur correspond. Le carré (*mi*) de la base (*gou*), 25 *cun*, étant soustrait du carré (*mi*) de l'hypoténuse, il reste 75 *cun*. On divise ceci par extraction de la racine carrée, en continuant jusqu'aux *miao*, aux *hu*. Et l'on rétrograde encore une fois le diviseur, pour trouver un chiffre de la partie décimale (*weishu*) (de la racine)[121]. Le chiffre de la partie décimale qui n'a pas de nom [d'unité], on le prend comme numérateur, et on prend 10 comme dénominateur. Cela fait, en simplifiant, 2/5 de *hu*. Par conséquent on obtient, comme hauteur (*gu*), 8 *cun* 6 *fen* 6 *li* 2 *miao* 5 *hu* 2/5 de *hu*. Si l'on soustrait ceci du demi-diamètre, il reste 1 *cun* 3 *fen* 3 *li* 9 *hao* 7 *miao* 4 *hu* 3/5 de *hu*, que l'on appelle petite base (*gou*). La moitié du côté du polygone, on l'appelle en outre petite hauteur (*gu*)[122]. Et l'on cherche l'hypoténuse qui leur correspond ; son carré (*mi*) fait 267 949 193 445 *hu* et on abandonne les parts restantes[123]. Si on divise ceci par extraction de la racine carrée, cela donne un côté du dodécagone.

Procédure qui consiste à couper le dodécagone pour en faire un 24-gone : A nouveau, on prend le demi-diamètre comme hypoténuse, la moitié du côté comme base (*gou*), et l'on cherche la hauteur (*gu*) qui leur correspond. Plaçons le carré (*mi*) de la petite hypoténuse précédente, divisons ceci par 4, d'où l'on obtient 66 987 298 361 *hu*, et on abandonne les parts restantes ; cela donne le carré (*mi*) de la base (*gou*). Ceci étant soustrait du carré (*mi*) de l'hypoténuse, on divise le reste par extraction de la racine carrée, d'où l'on obtient, pour la hauteur (*gu*), 9 *cun* 6 *fen* 5 *li* 9 *hao* 2 *miao* 5 *hu* 4/5 de *hu*. Si l'on soustrait ceci du demi-diamètre, il reste 3 *fen* 4 *li* 7 *miao* 4 *hu* 1/5 de *hu*, que l'on appelle petite base (*gou*). La moitié du côté du polygone, on l'appelle en outre petite hauteur (*gu*). Et l'on cherche la petite hypoténuse qui leur correspond ; son carré (*mi*) fait 68 148 349 466 *hu* et on abandonne les parts restantes. Si on divise ceci par extraction de la racine carrée, cela donne un côté du 24-gone[124].

Procédure qui consiste à couper le 24-gone pour en faire un 48-gone : A nouveau, on prend le demi-diamètre comme hypoténuse, la moitié du côté comme base (*gou*), et l'on cherche la hauteur (*gu*) qui leur correspond. Plaçons le carré (*mi*) de la petite hypoténuse précédente[125], divisons ceci par 4, d'où l'on obtient 17 037 087 366 *hu* et on abandonne les parts restantes ; cela donne le carré (*mi*) de la base (*gou*). Ceci étant soustrait du carré (*mi*) de l'hypoténuse, on divise le reste par extraction de la racine carrée, d'où l'on obtient, pour la hauteur (*gu*), 9 *cun* 9 *fen* 1 *li* 4 *hao* 4 *miao* 4 *hu* 4/5 de *hu*. Si l'on soustrait ceci du demi-diamètre, il reste 8 *li* 5 *hao* 5 *miao* 5 *hu* 1/5 de *hu*, que l'on appelle petite base (*gou*). La moitié du côté du polygone, on l'appelle en outre petite hauteur (*gu*). Et l'on cherche la petite hypoténuse qui leur correspond ; son carré (*mi*) fait 17 110 278 813 *hu* et on abandonne les parts restantes. Si on divise ceci par extraction de la racine carrée, l'on obtient, pour la petite hypoténuse, 1 *cun* 3 *fen* 8 *hao* 6 *hu*, et on abandonne les parts restantes, ce qui donne un côté du 48-gone. En multipliant ceci par le demi-diamètre, 1 *chi*, puis en multipliant ceci par 24, on obtient, comme aire (*mi*), 3 139 344 000 000 *hu*. En divisant ceci par 10 000 000 000, on obtient, comme aire (*mi*), 313 *cun* 584/625 de *cun*, ce qui donne l'aire (*mi*) du 96-gone.

