LA RESOLUTION D'UN PROBLEME NON ROUTINIER EN GEOMETRIE

I.R.E.M. de Montpellier

Arlette CHEVALIER
Collège de Vergèze

Sous-titre :

Mobilisation et fonctionnement de conceptions liées à divers concepts de la géométrie plane mais plus spécialement à la symétrie orthogonale, au cours de la recherche d'un problème non routinier par des élèves de différents niveaux de l'enseignement secondaire.

L'analyse présentée ici concerne des documents élaborés à l'IREM de Montpellier à l'issue d'une expérimentation menée en mai et juin 1982[1]. Cette analyse prend donc sa source dans un travail collectif important réalisé par une équipe d'enseignants en activité.

En effet depuis 1976, au sein de l'IREM de Montpellier un groupe d'une dizaine de professeurs de mathématiques enseignant dans des collèges, des lycées ou à l'université, préoccupé par les difficultés rencontrées dans l'enseignement de la géométrie au niveau des collèges et des lycées, intéressé et motivé par les travaux de l'école de Genève autour de Jean Piaget, s'est proposé d'étudier la résolution de problèmes de géométrie plane euclidienne, faite par les élèves de l'enseignement secondaire.

L'objectif poursuivi est double : il s'agit d'une part d'étudier les démarches de pensée privilégiées par les élèves lors de la résolution d'un problème, d'autre part d'étudier la formation des concepts de géométrie dans l'esprit des enfants.

(1) L'équipe était alors composée de :
G. Audibert (université), A. Augé (collège), N. Bellard (collège), R. Brunet (lycée), A. Chevalier (collège), M.T. Conejero (collège), C. Fabre (lycée), C. Gros (collège), B. Pelouzet (collège).

«petit x» n° 9 pp. 41 à 62. 1985

En 1981, après l'expérimentation de trois problèmes de géométrie plane dont l'analyse a été réalisée par Gérard Audibert[2], le groupe envisage de s'orienter vers des problèmes de géométrie dans l'espace.

Toutefois, afin de vérifier certaines hypothèses, un quatrième et dernier énoncé de géométrie plane euclidienne est élaboré : il s'agissait, au niveau des concepts, d'une part de poursuivre l'étude des transformations, en centrant le regard sur la symétrie orthogonale, d'autre part d'observer la notion d'unicité à travers l'utilisation des cas d'égalité, entrevue dans la résolution du précédent problème.

Par ailleurs, en ce qui concerne la pratique des élèves, il paraissait important, avant d'aborder les problèmes spécifiques de la géométrie dans l'espace, de vérifier et de préciser les observations faites à propos des processus élémentaires, du rôle des contradictions, de la place du dessin, de l'interaction entre démarches expérimentales et démarches déductives, de l'importance des contraintes d'équilibre, de l'élaboration de la notion de preuve et de démonstration, des problèmes posés par l'approximation...[3].

Le problème QAT est né, à la charnière de deux périodes, de cet ensemble de préoccupations et de certaines exigences que l'équipe s'est collectivement fixées pour l'ensemble des énoncés expérimentés, entre autres

— le problème s'adresse à tous les élèves de la sixième à la terminale ;

— l'énoncé du problème ne laisse pas apparaître le secteur du champ conceptuel propice à la solution : nous disons que le problème n'est pas localisé pour l'élève ;

— n'importe quel élève du secondaire comprend parfaitement, lorsqu'on le lui explique, un processus de résolution du problème ;

— l'énoncé est compris par les élèves en quelques minutes ;

— la solution n'est immédiatement évidente pour personne ;

— le problème est traité avec succès par au moins un quart des élèves et conduit à un net échec au moins un quart des élèves et ceci en une heure de recherche...

(2) AUDIBERT G. : 1982. Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane. Doctorat es sciences mathématiques - USTL Montpellier.

(3) L'analyse intégrale se trouve dans : A. CHEVALIER 1984. Le problème QAT : Symétrie, Vérification, Algorithme de construction, la pratique de l'élève. Thèse d'université USTL Montpellier.

