

RITUELS DANS L'APPRENTISSAGE DES FRACTIONS ET DÉCIMAUX

IREM de GRENOBLE - Groupe IREM-PEGASE Cycle 3

INSPE de Grenoble

Présentation à l'APMEP (Bourges) – octobre 2021



Qui sommes nous ?



Equipe IREM de Grenoble Recherche / Formation / Terrain depuis 2020

- Alexandra Bourgeois, professeur mathématiques (collège)
- Grégoire Charlot, enseignant-chercheur en mathématiques
- Danielly Kaspariy, formatrice INSPE & chercheure en didactique,
- Sophie Lopez, professeur des écoles
- Sophie Térouanne, formatrice INSPE

+ Stagiaires DU et M2 MEEF PE 2020-2021

Contact : Sophie.Terouanne@univ-grenoble-alpes.fr

Projet PEGASE*



Un écosystème collaboratif avec des actions associant toujours chercheurs, formateurs et enseignants :

- formation initiale et continue (adossement à la recherche, lien avec le terrain)
- recherche et développement collaborative
- **co-élaboration de pratiques éducatives et évaluation de leur efficacité à long terme**
- dissémination des connaissances et des ressources

(*) Pole Education recherche de l'académie de Grenoble (et Guyane) sur les ApprentisageS fondamentaux pour lutter contre les inégalités à l'Ecole

Projet PEGASE : d'où l'on partait en 2020

Objectif fixé en 2020 : définir une ingénierie didactique concernant l'enseignement des fractions et décimaux au cycle 3, en s'appuyant sur des résultats de la recherche.

- Tout est fait ? D'où partir ?
- Quelles activités retenir, et pourquoi ?
- Quels objectifs et grandes lignes se fixer ?

Pistes :

- Faire un état de l'art (biblio)
- Cartographier les types de tâches
- Expérimenter et analyser pour faire nos propres choix

Une opportunité : les stagiaires PE (DU et M2 MEEF)

« Terrain disponible » pour expérimenter :

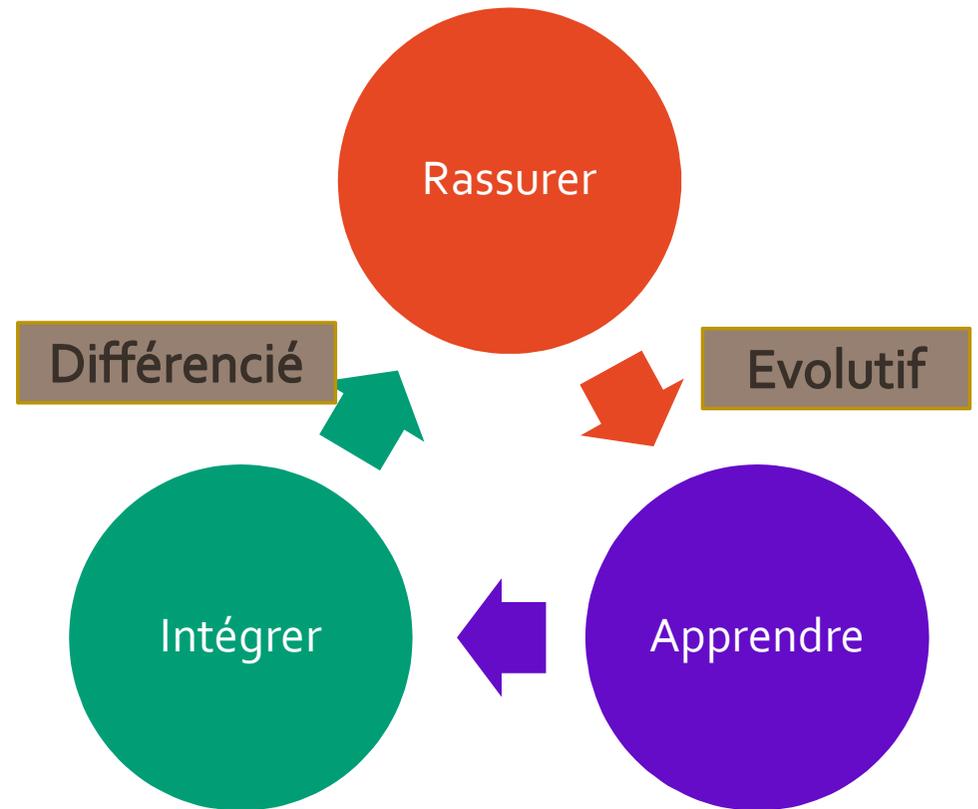
classes de professeurs stagiaire en formation à l'INSPE (mémoire M2 MEEF ou ESR)

Contraintes : période d'expérimentation, domaines pris en charge en mi-temps...

→ Les rituels

Rituel, qu'entendons nous par là ?

« Le rituel est un mode d'organisation régulier lié à une intention de l'ordre de l'éducation, de l'apprentissage ou de l'enseignement en milieu scolaire et qui est de l'ordre du collectif. »
(Gioux, 2008)

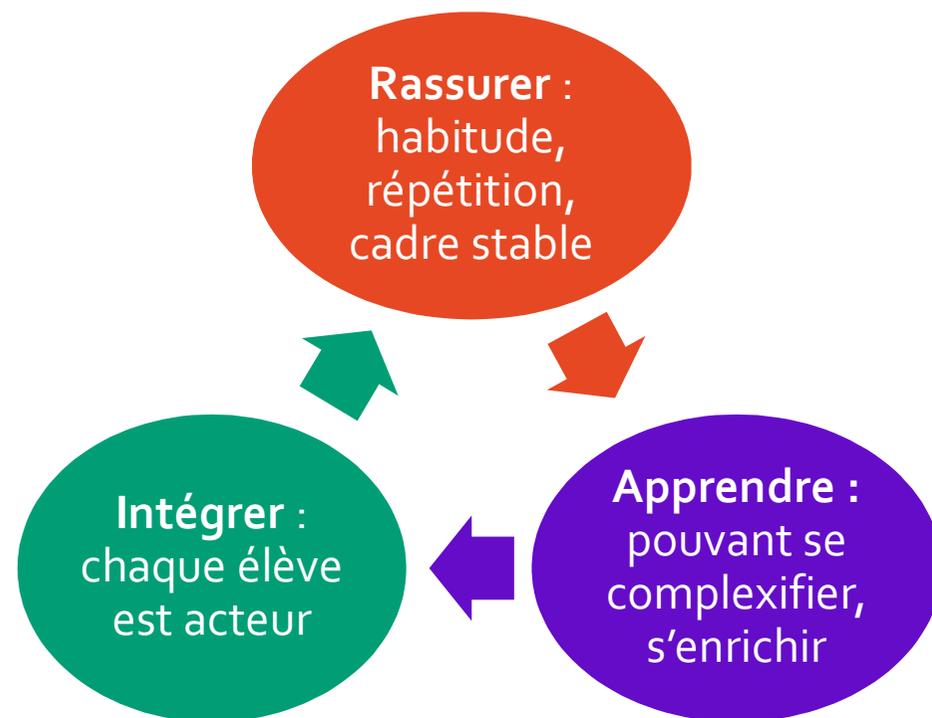


Grille méthodologique développée par MC Croset et le groupe IREM « aux quatre coins des maths »

Rituel : en quoi est-ce apprenant ?

Ce n'est pas qu'un entraînement répétitif :

- Evolutif : les connaissances s'enrichissent au fil des jours
- Collectif : intégrant des temps d'échanges, de confrontations et enrichissements
- Engageant cognitivement
- Consolidant : la répétition permet de revisiter des stratégies, de laisser la place à l'erreur, de confirmer

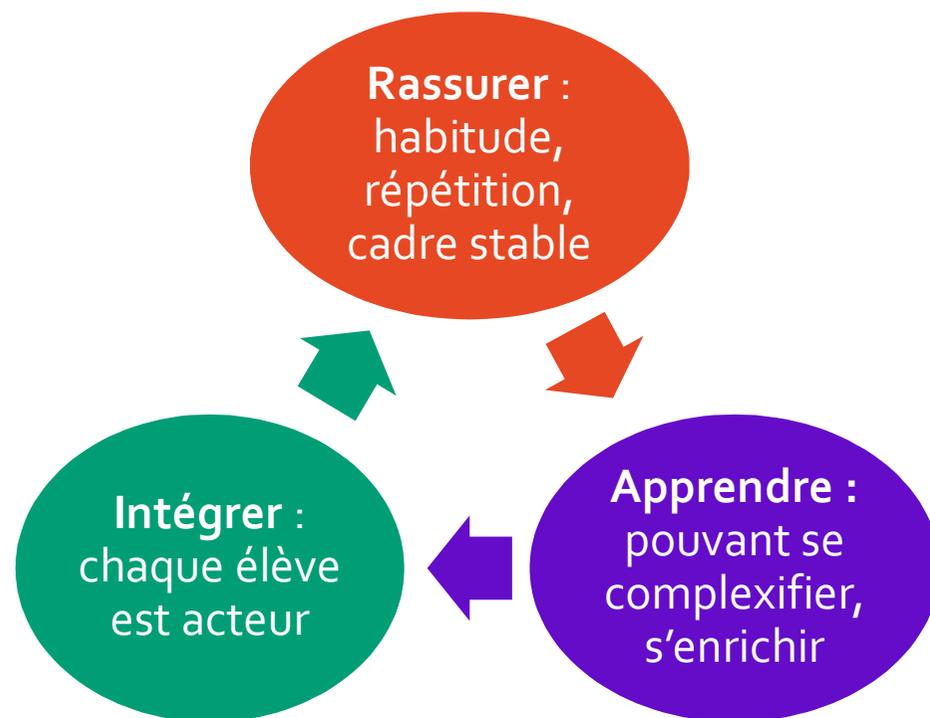


Rituel : en quoi est-ce engageant ?

On retrouve des leviers de dynamique motivationnelle du côté de l'élève

- L'élève se sent visé, concerné par l'activité : elle est adaptée
- L'élève se sent compétent, peut s'engager dans la tâche.
- L'élève accorde un intérêt, de la valeur à cette tâche : on évite une répétition qui ennuerait les élèves les plus avancés

Remarque : doit s'articuler avec des situations fondamentales d'apprentissage



Pourquoi des rituels pour l'apprentissage des fractions et/ou décimaux ?