Procédure qui consiste à couper le 48-gone pour en faire un 96-gone : A nouveau, on prend le demi-diamètre comme hypoténuse, la moitié du côté comme base (*gou*), et l'on cherche la hauteur (*gu*) qui leur correspond. Plaçons à nouveau le carré (*mi*) de la petite hypoténuse précédente, divisons ceci par 4, d'où l'on obtient 4 277 569 703 *hu*, et on abandonne les parts restantes ; cela donne le carré (*mi*) de la base (*gou*). Ceci étant soustrait du carré (*mi*) de l'hypoténuse, on divise le reste par extraction de la racine carrée, d'où l'on obtient, pour la hauteur (*gu*), 9 *cun* 9 *fen* 7 *li* 8 *hao* 5 *miao* 8 *hu* 9/10 de *hu*. Si l'on soustrait ceci du demi-diamètre, il reste 2 *li* 1 *hao* 4 *miao* 1 *hu* 1/10 de *hu*, que l'on appelle petite base (*gou*). La moitié du côté du polygone, on l'appelle en outre petite hauteur (*gu*). Et l'on cherche la petite hypoténuse qui leur correspond ; son carré (*mi*) fait 4 282 154 012 *hu*, et on abandonne les parts restantes. Si on divise ceci par extraction de la racine carrée, on obtient, pour la petite hypoténuse, 6 *fen* 5 *li* 4 *hao* 3 *miao* 8 *hu*, et on abandonne les parts restantes, ce qui donne un côté du 96-gone. En multipliant ceci par le demi-diamètre, 1 *chi*, puis en multipliant ceci par 48, on obtient, comme aire (*mi*), 3 141 024 000 000 *hu*. En divisant ceci par 10 000 000 000, on obtient, comme aire (*mi*), 314 *cun* 64/625 de *cun*, ce qui donne l'aire (*mi*) du 192-gone[126]. L'aire (*mi*) du 96-gone étant soustraite de ceci, il reste 105/625 de *cun*, que l'on appelle l'aire (*mi*) de la différence. On la double, ce qui fait 210 de ces parts de *cun*, et ce qui donne des champs polygonaux extérieurs au 96-gone au nombre de 96, c'est-à-dire l'aire (*mi*) globale de la multiplication des flèches par les cordes[127]. Si l'on ajoute cette aire (*mi*) à l'aire (*mi*) du 96-gone, on obtient 314 *cun* 169/625 de *cun*, qui déborde alors à l'extérieur du cercle. Par conséquent, on est ramené à la partie entière de l'aire (*mi*) du 192-gone, 314 *cun*, que l'on prend donc pour *lü* déterminé de l'aire (*mi*) du cercle, en abandonnant les parts restantes[128].

On divise par le demi-diamètre, 1 *chi*, l'aire (*mi*) du cercle ; en doublant ceci, on obtient 6 *chi* 2 *cun* 8 *fen*, ce qui donne la valeur (*shu*) de la circonférence[129]. En effectuant la multiplication du diamètre par lui-même, on fait l'aire (*mi*) du carré (qui a pour côté ce diamètre), 400 *cun* ; en réduisant ceci mutuellement avec l'aire (*mi*) du cercle, on obtient, pour l'aire (*mi*) du cercle, 157, que l'on prend comme *lü*, et, pour l'aire du carré, 200, que l'on prend comme *lü*[130]. Si l'aire du carré vaut 200, l'aire du cercle inscrit en son milieu vaut 157. Le *lü* du cercle est encore légèrement trop petit.