L'expérimentation, précédée par plusieurs mois de pré-expérimentation, consite en observations individuelles d'élèves, en situation de recherche du problème, par les membres du groupe. Celle-ci a concerné 53 élèves ainsi répartis : 8 élèves de sixième, 11 élèves de cinquième, 12 élèves de quatrième, 12 élèves de troisième et 10 élèves de seconde C.

Chaque séance a duré environ 50 minutes ; elle a été enregistrée au magnétophone et a donné lieu à la rédaction d'un compte rendu très détaillé appelé PROTOCOLE. L'analyse évoquée ici concerne donc exclusivement ces 53 protocoles.

Chaque protocole est codé grâce à un mot de 3 lettres, en relation ou non avec le nom de l'élève, et un nombre de 5 chiffres évoquant d'une part la classe, d'autre part l'âge de l'élève. Ainsi, le protocole codé 6-11 ; 05 concerne un élève de sixième, âgé de 11 ans et 5 mois au moment de l'expérimentation.

L'énoncé du problème expérimenté sous le nom de «problème QAT» est le suivant :

Sur une feuille de papier calque nous avons placé quatre points I, R, E, et M. Les renseignements concernant les distances entre les quatre points et les renseignements concernant les angles obtenus à partir des quatre points sont :

$\widehat{EIM} = 35°$	$\widehat{IEM} = 14°$	$\widehat{IRM} = 16°$	$\widehat{IME} = 131°$
$\widehat{EIR} = 63°$	$\widehat{IER} = 48°$	$\widehat{IRE} = 68°$	$\widehat{IMR} = 136°$
$\widehat{MIR} = 28°$	$\widehat{MER} = 34°$	$\widehat{MRE} = 52°$	$\widehat{EMR} = 93°$

IE = 15,2 cm	IM = 4,9 cm	RE = 14,6 cm
IR = 12,3 cm	RM = 8,3 cm	EM = 11,5 cm

Quel nombre minimum de renseignements faut-il pour dessiner les quatre points sur une feuille de manière à ce qu'ils puissent coïncider avec ceux de la feuille calque ?

La réponse à ce problème est 6.

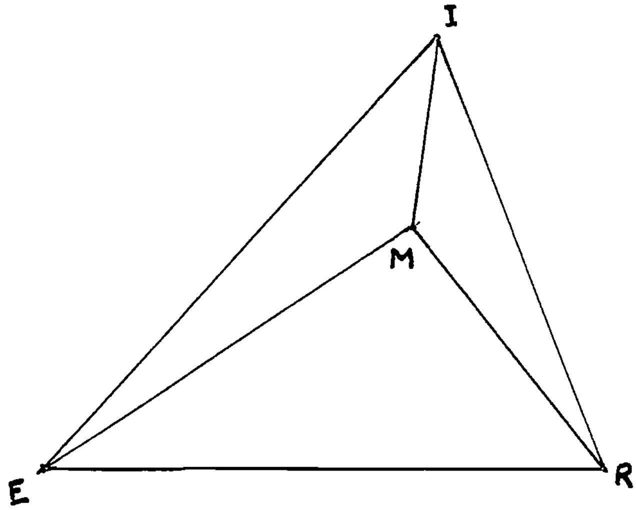
En effet, placer trois des points revient à construire un triangle en utilisant un des cas d'égalité et nécessite donc l'utilisation de trois renseignements au minimum.

Deux renseignements supplémentaires convenablement choisis permettent de déterminer deux positions possibles, symétriques, du quatrième point.

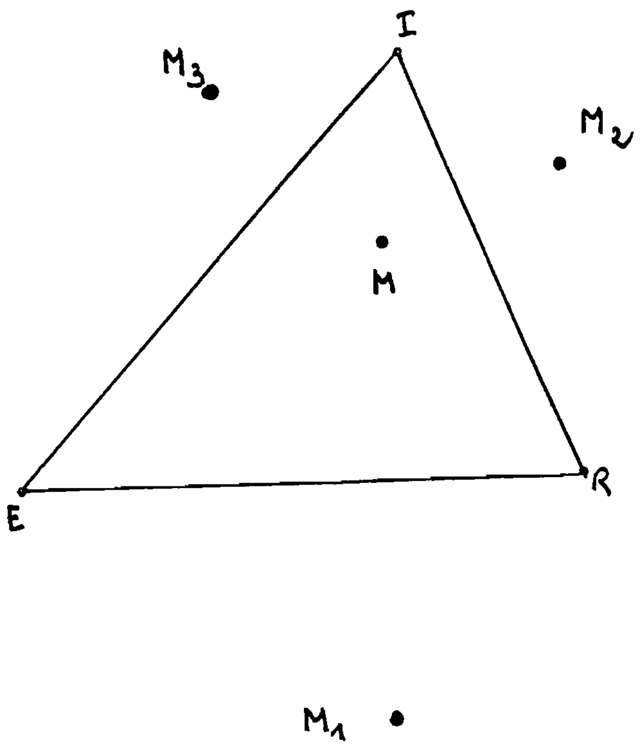
Un sixième renseignement est nécessaire pour choisir entre ces deux positions celle qui correspond à l'ensemble des données de l'énoncé.

