

Progression d'exercices pour travailler la droite graduée

L'objectif de cette série d'activités est d'introduire ou de réactiver quelques techniques en lien avec la droite numérique graduée.

Dans cette série, on rencontrera des droites graduées, dont la représentation ne contient pas nécessairement le point d'abscisse 0. Et lorsqu'il le contient, on privilégie le prolongement des lignes à gauche au-delà du 0 (pas de demi-droite), afin de perdre le réflexe du « commencement à 0 ».

1- Introduire du vocabulaire

- A l'oral, sur la base d'une représentation de droite graduée incomplète, l'objectif de cette activité préliminaire est de réactiver quelques principes et de réintroduire le vocabulaire qui sera employé par la suite.

Afin que les élèves comprennent l'attendu, on leur indiquera :

« L'objectif de cet exercice est de rappeler le vocabulaire, lié à la droite graduée, car pour bien travailler avec les nombres, nous avons besoin de savoir les situer les uns par rapport aux autres sur une droite graduée. »

Exercice préliminaire

La graduation est régulière sur cette droite graduée. Que signifie le mot "régulier" ? Comment savoir à quel nombre correspond chaque trait ?



Savez-vous à quoi correspond le mot *graduation* ? ».

On pourra indiquer (ou confirmer) que la graduation est l'ensemble des traits verticaux, régulièrement répartis, avec les nombres associés.

- Après 2 min de réflexion individuelle et un échange avec les élèves, on pourra « corriger » cet exercice en insistant notamment sur les éléments suivants :
 - Comment le pas a été déterminé, puis vérifié
 - Comment on a trouvé quel nombre il faut placer à chaque trait suivant : en effectuant une addition à partir de l'abscisse précédente et du pas.

Bilan de l'activité : on dit que la graduation est régulière lorsque les traits sont réguliers, et que l'écart entre deux nombres qui se suivent est toujours le même. On appelle cet écart le pas de la graduation.

On pourra proposer des droites avec des traits réguliers, mais les écarts entre les nombres ne sont pas réguliers. Et proposer des droites avec des traits répartis avec une distance non constante, pour spécifier qu'une graduation est régulière si elle vérifie les deux conditions de régularité (géométrique et numérique).

Trace écrite :

NON REGULIERE

NON REGULIERE

REGULIERE

$0 + 2 = 2$; $4 + 2 = 6$. Le pas de la graduation est 2.

On formule à l'oral en complément : *Lorsque je connais le pas, je peux compléter la droite graduée en ajoutant le pas à un nombre déjà placé. »*

Définir l'origine : *« L'origine de la graduation est le point du nombre 0. L'origine n'est pas toujours visible sur la partie qui est représentée. »*



Il peut être utile (notamment si c'est le choix effectué dans des manuels utilisés dans la classe de spécifier : *« parfois, on parle de demi-droite graduée en choisissant l'origine comme extrémité de la demi-droite (à gauche) »*



Remarques

Par convention, les lignes graduées sont présentées horizontalement et orientées de gauche à droite. Un nombre situé à droite est toujours plus grand qu'un nombre situé plus à gauche.

On peut parfois voir des représentations verticales (notamment lorsqu'il s'agit de représenter une échelle des températures). Dans ce cas l'orientation est généralement du bas vers le haut.

2- Travailler sur la notion de pas, et savoir utiliser une graduation régulière pour placer des nombres

Travail sur les graduations autres que de 1 en 1 et sur la présentation de droite graduée.

Ces exercices ont pour objectif d'apprendre à déterminer et utiliser le pas d'une graduation régulière à partir de deux abscisses consécutives quelconques. On peut annoncer aux élèves :

« On va s'entraîner à compléter des droites graduées lorsque seulement certains nombres sont placés. Pour cela, vous pourrez commencer par vérifier qu'il s'agit bien de graduations régulières, et déterminer le pas. Vous avez à votre disposition une bande outil qui vous permet de reporter des longueurs, et vous pouvez utiliser votre brouillon ou votre ardoise ».

Exercice 1. La graduation est régulière sur cette droite. Quel est le pas ? Indique à quel nombre correspond chaque trait.



Exercice 2. La graduation est régulière sur chacune de ces droites. Quel est le pas ? Indique à quel nombre correspond chaque trait.