Commentaire : Si, sur la figure du champ en forme de segment circulaire[131], l'on inscrit un cercle dans le carré et un carré dans ce cercle, le carré intérieur correspond à la moitié du carré extérieur. Puisqu'il en est ainsi, alors, si l'aire (*mi*) du cercle vaut 157, l'aire (*mi*) du carré inscrit en son milieu vaut 100.

A nouveau, si l'on effectue la simplification, mutuellement, d'un diamètre de 2 *chi* et d'une circonférence de 6 *chi* 2 *cun* 8 *fen*, on obtient, pour la circonférence, 157 et, pour le diamètre, 50 ; ce sont alors les *lü* mis en relation l'un avec l'autre correspondants[132]. Le *lü* de la circonférence est encore légèrement trop petit.

La réserve des armes Jin contient un *hu* de bronze fabriqué par Wang Mang, du temps de la dynastie Han[133]. Son inscription énonce : « La mesure étalon de capacité fixée par la loi pour le *hu* (*lüjialianghu*) comporte un carré [fictif] de côté 1 *chi* en son intérieur, et un cercle lui est circonscrit[134]. L'écart entre intérieur et extérieur (aux coins) est de 9 *li* 5 *hao*, l'aire (*mi*) de 162 *cun*, la profondeur de 1 *chi*, le volume (*ji*) de 1 620 *cun*, la contenance de 10 *dou*. » En la cherchant avec cette procédure, on obtient, comme aire (*mi*), 161 *cun* et des poussières : ces valeurs (*shu*) sont assez proches l'une de l'autre. Par cette procédure, elle est légèrement plus petite[135]. Or l'aire (*mi*) de la différence entre les polygones est de 105/625 de *cun*. Si l'on se sert de l'aire (*mi*) du 192-gone pour faire varier les *lü*, il faut prendre 36 de ces parts de *cun* pour l'ajouter à l'aire (*mi*) du 192-gone[136] et considérer ceci comme l'aire (*mi*) du cercle, à savoir : 314 *cun* 4/25 de *cun*.

Plaçons l'aire (*mi*) du carré que fait le diamètre multiplié par lui-même, 400 *cun* ; faisons-le communiquer et se simplifier mutuellement avec l'aire (*mi*) du cercle ; l'aire (*mi*) du cercle donnant 3 927, on obtient, pour l'aire (*mi*) du carré, 5 000, ce qui fait juste des *lü*[137]. Si l'aire (*mi*) du carré vaut 5 000, l'aire (*mi*) du cercle inscrit en son milieu vaut 3 927 et, si l'aire (*mi*) du cercle vaut 3 927, l'aire (*mi*) du carré inscrit en son milieu vaut 2 500.

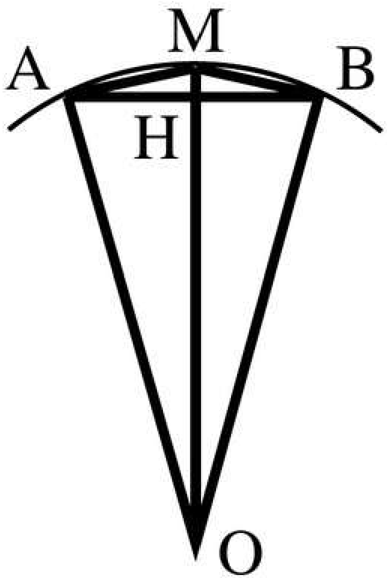
On divise par le demi-diamètre, 1 *chi*, l'aire du cercle 314 *cun* 4/25 de *cun* ; en doublant ceci, on obtient[138] 6 *chi* 2 *cun* 8 *fen* 8/25 de *fen*, ce qui donne la valeur (*shu*) de la circonférence. Si on fait communiquer, puis se simplifier mutuellement, le diamètre dans son entier, qui vaut 2 *chi*, avec la valeur (*shu*) de la circonférence, on obtient, pour le diamètre, 1 250 et, pour la circonférence, 3 927, ce qui donne les *lü* mis en relation les uns avec les autres correspondants.