Constat : *Grand apprentissage du cycle 3, mais notions mal comprises. Difficultés persistantes en cycle 4.*

→ **Revenir sur cette notion, de façon spiralaire, y compris en dehors de la séquence**

Constat : *Le choix curriculaire de progression fractions simple - fractions décimales - écriture décimale répété en CM1 puis en CM2, et l'abandon hâté des fractions (une fois les décimaux introduits)*

→ **Naturaliser ces notions et rendre les ruptures fractions simples / décimales / écriture décimale) moins brutales**

Pour quoi des rituels pour l'apprentissage des fractions et/ou décimaux ?

Genre de tâches identifiés pour travailler spécifiquement les fractions et décimaux :

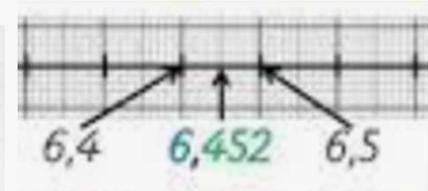
Représenter

$$0,25 \quad \frac{1}{2}$$



Encadrer, Intercaler

$$\frac{70}{10} < \frac{78}{10} < \frac{80}{10} \quad 8$$



Calculer

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

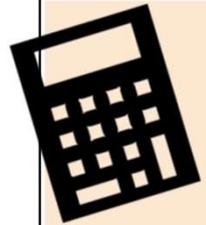
Comparer / Ordonner

$$\frac{3}{8} \quad ? \quad \frac{5}{6}$$

Présentation de quelques rituels

- « Calculatrice et calcul mental » - 6^{ième}
- « Nombre du jour » - CM1-CM2
- « Chiffroscope » - CM1-CM2

Rituel calculatrice & calcul mental (collège)



Règle du jeu - 2 JOUEURS

Sont donnés : un nombre de départ
et un intervalle d'arrivée

Départ : 6

Arrivée dans l'intervalle [25 ; 32]

jouons !

DEBUT : nombre de départ affiché sur l'écran

BUT : chercher à faire apparaître sur l'écran un nombre qui soit dans l'intervalle indiqué, en le moins de coups possibles.

2 REGLES IMPORTANTES :

- * On ne peut utiliser que l'opération de multiplication
- * On ne supprime jamais l'affichage sauf si c'est gagné

→ 1 joueur commence

→ chaque joueur joue une fois ; s'il ne réussit pas, il passe la calculatrice à l'autre sans effacer le résultat

Les matchs à jouer :

Départ 4 et arrivée dans [170 ; 180]

Départ 28 et arrivée dans [12 ; 15]

Départ 456 et arrivée dans [42 ; 47]

Départ 128 et arrivée dans [125 ; 127]

Quelle mise en œuvre avec les élèves ?

- **Une 1^{ère} séance**, toujours plus longue, qui ne fait pas partie du rituel
 - ✓ Entrer dans le jeu, comprendre les règles, expliquer les consignes
 - ✓ Puis jouer et apprendre
- **Activité rituelle : 2 matchs par jour**
 - ✓ Le jeu, avec une **feuille de marque**
 - ✓ Partage des stratégies, débats
 - ✓ **Institutionnalisation**, trace écrite

Nombre de départ	Nombre multiplié	résultat
25	$\times 5$	125
125	$\times 1,5$	187,5
187,5	$\times 0,2$	37,5
37,5	$\times 10$	375
375	$\times 0,8$	300

Figure 8 _Rituel séance 1 : 25 dans l'intervalle [128 ;142] élève 4

Exemples de conclusions

- Multiplier par un nombre entre 0 et 1 fait diminuer l'autre facteur.
- Multiplier par un nombre supérieur à 1 fait augmenter l'autre facteur.

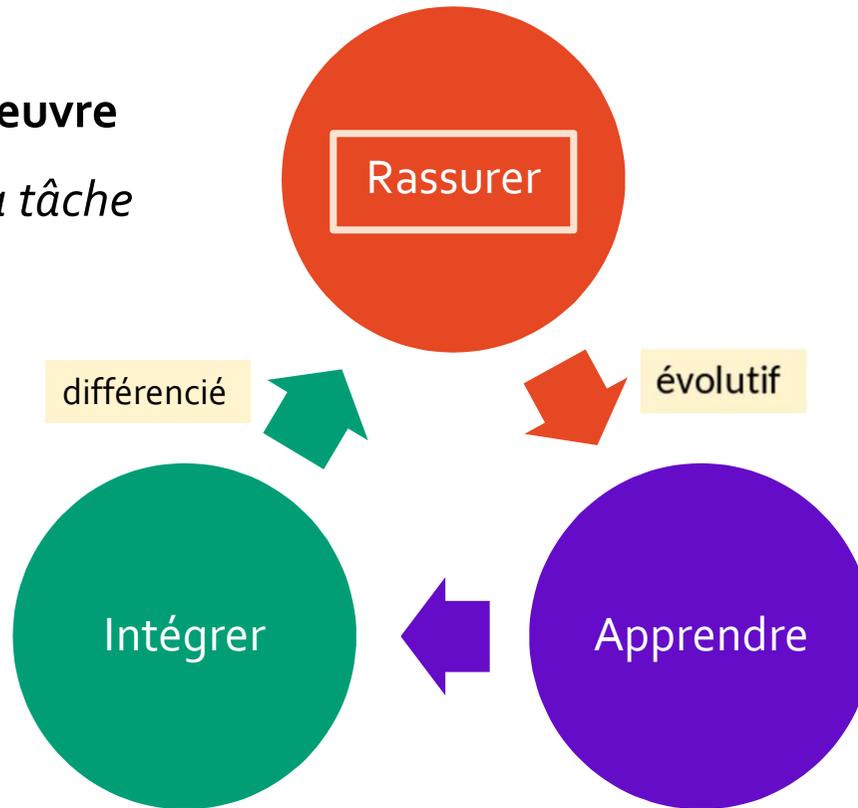
- Multiplier par 0,5 revient à diviser par 2.
- Multiplier par 0,1 revient à diviser par 10.

- Plus un facteur est proche de zéro, plus l'autre facteur de la multiplication est diminué.
- Plus un facteur est proche de 1, moins l'autre facteur de la multiplication est diminué.
- ...

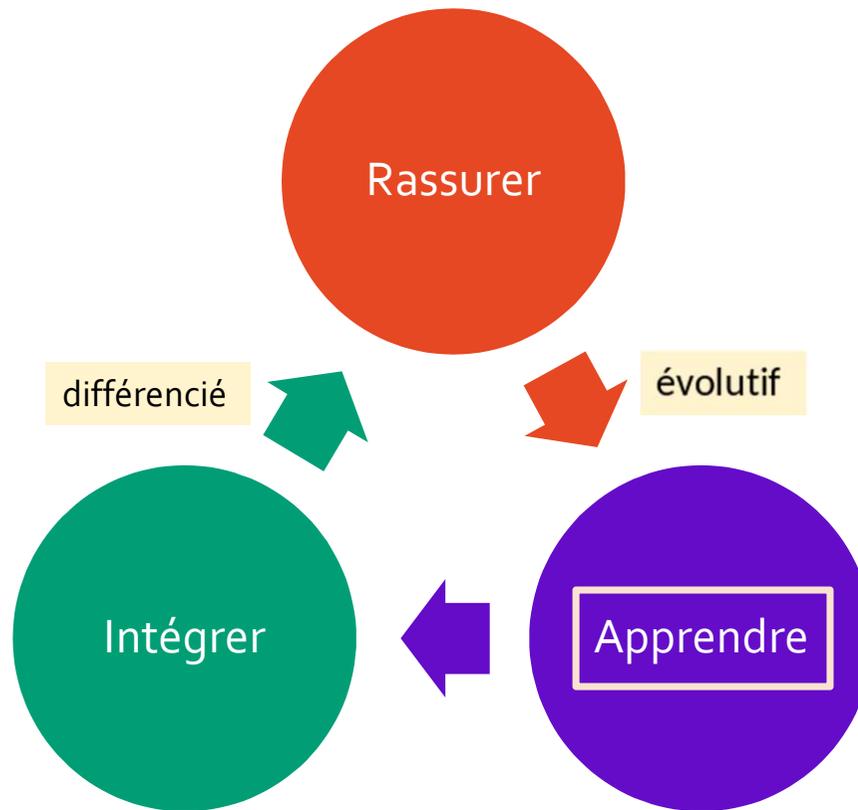
En quoi est-ce un rituel ?

- 1 jeu
- la calculatrice
- 1 consigne simple
- facile à mettre en œuvre

*facilite l'entrée dans la tâche
et la dévolution du pb*



En quoi est-ce un rituel ?



➤ **Variables didactiques :**
le choix du nombre de départ et de l'intervalle d'arrivée

➤ Apprentissage : il y a **des stratégies à développer**

➤ Ne pas rester sur le tâtonnement

➤ Importance de **la feuille de marque**

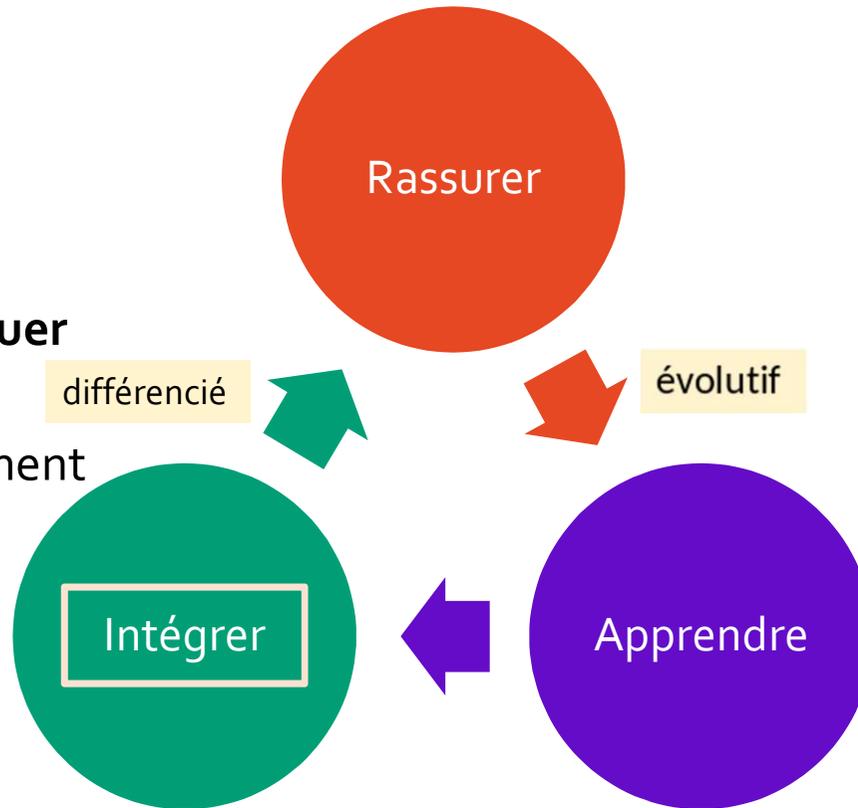
➤ Importance à la fin de chaque phase de jeu de **la discussion** et de **l'institutionnalisation**

En quoi est-ce un rituel ?