Pour ces exercices, le seul matériel proposé est une bande outil qui pourra permettre de vérifier que la graduation est régulière (comprendre le texte de l'énoncé) en reportant l'écart entre les deux premiers points, et en vérifiant la cohérence des abscisses déjà données (« il y a le même écart entre 0 et 10 qu'entre 10 et 20 » ; « il y a le même écart entre 0 et 3 qu'entre 3 et 6 »).

En cas d'erreur, on lui demandera de bien vérifier que l'écart est constant entre deux abscisses consécutives (« quel est l'écart entre 12 et 15 ? Quel est l'écart entre 15 et 16 ? » ; « y-a-t-il toujours le même écart ? »).

Une fois que l'entraînement pour compléter une droite par des valeurs supérieures est fait, on pourra proposer des exemples où il faut également compléter la droite par des valeurs inférieures (à gauche).

A ce moment, si cela n'a pas été fait, on rappellera la convention de la droite graduée : orientée vers la droite. A travers un échange, on s'assure que les élèves ont bien compris, et on conclut : « les nombres situés à droite de 1300 sont plus grand que 1300, et les nombres situés à gauche de 1100 sont plus petits que 1100 ».

Exercice 3. La graduation est régulière sur cette droite. Quel est le pas ? Indique à quel nombre correspond chaque trait.



Bilan de l'activité : lorsque je connais le pas, je peux compléter la droite graduée en

- ajoutant le pas à un nombre placé, pour trouver le nombre correspondant au point suivant (immédiatement à droite)
- soustrayant le pas pour trouver le nombre à placer immédiatement à gauche.

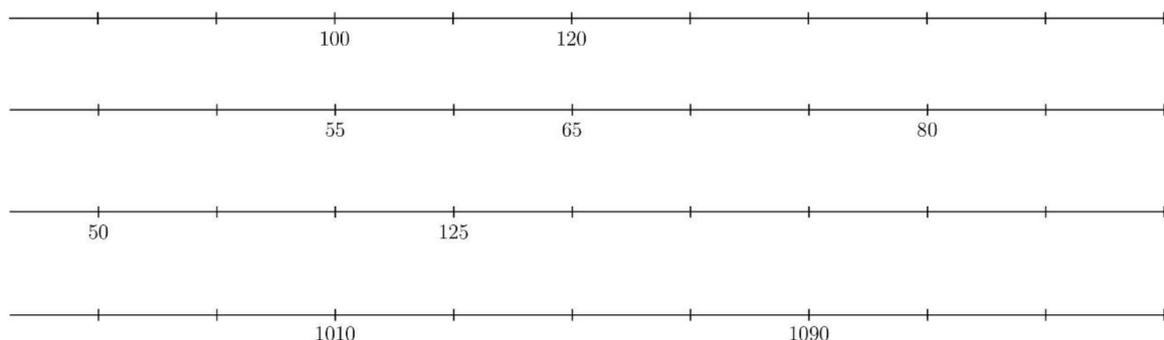
Travail sur la graduation : déduire le pas à partir de deux abscisses non consécutives

Un des objectifs ici est de remarquer que le même écart sur la feuille peut représenter des écarts différents entre les nombres, et que c'est la donnée de deux abscisses (non nécessairement consécutives) qui permet de déterminer quel est le pas.

On peut donc annoncer aux élèves :

« On va continuer à s'entraîner à compléter des graduations régulières, mais maintenant, on n'aura pas toujours la connaissance des nombres pour deux points successifs de la graduation. Il faudra réfléchir à un moyen de déterminer le pas. »

Exercice 4. La graduation est régulière sur chacune de ces droites. Indique à quel nombre correspond chaque trait de la graduation.