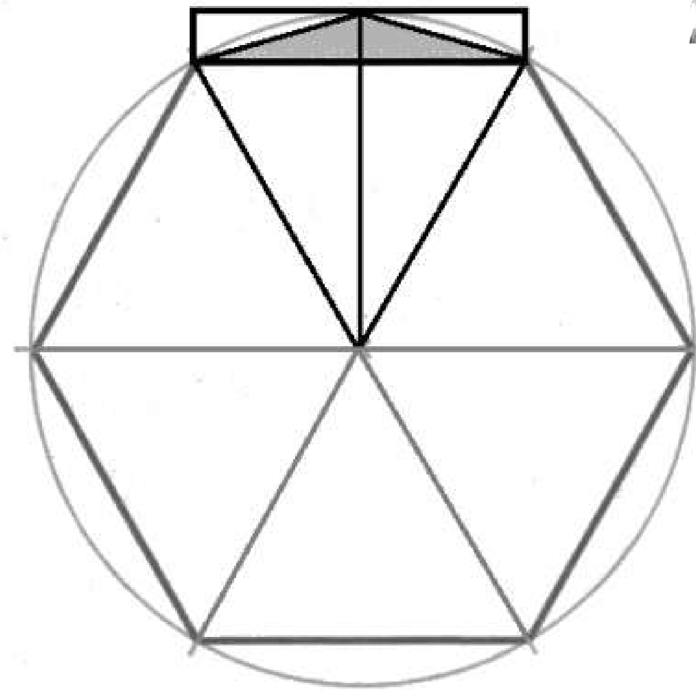
De la sorte, on épuisera peut-être les (parts) infimes correspondantes. Si on la propose à l'utilisation, la méthode précédente n'est cependant qu'approximative[139]. Il faut chercher un côté du 1 536-gone pour obtenir l'aire (*mi*) du 3 072-gone, puis couper les parts décimales, afin que les valeurs (*shu*) (obtenues) soient encore conformes à celles-ci ; cela en redonne alors une vérification[140].

Approximation de π par Liu Hui

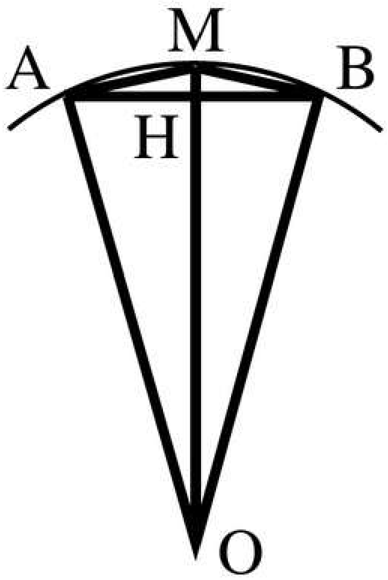
Procédure qui consiste à couper l'hexagone pour en faire un dodécagone[120] : Plaçons le diamètre du cercle, 2 *chi*. Si l'on en prend la moitié, cela fait 1 *chi* et donne les côtés de l'hexagone inscrit dans le cercle. On prend le demi-diamètre, 1 *chi*, comme hypoténuse, la moitié du côté, 5 *cun*, comme base (*gou*), et l'on cherche la hauteur (*gu*) qui leur correspond. Le carré (*mi*) de la base (*gou*), 25 *cun*, étant soustrait du carré (*mi*) de l'hypoténuse, il reste 75 *cun*. On divise ceci par extraction de la racine carrée, en continuant jusqu'aux *miao*, aux *hu*. Et l'on rétrograde encore une fois le diviseur, pour trouver un chiffre de la partie décimale (*weishu*) (de la racine)[121]. Le chiffre de la partie décimale qui n'a pas de nom [d'unité], on le prend comme numérateur, et on prend 10 comme dénominateur. Cela fait, en simplifiant, 2/5 de *hu*. Par conséquent on obtient, comme hauteur (*gu*), 8 *cun* 6 *fen* 6 *li* 2 *miao* 5 *hu* 2/5 de *hu*. Si l'on soustrait ceci du demi-diamètre, il reste 1 *cun* 3 *fen* 3 *li* 9 *hao* 7 *miao* 4 *hu* 3/5 de *hu*, que l'on appelle petite base (*gou*). La moitié du côté du polygone, on l'appelle en outre petite hauteur (*gu*)[122]. Et l'on cherche l'hypoténuse qui leur correspond ; son carré (*mi*) fait 267 949 193 445 *hu* et on abandonne les parts restantes[123]. Si on divise ceci par extraction de la racine carrée, cela donne un côté du dodécagone.