Le minimum cherché est donc égal à 6 : il existe, en effet, deux solutions symétriques superposables par retournement, toutes deux acceptables, compte-tenu de l'utilisation du papier calque.

Voici à l'échelle 1/2 une disposition correcte des 4 points.



A titre d'illustration signalons que, pour un élève qui a d'abord placé les trois points I, R, E par exemple, l'utilisation de 5 renseignements seulement le conduit à placer le quatrième soit en M ou M_1, soit en M ou M_2, soit en M ou M_3 selon les données utilisées.



La solution présentée utilise le concept de symétrie bien que d'autres concpets, comme celui de rotation par exemple ait pu l'être aussi : ce choix a été imposé par l'observation des élèves et l'analyse des protocoles : en effet, quoique certains implicites ou certains propos très peu explicites aient pu évoquer chez l'expérimentateur, par exemple le changement d'orientation d'une rotation, chaque fois qu'un élève a fait référence de façon explicite à un concept dans ses explications c'est toujours ce concept de symétrie qui est apparu.

Citons à titre d'exemple le cas de ROB : 2-14 ; 10 qui trace dès le début de la séance un segment IE, puis l'angle $\widehat{IEM}$ et place M en disant

«mais ça peut être dans l'autre sens»

expression qui peut faire penser à un changement d'orientation d'une rotation. Mais ce même élève, un peu plus tard, précise

«pour $\widehat{IEM}$, deux possibilités, mais la figure est symétrique donc je prends M arbitraire».

Cette interprétation des procédures et des propos d'élèves est une des difficultés permanentes auxquelles nous nous heurtons au moment de l'analyse : le degré d'explicitation des faits que nous étudions est très variable, souvent insuffisant, parfois presque nul. Nous sommes donc amenés à confronter nos hypothèses avec les faits explicites et ensuite nous essayons de voir s'il n'y a pas de contradictions flagrantes entre ces mêmes hypothèses et les faits implicites qui paraissent s'y rapporter.

Dans cet article nous allons évoquer l'analyse concernant une procédure élève que l'ensemble de nos observations nous a conduit à lier à la notion de symétrie orthogonale et que nous avons de ce fait appelée SYMETRIE-ANGLE.

DEFINITION DE LA «SYMETRIE-ANGLE».

Nous dirons que l'élève utilise la symétrie-angle chaque fois que nous trouverons la procédure suivante(4) :

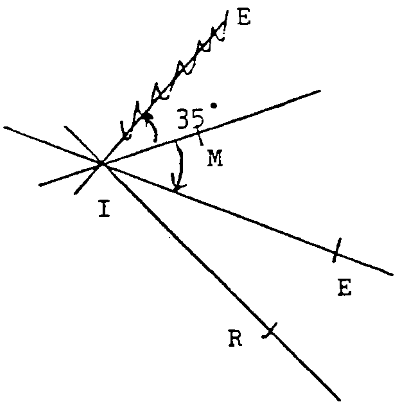
L'élève vient de tracer un angle α. Il trace alors ou il évoque seulement, l'angle α' de même mesure que l'angle α mais en position adjacente.