Si nécessaire, pour accompagner les élèves dans la recherche, on leur demande : « Quel est l'écart entre les deux nombres placés ? »

Bilan de l'activité : Lorsqu'une graduation est régulière, il suffit que deux nombres soient placés pour pouvoir déterminer le pas et compléter toute la graduation. Pour déterminer le pas, on divise l'écart entre deux nombres placés par le nombre de pas les séparant :

Trace écrite : (Par exemple sur la troisième droite ci-dessus) :



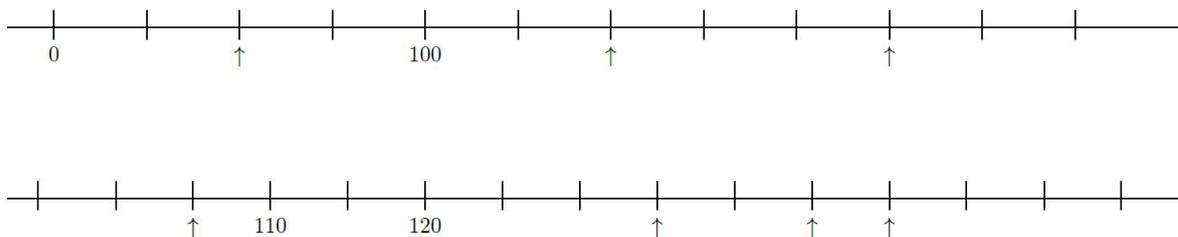
- 50 et 125 sont éloignés de trois pas et $125 - 50 = 75$.
- Le pas de la graduation est donc $75 \div 3 = 25$.

On vérifie :

- $50 + 25 = 75$
- $75 + 25 = 100$
- $100 + 25 = 125$.

On pourra alors demander de compléter uniquement partiellement, ce qui peut amener à des stratégies différentes : dans les cas ci-après, soit l'élève pourra remobiliser la technique travaillée précédemment consistant à coder toutes les positions, soit il peut essayer d'optimiser en mobilisant d'autres techniques, en utilisant des graduations secondaires (de deux en deux, de trois en trois...)

Exercice 5. Ci-après, les graduations sont régulières. Indique à quel nombre correspond chaque graduation repérée par une flèche.

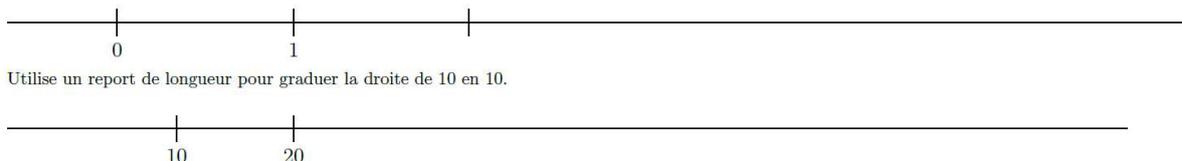


3- Construire une graduation régulière pour placer des nombres

L'objectif des exercices suivants est de savoir construire une graduation régulière par report de longueur. On y travaille le geste du report de longueur pour compléter une graduation. Les outils à dispositions de l'élève sont ceux qui permettent de reporter des longueurs : une bande-outil, éventuellement un compas.

Cela permet de comprendre le rôle de l'origine ; en tant que repère sur une droite comme extrémité de la demi-droite graduée des nombres (positifs).

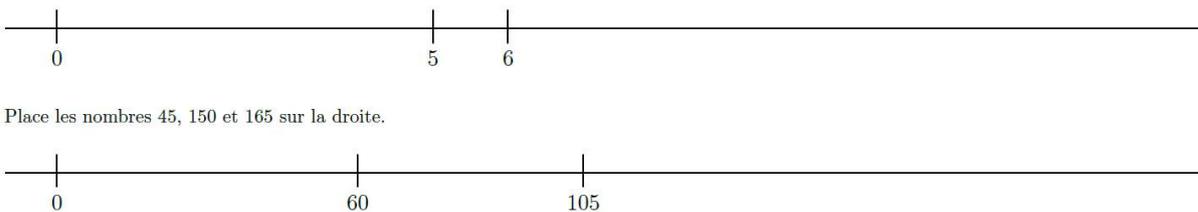
Exercice 6. Reporte la longueur unité pour graduer la droite de 1 en 1.



4- Utiliser des reports de longueurs pour placer des nombres

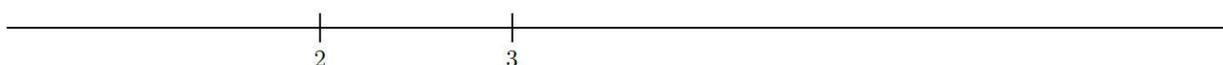
Les exercices de placement de nombres obtenus comme somme ou différence comme ci-après permettent de travailler les placements de nombres et les relations entre les nombres sans avoir recours à une droite entièrement graduée.