Approximation de π par Liu Hui





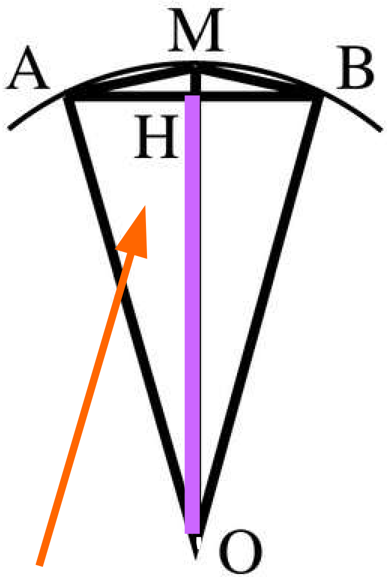
Approximation de π par Liu Hui



C_n = côté du n-gone = AB

C_{2n} = côté du 2n-gone = AM

Approximation de π par Liu Hui



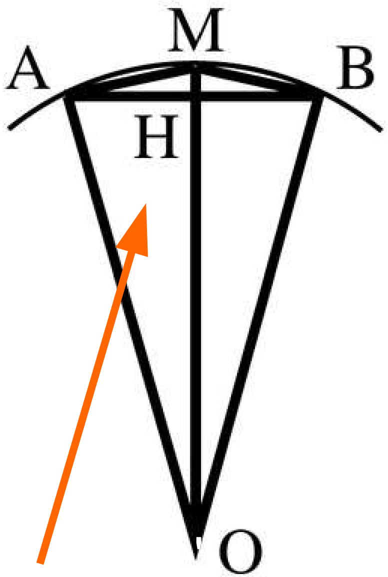
Par 'Pythagore'
(*Gougu*, Chap. 9)

C_n = côté du n-gone = AB

C_{2n} = côté du 2n-gone = AM

$OH^2 = \text{Rayon}^2 - (C_n/2)^2$

Approximation de π par Liu Hui



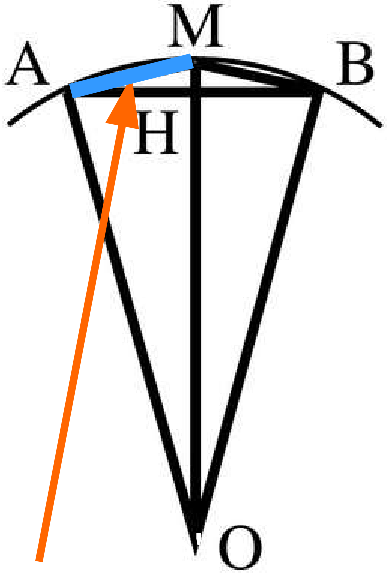
C_n = côté du n-gone = AB

C_{2n} = côté du 2n-gone = AM

Par 'Pythagore'
(*Gougu*, Chap. 9)

OH^2 = $\text{Rayon}^2 - (C_n/2)^2$

Approximation de π par Liu Hui



Par 'Pythagore'
(*Gougu*, Chap. 9)