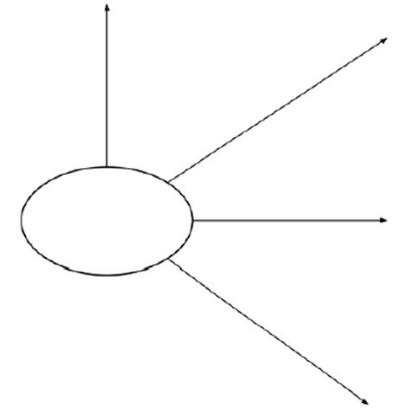
- **Tout le monde peut jouer**
avec la même règle
mais en jouant différemment

- **Plusieurs stratégies**
certaines plus
efficaces/optimales
que d'autres

- **Prof peut aussi choisir les binômes de jeu**



Rituel « le nombre du jour » (CM, 6^{ième})



Le principe : 1 jour 1 fraction

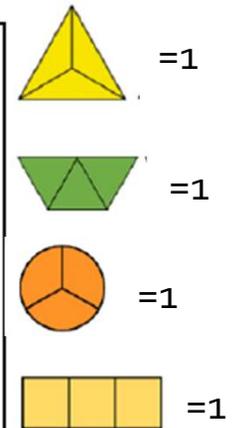
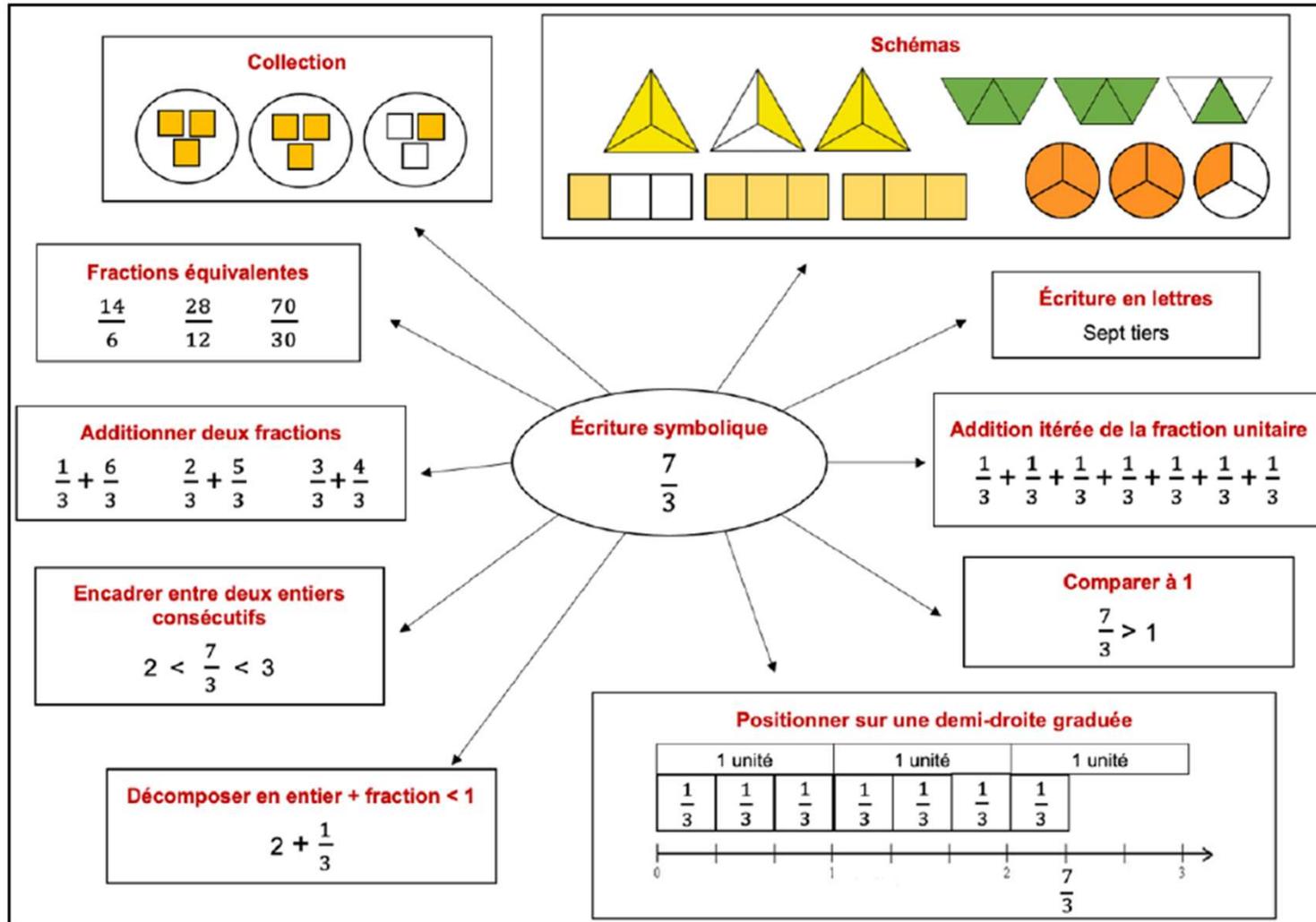
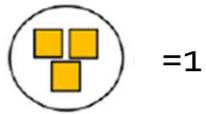
Travailler sur les différentes représentations
et l'équivalence entre elles

Sous la forme de **cartes mentales**,
ou de fiches à remplir rassemblées dans 1 livret

LA FRACTION DU JOUR 3		numérateur : $\frac{1}{3}$
Ecriture en lettres :		dénominateur : $\frac{1}{3}$
Portion d'une bande : 	Portion d'un disque : 	
Placement sur une droite graduée : 	Comparaison à 1 : 1	
Part d'une collection : 		Portion d'un triangle équilatéral :
<small>Colorie la part de la collection correspondant à la fraction</small>		

LA FRACTION DU JOUR 19		numérateur : $\frac{14}{6}$
Ecriture en lettres :		dénominateur : $\frac{14}{6}$
Portion d'un disque : 		
Placement sur une droite graduée : 		
Encadrement par deux entiers : 		Décomposition :
<small>Colorie la part de la collection correspondant à la fraction</small>		

Exemple de carte rituel nombre du jour



LA FRACTION DU JOUR 3

Écriture en lettres :

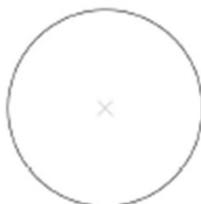
.....

numérateur : $\frac{1}{3}$
dénominateur :

Portion d'une bande :



Portion d'un disque :



Placement sur une droite graduée :



Comparaison à 1 :



Remplis avec = ; < ou >

Part d'une collection :



Colorie la part de la collection correspondant à la fraction

Portion d'un triangle équilatéral :



LA FRACTION DU JOUR 17

Écriture en lettres :

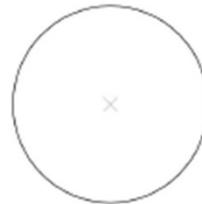
.....

numérateur : $\frac{5}{10}$
dénominateur :

Portion d'une bande :



Portion d'un disque :



Placement sur une droite graduée :

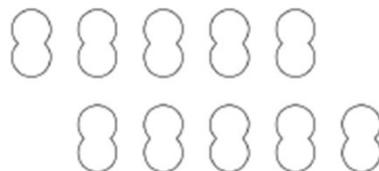


Comparaison à 1 :



Remplis avec = ; < ou >

Part d'une collection :



Colorie la part de la collection correspondant à la fraction

Portion d'une étoile :



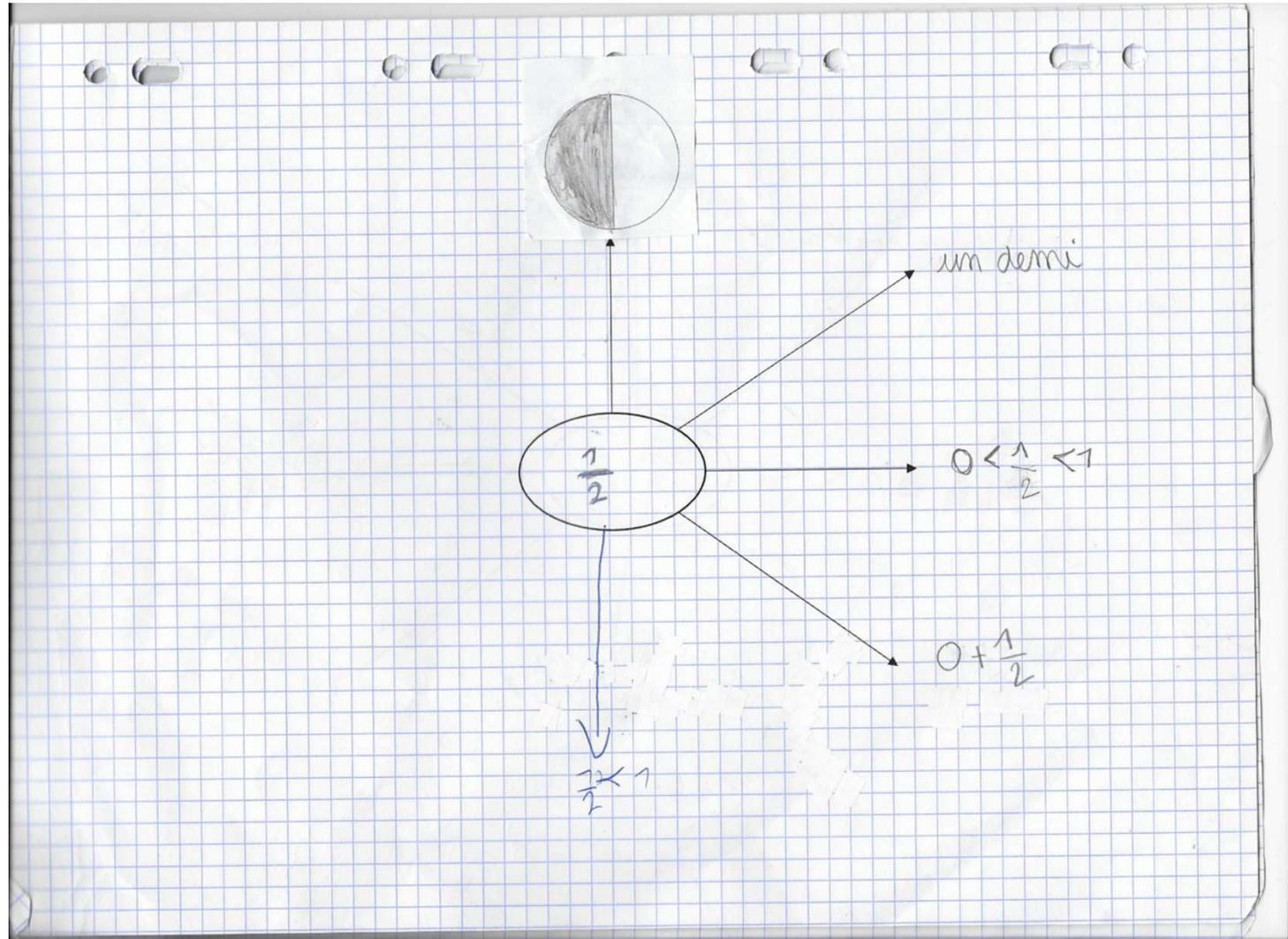
Quelle mise en œuvre ?