Exercice 7. Place le nombre 11 sur la droite.



Dans un second temps, on pourra proposer des exercices ne proposant pas forcément l'origine, ce qui demande à l'élève de commencer par déterminer la ou les longueurs disponibles à partir des abscisses présentes. Afin de contourner la stratégie de graduation régulière de la droite, on pourra limiter le nombre de report de longueurs autorisés.

Exercice 8. En utilisant deux reports de longueurs, place le nombre 6 sur la droite.



Les élèves peuvent traiter cet exercice en application directe de tout ce qui a été vu avant (report de la longueur unité, à gauche ou à droite pour graduer de 1 en 1 ou de 10 en 10).

L'enseignant veillera à observer si d'autres stratégies sortent pour le dernier exercice qui ne demande pas de graduer de 1 en 1 mais de placer le nombre 6. Lors du bilan et de la mise en commun, il mettra en avant les autres stratégies. Une stratégie experte consiste à placer 4, puis reporter la longueur 2 à partir de l'abscisse 4. C'est la stratégie qui permet de ne faire que deux reports de longueurs.

Si l'on allège la contrainte (en utilisant deux types de reports de longueurs, c'est-à-dire pas seulement la longueur 1), alors on peut également penser à placer le nombre zéro en prolongeant la demi-droite à gauche, puis on pourra utiliser la longueur 3 ainsi produite pour la reporter à partir de l'abscisse du nombre 3.

Les deux stratégies suivantes pourront alors être proposées en bilan :

- L'une consistant à reporter la longueur 2 à partir de l'abscisse 4
- L'autre consistant à reporter la longueur 3 à partir de l'abscisse 3 :

Bilan de l'activité et trace écrite

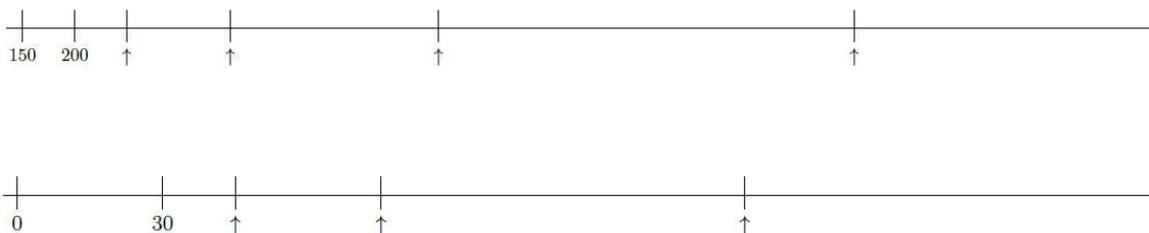
On peut reporter différentes longueurs pour placer des nombres :

ou

ou

Ces techniques de reports de longueurs pourront être remobilisées dans les exercices de codage ci-après.

Exercice 9. Pour chaque droite ci-dessous, indique à quel nombre correspond chaque graduation repérée par une flèche.



En effet, dans les deux cas, la technique consistant à reproduire la graduation complète pourrait être utilisée, mais l'utilisation de reports de longueur est plus efficace.

Pour la première droite, les nombres déjà placés sont 150 et 200, de sorte que la graduation naturelle est avec un pas de 50. Les positions à coder (de gauche à droite) correspondent aux nombres :

- 250, que l'on retrouve en reportant la longueur 50 à partir de la position du nombre 200 ;
- 350 (qui est à la même distance de 250 que le nombre 150 déjà placé) ;
- 550 (qui est à la même distance de 350 que de 150, donc on reporte la distance correspondant à l'écart de $350-150=200$) ;
- 950 (là encore, on peut reporter l'écart entre les positions des nombres 550 et 150).

Pour la deuxième droite, la graduation naturelle semble être de 30, mais en voyant le premier nombre à placer, on comprend qu'il « manque » une graduation et donc que la graduation naturelle est avec un pas de 15. Les positions à coder (de gauche à droite) correspondent aux nombres :

- $45 = 30+15$. Il faut vérifier que la distance entre cette graduation et celle du nombre 30 est égale à la moitié de la distance entre les deux graduations fournies (0 et 30)
- $75 = 45+30$, que l'on peut déduire par un report de la longueur 30
- 150, que l'on peut déduire par un report de la longueur 75 obtenue entre les positions du 0 et du 75.