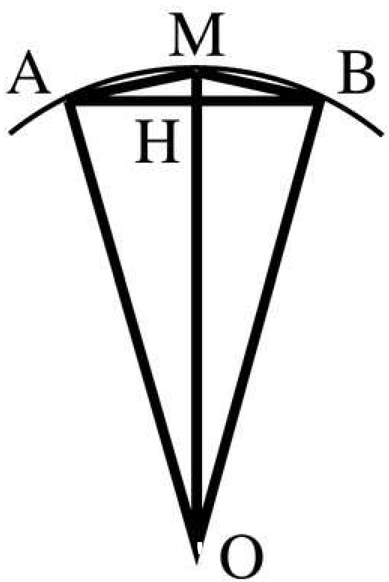
C_n = côté du n-gone = AB

C_{2n} = côté du 2n-gone = AM

$$OH^2 = Rayon^2 - (C_n/2)^2$$

$$C_{2n}^{\;2} = (Rayon - OH)^2 + (C_n/2)^2$$

Approximation de π par Liu Hui



C_n = côté du n-gone = AB

C_{2n} = côté du 2n-gone = AM

Par 'Pythagore'
(*Gougu*, Chap. 9)

$$OH^2 = \text{Rayon}^2 - (C_n/2)^2$$

$$C_{2n}^{\ 2} = (\text{Rayon} - OH)^2 + (C_n/2)^2$$

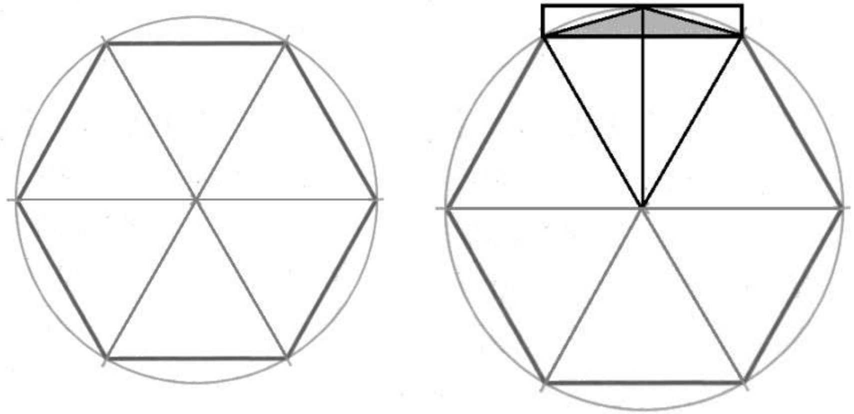
Extraction Racine
(Chap. 4)

→ Formule pour C_{2n} à partir de C_n (C_6 = Rayon)

Approximation de π par Liu Hui

Après le dodécagone, Liu Hui étudie le 24-gone puis le 48-gone...
… et va jusqu'au 192-gône.

Il propose alors la valeur 3,1416 comme rapport entre le diamètre et la circonférence.



Approximation de π par Zu Chongzhi

Au Ve siècle, Zu Chongzhi poussa la procédure de Liu Hui jusqu’à l’aire du 24576-gône (12 itérations)

Approximation de π par Zu Chongzhi

Au Ve siècle, Zu Chongzhi poussa la procédure de Liu Hui jusqu'à l'aire du 24576-gône (12 itérations), menant à l'approximation