- 1- Le nombre du jour est donnée par l'enseignant (pas toujours sous la même forme)**
- 2- Les élèves complètent leurs cartes mentales d'abord individuellement**
- 3- Une phase d'échanges en binômes ou en îlots ensuite, pour enrichir et échanger**
- 4- Une phase d'échanges collectifs, des corrections, des débats**

*Et ce chaque jour pendant une période donnée,
selon une progression bien définie*

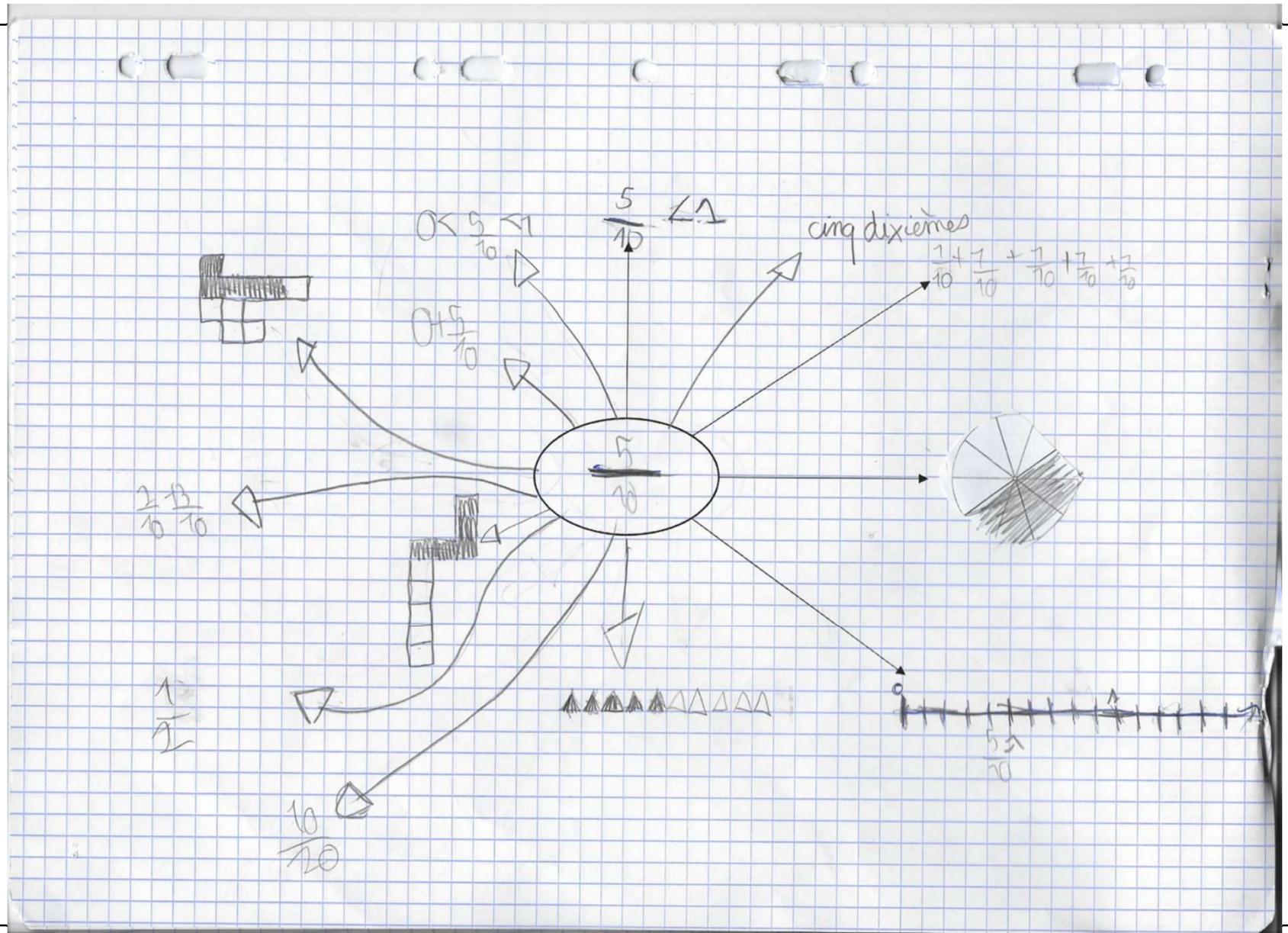
1^{ère} carte
mentale de
l'élève A

(CM2, 7^{ème}
niveau)



Dernière
carte
mentale de
l'élève A

(CM2, 10
niveau)



Des indicateurs de progression

- Compter sur les cartes mentales :
 - Le nombre total de représentations (correctes ou non)
 - Le nombre de représentations correctes
 - Le nombre de représentations différentes

- Et en quantifier l'augmentation (ou les variations)

Remarque : Le groupe IREM de Grenoble « aux quatre coins des maths » a déterminé des critères analogues lors de sa recherche intitulée « les carnets du nombre ».

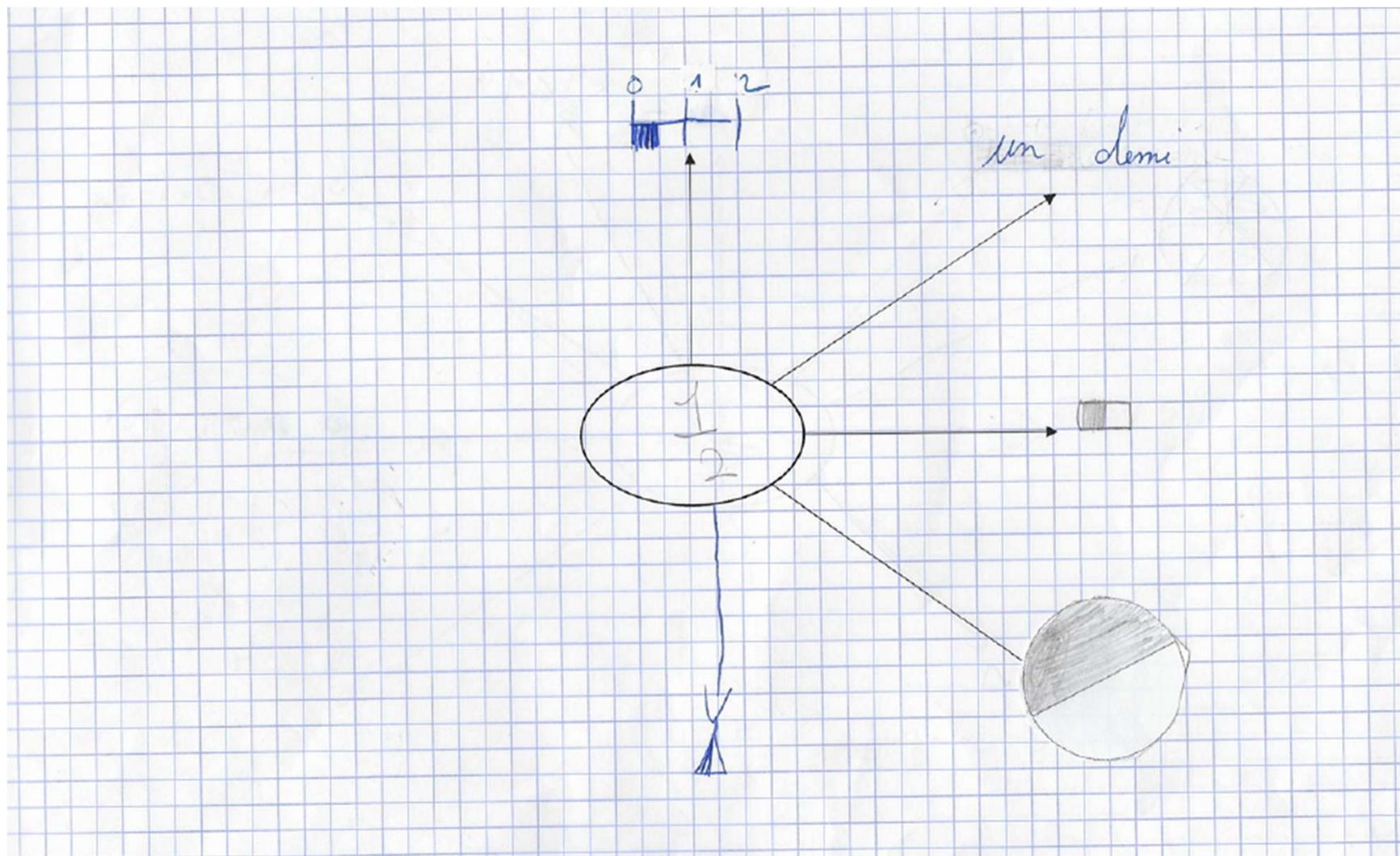
Détails pour l'élève A

(CM2, *tb niveau*)