5- Partager un intervalle pour obtenir un pas de 1, afin de graduer ou placer des nombres

L'objectif de ces exercices est de comprendre qu'on peut partager une longueur pour obtenir une graduation plus fine permettant d'attraper plus de nombres. Pour cela, il faut apprendre à partager une longueur (par exemple en pliant la bande outil) ou à utiliser un outil permettant de partager un segment (on pourra introduire le « gradue-tout » à ce moment-là).

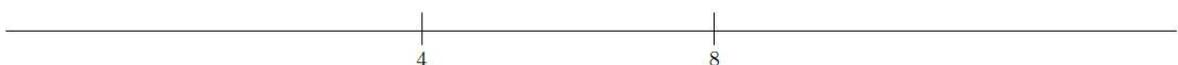
Pour le premier exemple, il est plus intéressant d'utiliser une bande outil, que l'on devra partager en 4 par pliage. Par la suite, pour pouvoir partager en 5, en 3, on pourra utiliser le « gradue-tout », ou le guide-âne s'il est déjà connu des élèves. Pour annoncer l'objectif aux élèves on pourra dire :

« Dans les exemples suivants, il faudra trouver un moyen de graduer avec une graduation plus fine, c'est-à-dire un pas plus petit, que celle qu'on obtient par report de la longueur entre les nombres déjà placés.

Pour cela, je vous propose d'utiliser une bande outil sur laquelle vous pourrez reporter la longueur entre les deux traits déjà placés. Et vous réfléchissez à la longueur dont vous avez besoin pour graduer de 1 en 1.»

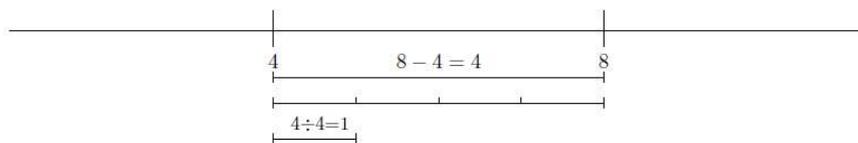
On peut alors laisser les élèves chercher l'exercice ci-après en autonomie pendant 5 min, puis procéder à une mise en commun des procédures utilisées.

Exercice 10. Gradue la droite de 1 en 1.



Bilan de l'activité : « Avec une graduation, il y a des nombres l'on peut attraper et d'autres que l'on ne peut pas attraper. En partageant de façon régulière, on peut changer la graduation et attraper plus de nombres »

Trace écrite :



- L'écart entre 4 et 8 est égal à 4 (car $8 - 4 = 4$).
- On partage donc cet intervalle en 4 parties égales pour obtenir la longueur unité, ce qui permet de graduer de 1 en 1.

A l'occasion de ces besoins de partage, on pourra présenter des outils comme le guide-âne ou le « gradue-tout » à la classe.

En entraînement, on pourra proposer des exercices du type des suivants :

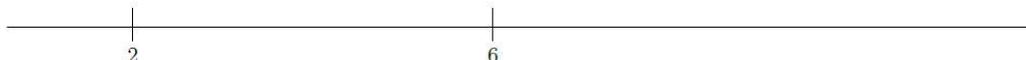
Exercice 11. Place les nombres entre 5 et 10 sur la droite.



Exercice 12. Place le nombre 8 sur la droite.



Place le nombre 9 sur la droite.

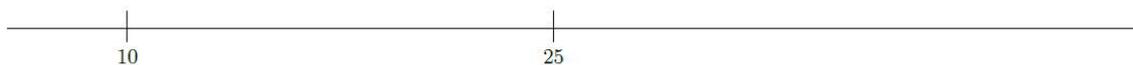


6- Partager un intervalle pour obtenir un pas différent de 1, comprendre l'intérêt de différents pas

Dans les exercices ci-après, il s'agit de trouver la graduation optimale permettant de placer de nouveaux nombres à partir de deux nombres déjà placés. La technique travaillée est la détermination d'une subdivision de l'intervalle donné par les abscisses déjà placées, afin d'obtenir un pas permettant de créer une graduation suffisamment fine. Pour annoncer l'objectif aux élèves on pourra dire :

« Dans les exemples suivants, on continue de chercher à placer des nombres sur la droite graduée incomplète, à partir de deux nombres déjà placés. On verra que les reports de longueurs connues ne suffisent pas toujours, mais qu'il n'est pas toujours utile de revenir à un pas de 1. »

Exercice 13. Place le nombre 35 sur la droite.