$$\pi = \frac{355}{113}$$

entre 3,1415926 et 3,1415927

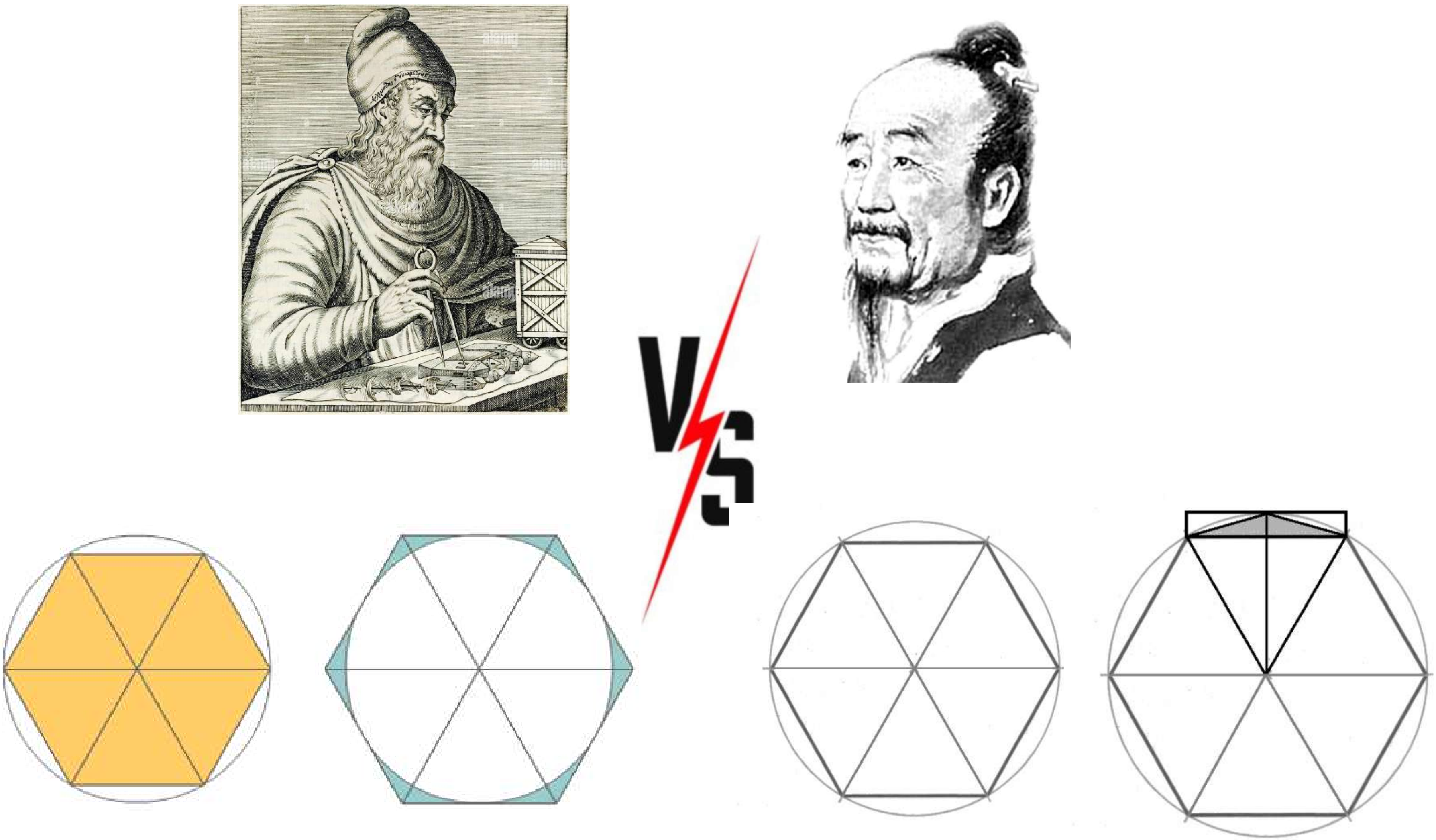
Approximation de π par Zu Chongzhi

Au Ve siècle, Zu Chongzhi poussa la procédure de Liu Hui jusqu'à l'aire du 24576-gône (12 itérations), menant à l'approximation

$$\pi = \frac{355}{113}$$

entre 3,1415926 et 3,1415927

précision à la 7e décimale près qui restera la valeur la plus précise connue pendant plus de 900 ans jusqu'à Al-Kashi (15e)


VS