	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9	J10
Écriture symbolique	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Écriture en lettres	1	1	1	1	1		1	1	1	1
Schémas (rectangles, disques, etc.)	1	1	1	2	2	4	4	4	4	3
Schémas (collections)				1	1	2	1	1	1	1
Comparer par rapport à 1			1	1	1	1	1	1	1	1
Encadrer entre deux entiers consécutifs	1	1	1		1	1	1	1	1	1
Positionner sur une droite graduée		1	1	1	1	1	1	1	1	1
Décomposer en entier +/- fraction < 1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Addition itérée de la fraction unitaire				1	1	1	1	1	1	1
Addition de deux fractions							1	1	1	1
Fraction équivalente									1	2
Nombre de représentations différentes	5	6	7	8	9	8	10	10	11	11
Nombre de représentations correctes	5	6	7	9	10	12	13	13	14	14

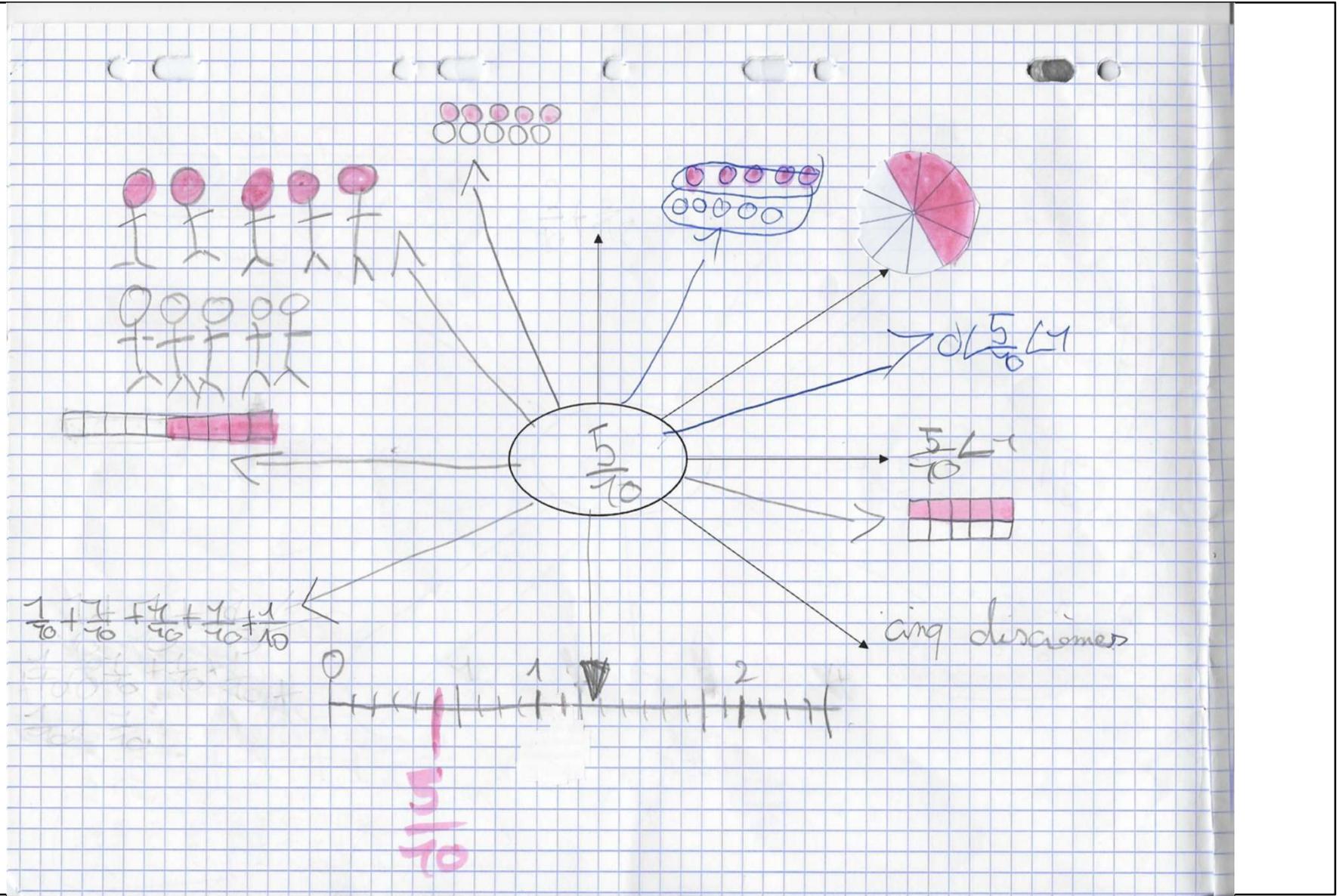
1^{ère} carte
mentale de
l'élève B

(CM1, en
difficulté)



Dernière
carte
mentale de
l'élève B

(CM1, en
difficulté)



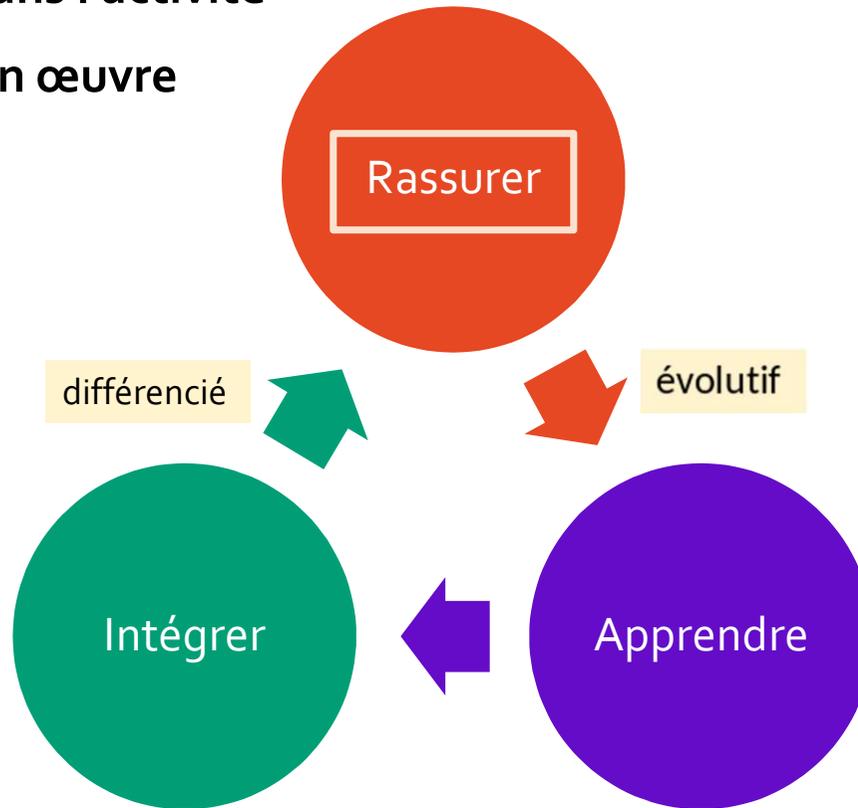
Détails pour l'élève B

(CM₁, en difficulté, a bénéficié d'étayages particuliers lors d'ateliers par groupes de 4)

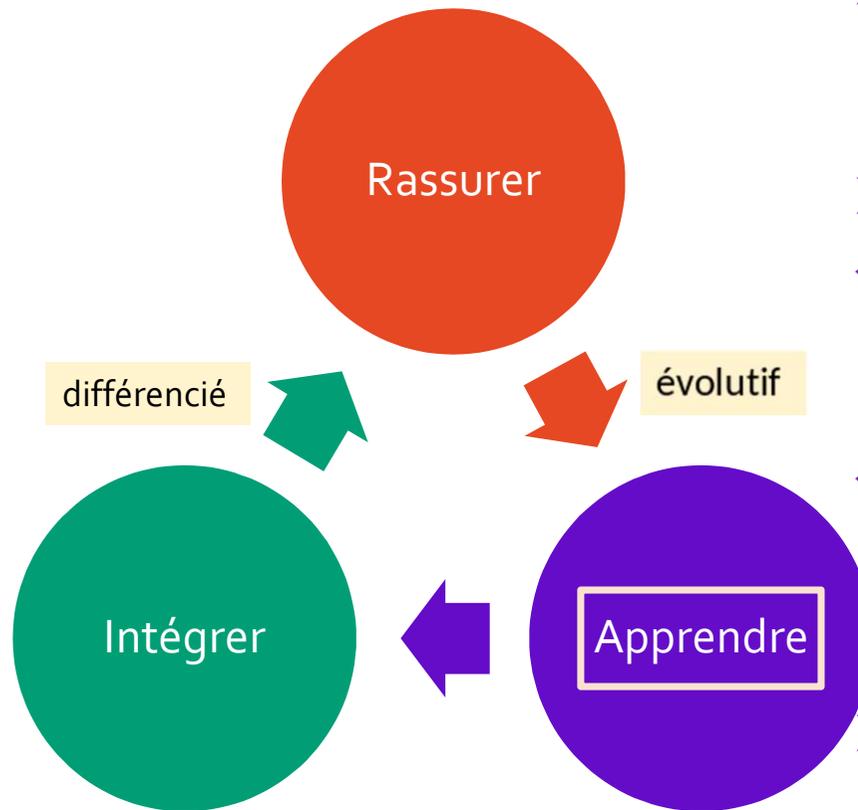
	J1	J2	J3	J4	J5	J6	J7	J8	J9	J10
Écriture symbolique	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Écriture en lettres			1	1	1	1	1	1	1	1
Schémas (rectangles, disques, etc.)	2	2	2	2	2	1	2	2	4	3
Schémas (collections)		1	3		1		3	3	2	2
Comparer par rapport à 1		1	1	1	1	1	1	1	1	1
Encadrer entre deux entiers consécutifs										
Positionner sur une droite graduée						1	1	1	1	1
Décomposer en entier +/- fraction < 1										
Addition itérée de la fraction unitaire				1	1	1	1	1	1	1
Addition de deux fractions										
Fraction équivalente										
Nombre de représentations différentes	2	4	5	5	6	6	7	7	7	7
Nombre de représentations correctes	3	5	9	6	7	6	10	10	11	10

En quoi est-ce un rituel ?

- **1 entrée facile dans l'activité**
- **facile à mettre en œuvre**



En quoi est-ce un rituel ?