Place les nombres 100 et 130 sur la droite.



Exercice 14. Place les nombres 12, 24, 28 et 34 sur la droite.



Pour la première tâche de l'exercice 13, la graduation naturelle de la droite a un pas de 5. Le report de longueur permettrait d'attraper le nombre $25+15=40$, mais pas le nombre 35. Pour attraper 35, il faut connaître l'écart de 5. Ceci est possible en subdivisant l'intervalle $[10,25]$ en trois parties égales. On pourra utiliser le « gradue-tout » ou une bande-outil.

Attention, la demi-droite graduée ne démarre pas à 0. Cela pourra être vérifié en testant : il faut prolonger la ligne (représentation de la droite) à gauche pour pouvoir ajouter la graduation zéro (origine).

La deuxième droite de l'exercice 13, peut être graduée de 10 en 10 en utilisant le « gradue-tout » ou le guide-âne, permettant de subdiviser l'intervalle $[10,70]$ en 6 parties égales. Cependant, il est intéressant ici de remarquer que les techniques de reports de longueurs permettent de placer les nombres 100 et 130 en déterminant uniquement la longueur correspondant à l'écart de 30, qui est la moitié de l'écart entre 10 et 70.

L'exercice 14 permet un grand nombre de procédures différentes : on pourra utiliser une graduation de 4 en 4 (puis partager l'intervalle $[32,36]$ en deux parties égales), ou utiliser différents reports de longueurs : de 4, puis de 12, puis à nouveau de 4 et enfin de 2.

Bilan de l'activité : « Lorsque deux nombres sont placés, pour placer des nouveaux nombres, il faut réfléchir à la graduation dont on a besoin, en étudiant les relations entre les nombres déjà placés et les nombres à placer »

Enfin, l'exercice 15 ci-après permet de remobiliser les techniques de partage, de graduation d'un segment avec un pas choisi et de reports de longueurs dans le cadre du codage d'une position.

Exercice 15. Indique à quel nombre correspond chaque point repéré par une flèche.

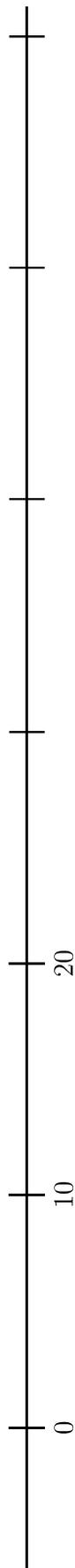


Exercice préliminaire

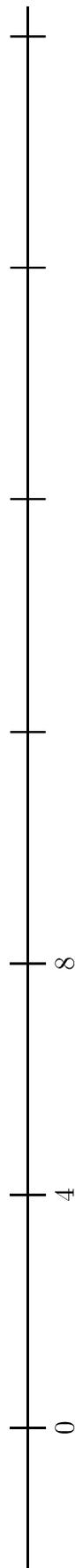
La graduation est régulière sur cette droite graduée. Que signifie le mot "régulier" ? Comment savoir à quel nombre correspond chaque trait ?



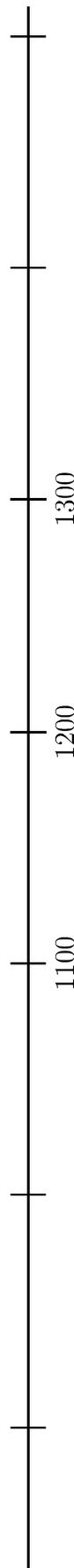
Exercice 1. La graduation est régulière sur cette droite. Quel est le pas ? Indique à quel nombre correspond chaque trait.



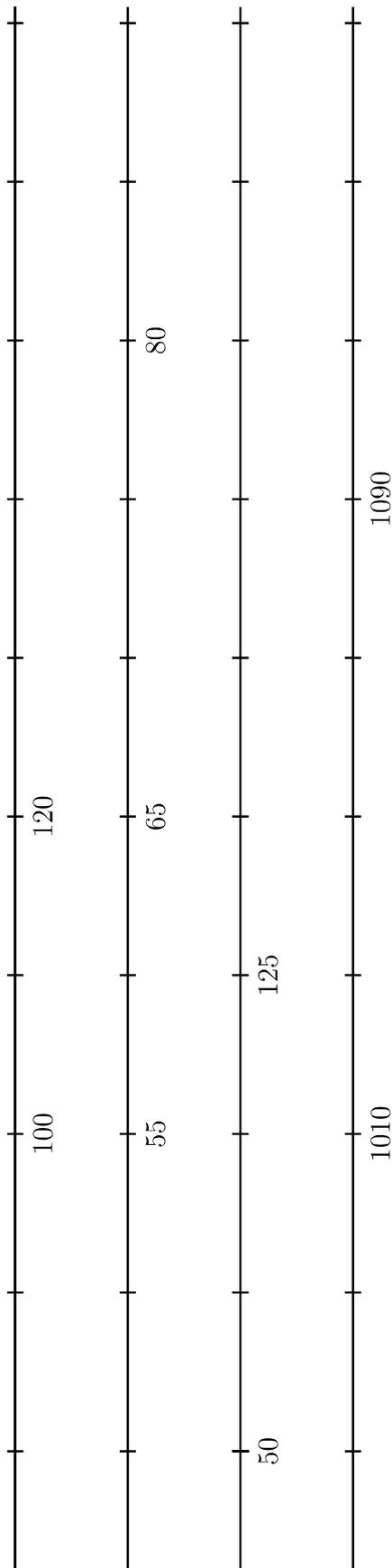
Exercice 2. La graduation est régulière sur chacune de ces droites. Quel est le pas ? Indique à quel nombre correspond chaque trait.



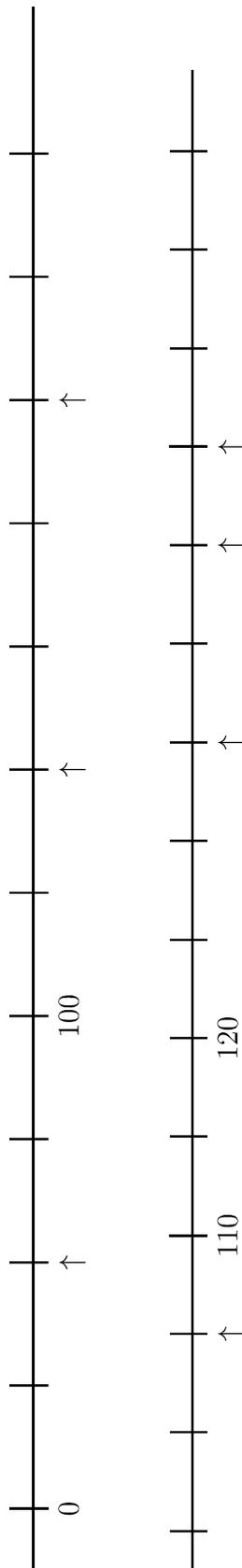
Exercice 3. La graduation est régulière sur cette droite. Quel est le pas ? Indique à quel nombre correspond chaque trait.



Exercice 4. La graduation est régulière sur chacune de ces droites. Indique à quel nombre correspond chaque trait de la graduation.



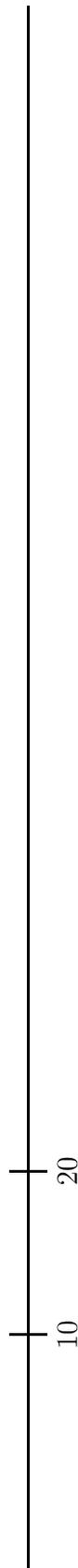
Exercice 5. Ci-après, la graduation de chaque droite est régulière. Indique à quel nombre correspond chaque point repéré par une flèche.



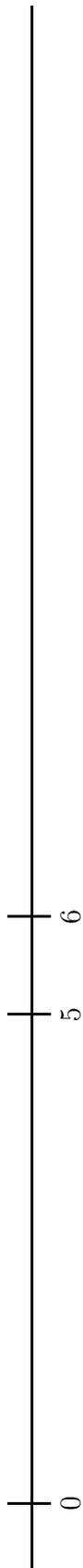
Exercice 6. Reporte la longueur unité pour graduer la droite de 1 en 1.