➤ Un enrichissement naturel des représentations au fil des jours

➤ Une réflexion sur la progression

✓ choix des fractions elles-mêmes
dénominateurs qui ne font pas qu'augmenter, alternance fractions décimales ou non, etc

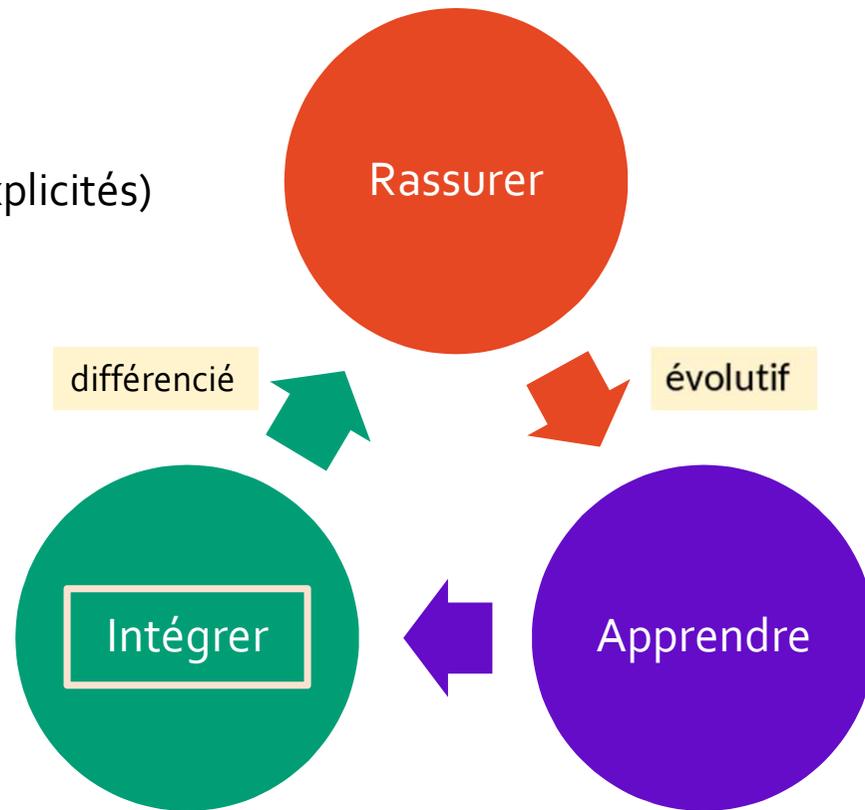
✓ choix du type de représentation donné au départ
pas toujours le même

➤ Une phase d'échanges en binômes puis de correction collective

➤ Discussions + trace écrite

En quoi est-ce un rituel ?

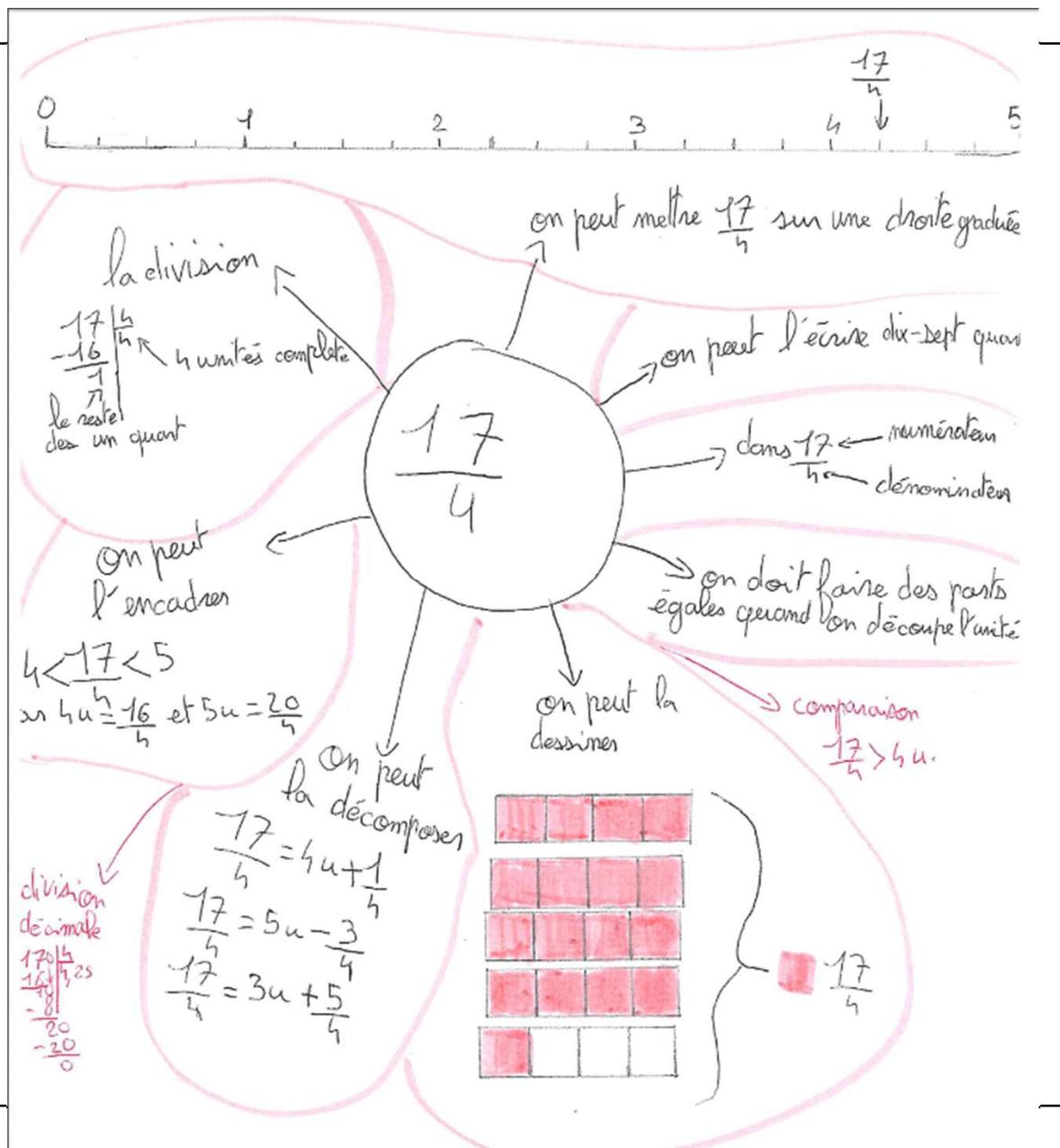
- **Tout le monde peut démarrer**
- **Max de représentations**
 - des éléments incontournables (attendus explicités)
 - mais aussi **un espace de liberté**
- **Allers retours possibles dans le livret**
- **Matériel mis à disposition pour certains élèves**
 - *matériel tangible*
 - *disques à partager, droites graduées, ...*
- **Regroupements et étayages possibles**
par le prof (et/ou les autres élèves)



Remarque : Le groupe IREM de Grenoble « aux quatre coins des maths » a également identifié comme primordial dans ce type de rituel : l'espace de liberté et le repérage de « pépites »

Une poursuite du travail en 6^e

Des cartes enrichies encore



$$4 < \frac{17}{4} < 5$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ 4 \\ \hline 16 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17,00 \\ -16 \\ \hline 10 \\ -8 \\ \hline 20 \\ -20 \\ \hline 00 \end{array}$$

$$4 \times 5 = 20 = 17 + 3 \Rightarrow \frac{17}{4}$$

fraction quotient

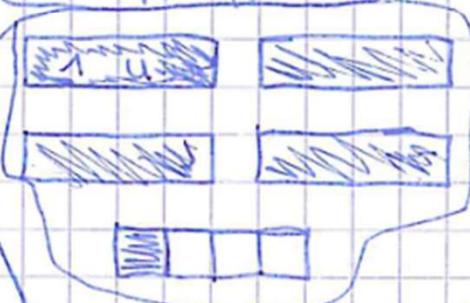
$$17 \times \frac{1}{4}$$
$$20 \times \frac{1}{4} - \frac{3}{4}$$

$$5 \times \frac{4}{4} - \frac{3}{4}$$

quatre-vingt-cinq quarts

$$\frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{4}{4} + \frac{1}{4}$$

17



$$4 \times \frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{16}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{10}{4} + \frac{7}{4} =$$

$$2 \times \frac{4}{4} + 2 + 1 \times \frac{4}{4} + 3$$

4



$$4 + \frac{1}{4} = 5 - \frac{3}{4}$$

Lucas

Ça veut dire que je sais sur $\frac{17}{4}$

se que je sais sur $\frac{17}{4}$

en lettre dix sept quarts graduation 3 mémoriser le nombre de part égal que je dois prendre