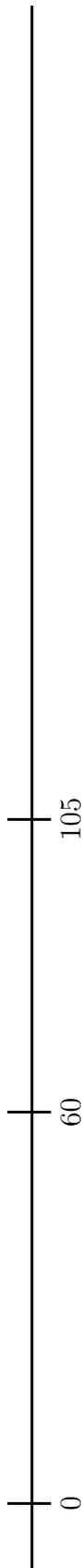
Utilise un report de longueur pour graduer la droite de 10 en 10.



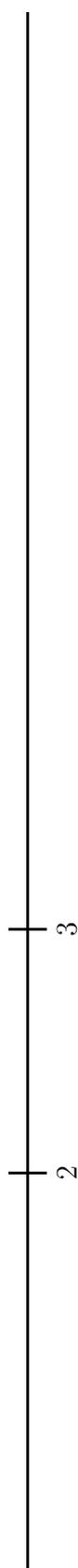
Exercice 7. Place le nombre 11 sur la droite.



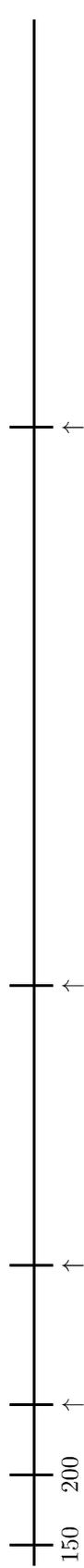
Place les nombres 45, 150 et 165 sur la droite.



Exercice 8. En utilisant deux reports de longueurs, place le nombre 6 sur la droite.



Exercice 9. Pour chaque droite ci-dessous, indique à quel nombre correspond chaque point repéré par une flèche.



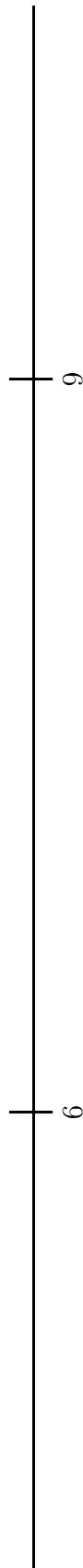
Exercice 10. Gradue la droite de 1 en 1.



Exercice 11. Place les nombres entre 5 et 10 sur la droite.



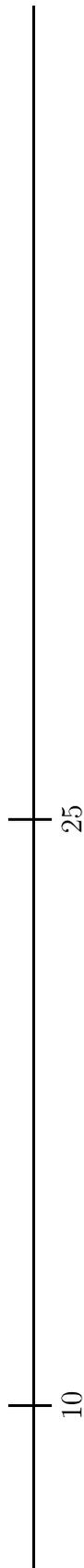
Exercice 12. Place le nombre 8 sur la droite.



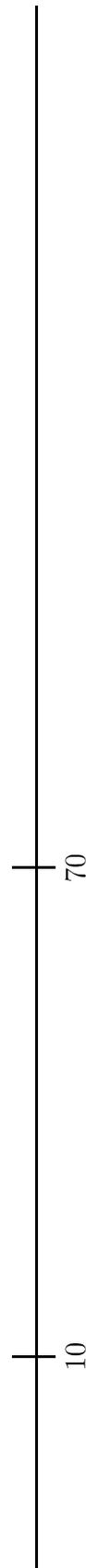
Place le nombre 9 sur la droite.



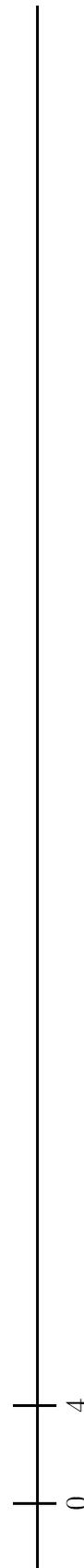
Exercice 13. Place le nombre 35 sur la droite.



Place les nombres 100 et 130 sur la droite.



Exercice 14. Place les nombres 12, 24, 28 et 34 sur la droite.



Exercice 15. Indique à quel nombre correspond chaque point repéré par une flèche.