plus que le dénominateur schéma

7u
1u
1u
1u

on sait qu'il faut plus d'une unité

Combien comment je sais le fait combien

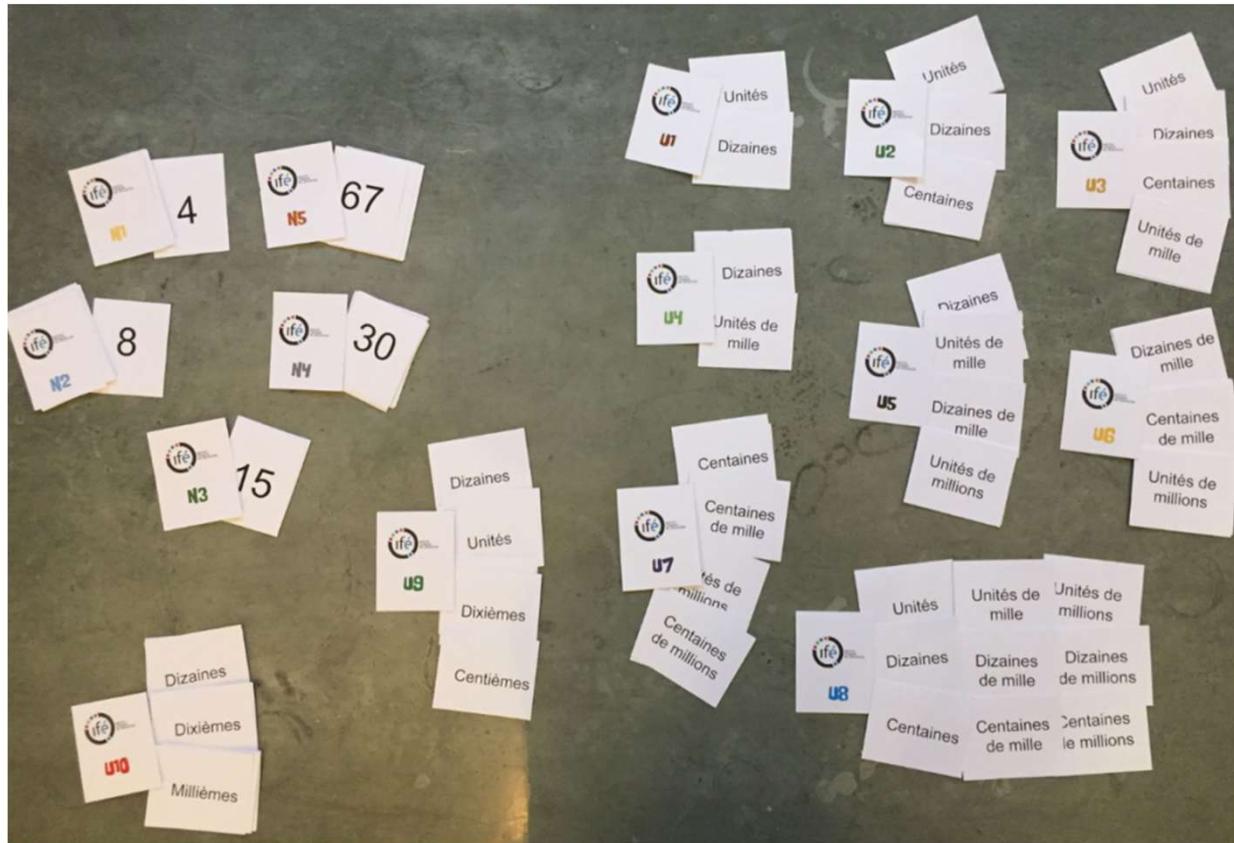
Le Dénominateur le nombre de comparaison $\frac{17}{4}$ parts que je fais

3 nombres

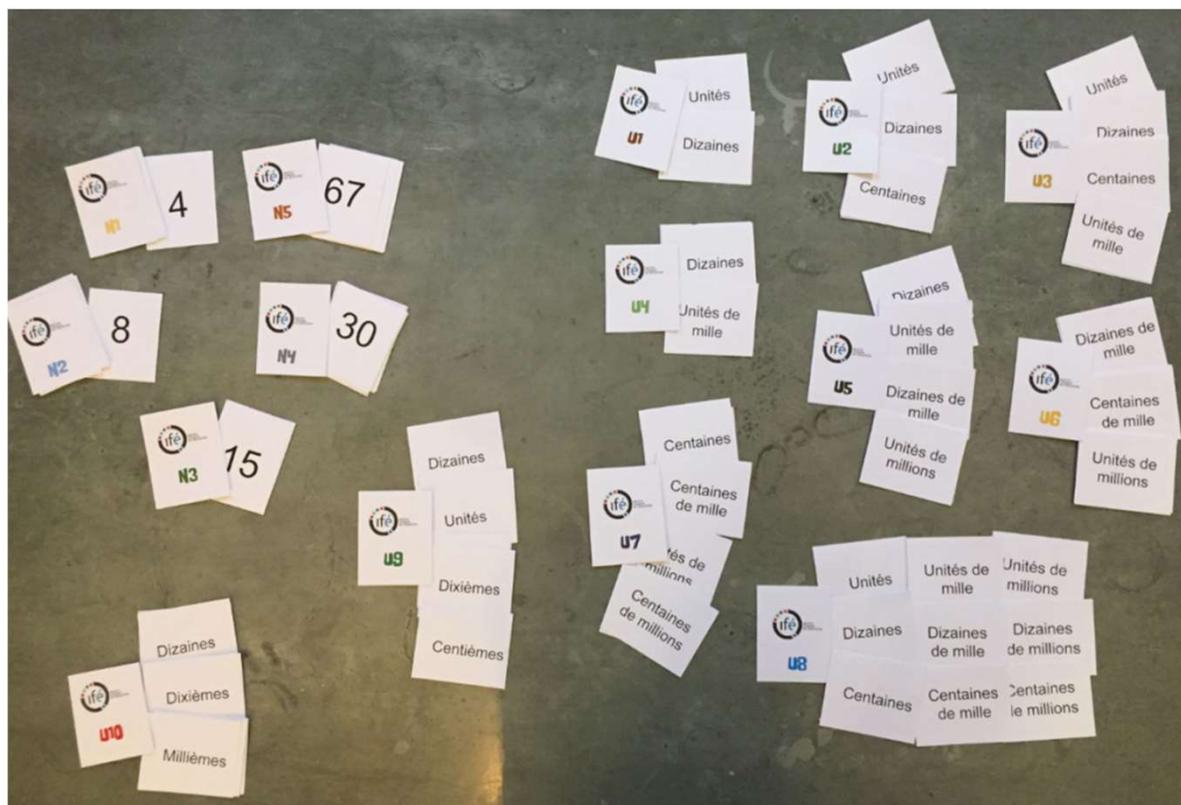
$\frac{17}{4}$
 $\frac{16}{4}$
 $\frac{1}{4}$

à deux coup il faut 4 u

Peut-on utiliser un jeu en tant que rituel ?



Présentation du jeu du chiffroscope (Cycle 3)



- travailler sur les différentes écritures et décompositions des nombres en unités de numération
- travailler les relations entre unités de numération
- jeu collaboratif avec un aspect aléatoire

Cartes pour jouer disponible en téléchargement sur le blog du Chiffroscope.
(Photo extraite du site)



Règle du jeu (travail en binôme)

- L'élève A pioche une carte « *unité de numération* » et la place dans le tableau.
- L'élève B pioche une carte « *nombre* » et la place dans la colonne de l'unité précédente.
- L'élève A pioche à nouveau une carte « *unité de numération* » et doit alors la placer correctement par rapport à la carte précédente. L'élève B pioche une carte « *nombre* » et ainsi de suite...

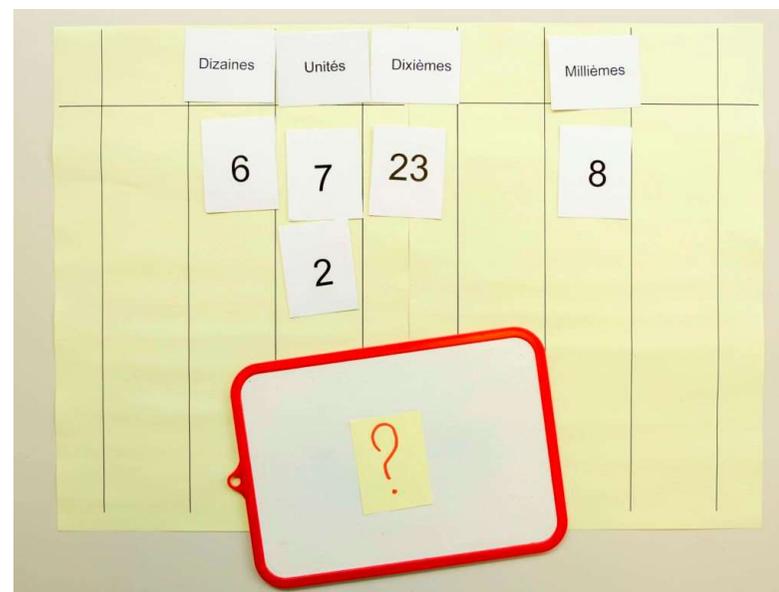


Image issue du site <https://chiffroscope.blogs.laclass.com/>

- donner du sens au tableau de numération en le construisant comme outil nécessaire à la résolution d'un problème
- comprendre le rôle du 0 dans l'écriture chiffrée d'un nombre
- travailler sur les conversions plutôt que sur le calcul.
- travailler les relations entre unités de numération sans passer nécessairement par l'unité

Identifier les variables didactiques (et valeurs)

- **Nombre d'unités de numération présentes**
- **Rapports entre unités de numération présentes**
→ partiellement contrôlable en supprimant certaines cartes d'unités de numération
- **Nombre de conversions à effectuer a priori**
- **Conversions en cascades ou non**
→ partiellement contrôlable (nombre de cartes nombres à deux chiffres)
- **Présence d'un zéro utile dans l'écriture finale**
→ non contrôlable en aléatoire, sauf pour le zéro aux unités si nombre entier

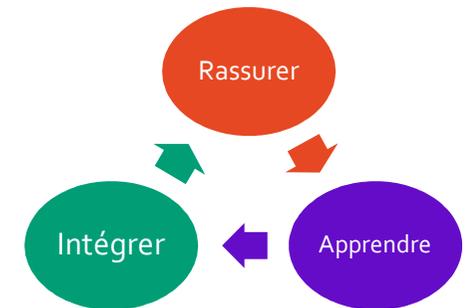
Le chiffroscope : un rituel ?

En quoi est-ce qu'on peut l'apparenter à un rituel ?

- poursuite sur la durée d'une activité que l'on joue également avec les entiers
- possibilité de travailler de la même façon les très grands nombres et les nombres décimaux (travail continu sur les aspects décimal et positionnel)
- Travail en binôme permettant de différencier entre les élèves

En quoi est-ce éloigné d'un rituel selon notre définition ?

- aspect collectif (groupe classe) absent
- aspect évolutif difficile à contrôler (aspect aléatoire du jeu)



Créer un rituel associé au jeu

1- Mises en commun : « ARRÊTS sur IMAGE »



Créer un rituel associé au jeu

1- Mises en commun : « ARRÊTS sur IMAGE »

6 centièmes, 20 dixièmes, 14 unités, 4 dizaines

Valeurs choisies pour les variables didactiques :

- ✓ Ordre d'apparition des unités de numérations dans le tirage : simultané, non ordonné (image)
- ✓ Pas de discontinuité ni de répétition d'une unité de numération dans le tirage
- ✓ 2 conversions nécessaires a priori : 20 dixièmes = 2 unités et 14 unités = 1 dizaine + 4 unités
- ✓ Nécessité d'un zéro dans l'écriture du nombre cherché

Résultat attendu : 56,06

Remarque sur les procédures possibles :

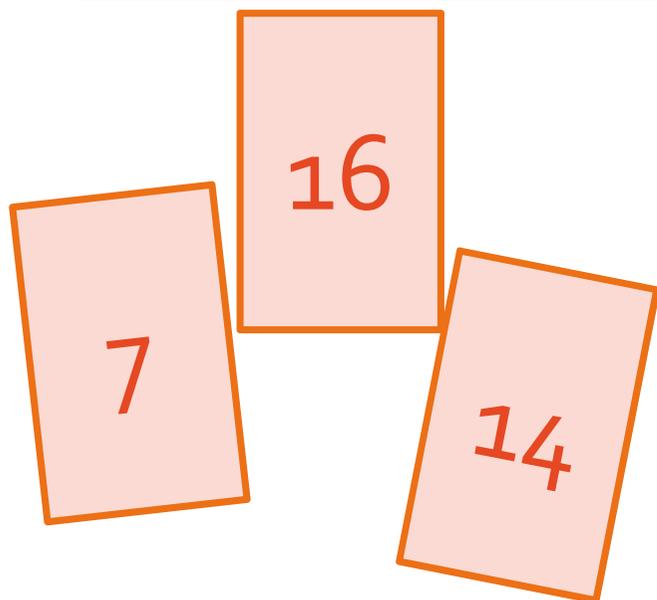
repérer l'unité de numération la plus petite ou la plus grande / commencer par placer l'unité / garder un ordre aléatoire comme dans le jeu.

Pour créer une progression de rituel, modifier une seule valeur de variable didactique à la fois !

Créer un rituel associé au jeu

2- Evolution du rituel : Modifier/ inverser les règles du jeu (+ variantes) :

Cible : 156,07



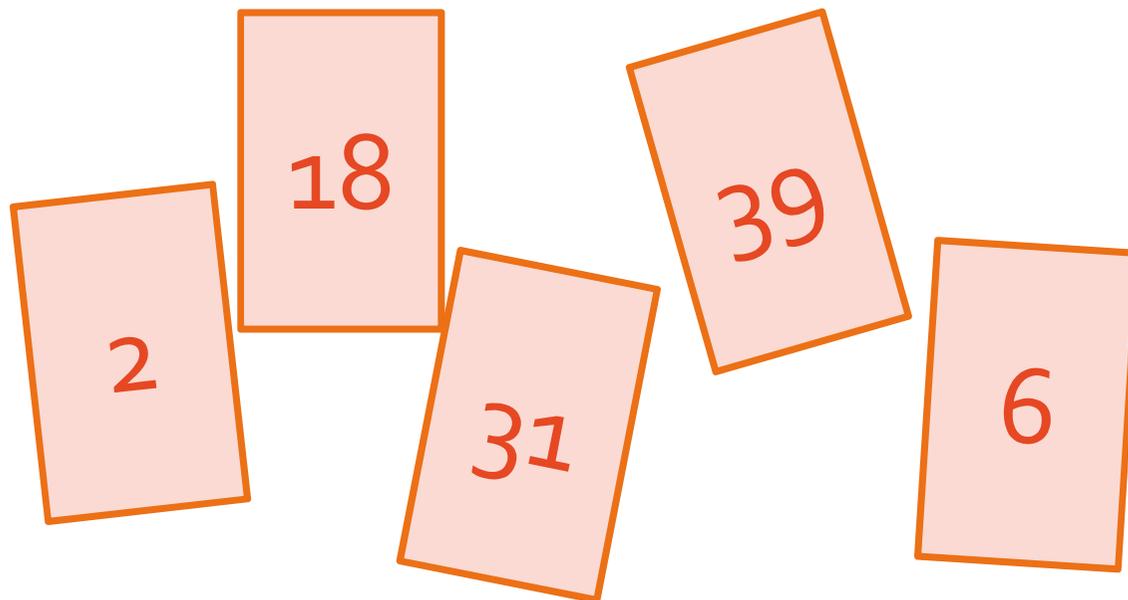
Trouver les cartes « unités de numération » manquantes, à associer à chaque carte nombre pour atteindre exactement le nombre cible

Variables didactiques :

- ✓ nombre de conversions à priori
- ✓ nombre d'opérations à effectuer
- ✓ nombre de conversions en cascade
- ✓ nécessité ou non de répéter une unité de numération

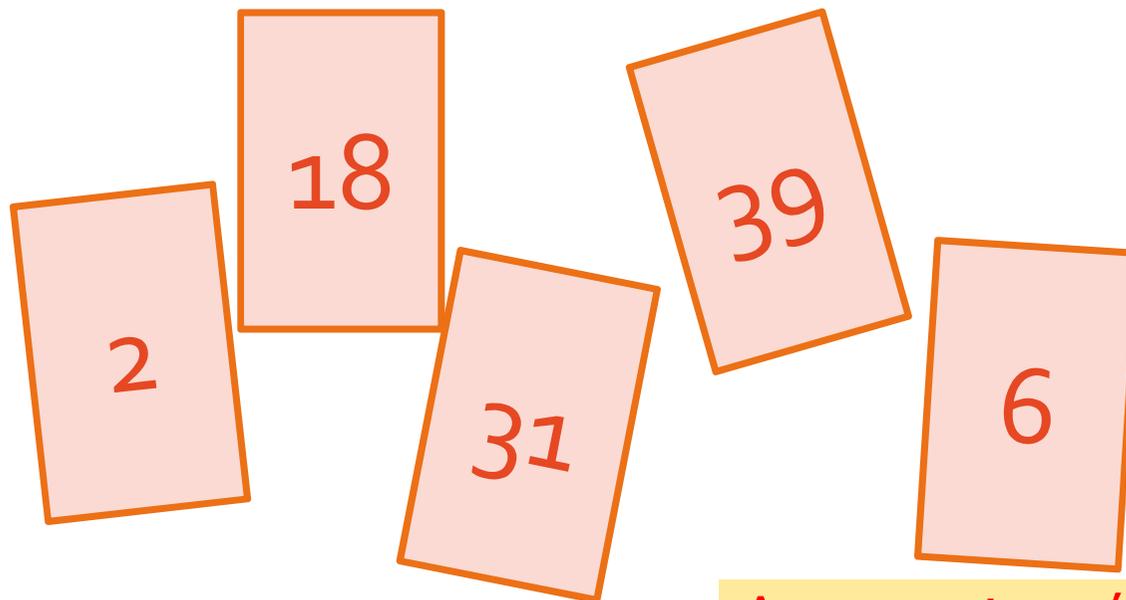
A vous de jouer !

Cible : 42,09



A vous de jouer !

Cible : 42,09



Avez-vous trouvé plusieurs solutions ?

Points de vigilance

- **La question du temps**
 - Nécessité réelle de temps de discussions
- **A trop focaliser sur un type de tâche particulier, on pourrait négliger les autres**
- **Des situations de référence à mener à parallèle, pour donner du sens**
 - Articulation possible : livret réutilisable comme appui pour la résolution de problèmes
 - Utilisation de matériel introduit lors d'autres situations

Evaluer un rituel

Pourquoi évaluer ?

> EFFICACITÉ du rituel

maintenir un rituel seulement si il a un réel intérêt

> PORTÉE du rituel

Identifier les limites et prévoir des remédiations adaptées

Evaluer un rituel

Comment évaluer ?

> ANALYSE A PRIORI

Utilisation de la grille méthodologique rassurer- intégrer- apprendre

Identification du ou des types de tâches travaillés à travers le rituel et les comparer aux besoins

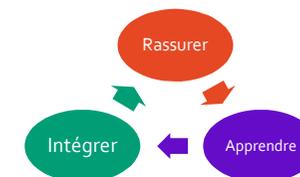
> ANALYSE EN SÉANCE

Engagement cognitif des élèves, progrès au fil des séances

> ANALYSE A POSTERIORI

Si un pré-test et un post-test sont possibles : les calibrer en fonction des objectifs visés, étudier le différentiel

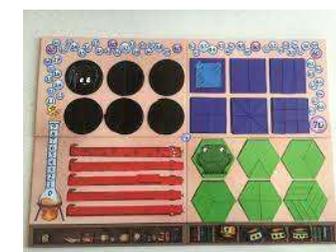
Plaisir et ressenti enseignant et élèves à ne pas négliger !



Représenter		Encadrer, Intercaler	
0,25 $\frac{1}{2}$		$\frac{70}{10} < \frac{78}{10} < \frac{80}{10} < 8$	
Calculer	$\frac{1}{6} + \frac{1}{3}$	Comparer / Ordonner	$\frac{3}{8} ? \frac{5}{6}$



plutôt pour
« comparer »
que pour
« représenter »



Fracto-dingo

Atelier des potions

Calcul	Méthode choisie	Résultat	Points
13 x 3		39	3
43 x 45		1935	4
13 x 45		585	4
13 x 57		741	4
137,88 x 3,45		474,684	4
7 x (5 x 4)		140	4
3 x (5 x 4)		60	4
3 x 18,5		55,5	4
13 x 18,5		240,5	4
13 x 47		611	4
48 x 43		2064	4
3,2 x 18		57,6	4
3,2 x 28		89,6	4

Figure 4. Pré-test élève 3

Calcul	Méthode choisie	Résultat	Points
13 x 3		39	3
43 x 45		1935	4
13 x 45		585	4
13 x 57		741	4
137,88 x 3,45		474,684	4
7 x (5 x 4)		140	4
3 x (5 x 4)		60	4
3 x 18,5		55,5	4
13 x 18,5		240,5	4
13 x 47		611	4
48 x 43		2064	4
3,2 x 18		57,6	4
3,2 x 28		89,6	4

Figure 5. Post-test élève 3



Bibliographie et Sitographie

Allard, C. (2015). *Allard_2015_Etude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire*.
<https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01249807/document>

Bittar et al (2010), I Encontro Institucional do PIBID UFMS <https://docplayer.com.br/82114391-I-encontro-institucional-do-pibid-ufms.html>, page 131

Chambris, C., Tempier, F., & Allard, C. (2017). Un regard sur les nombres à la transition école-collège. *Repères IREM*, 108, 30.

Coulangue, L., & Train, G. (2018). *Enseigner les nombres décimaux et les fractions transitions (ou ruptures ?) Primaire-secondaire*.

Cuisinier, F., Tornare, E., & Pons, F. (2015). Les émotions dans les apprentissages scolaires : Un domaine de recherche en émergence. *Revue de l'ANAE*, 139, 527-536.

Viau, R. (2009). *La motivation en contexte scolaire, de Boeck*

<https://chiffroscope.blogs.laclassed.com/>

<https://www.atelier-potions.fr/>

<https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/recherche-action/> (groupe 4 coins des maths)

N'hésitez pas à nous contacter !

Pour toute question, remarque, suggestion ; vous pouvez nous contacter à cette adresse :

Sophie.Terouanne@univ-grenoble-alpes.fr