(4) Nos définitions de **procédures élèves** s'en tiennent strictement à la description des actions faites par les élèves ou des explications qu'ils formulent sans faire intervenir les notions mathématiques que l'expérimentateur décèle ou croit déceler.
Ainsi, ici, pour la procédure symétrie-angle, le mot symétrie apparaît dans le nom de la procédure mais il n'intervient pas dans la définition elle-même ; cette définition des procédures, aussi fidèle que possible à l'activité même des élèves, sans aucune interprétation de l'observateur, nous apparaît comme très importante pour la suite de nos travaux expérimentaux. Toutefois, elle se révèle souvent comme très difficile et susceptible de modifications ultérieures.

α et α' peuvent

a. être dessinés adjacents sur la même figure.

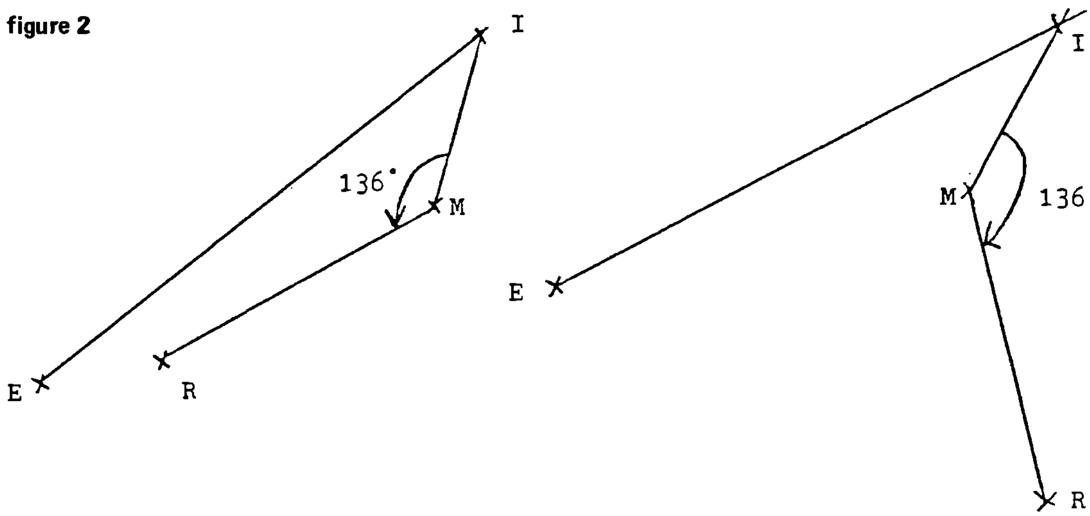
figure 1



[HEL (4-14 ; 03)] deux angles $\widehat{MIE}$ symétriques adjacents.

b. être dessinés successivement dans deux figures différentes.

figure 2



[RIS (3-14 ; 04)]

c. rester à l'état d'image mentale mais alors une phrase est prononcée.

Ainsi ROB, dans le protocole 2-14 ; 10 trace dès le début de séance un segment IE, puis l'angle $\widehat{IEM}$ et place M en disant «mais ça peut être dans l'autre sens».

Il évoque ainsi la position symétrique de l'angle $\widehat{IEM}$ par rapport à la droite IE, ce qui est confirmé par l'explication donnée quelques minutes plus tard comme nous l'avons dit précédemment.

Un exemple.

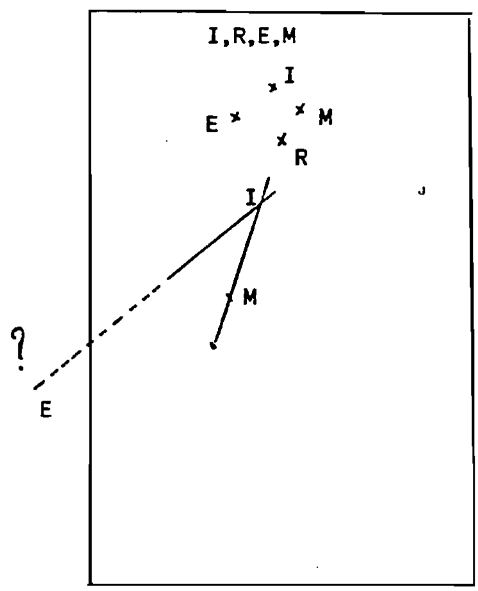
Afin de comprendre comment apparaît cette symétrie-angle, examinons le protocole 3-14 ; 04 qui relate le travail de RIS.

L'élève commence à tracer, à main levée, quatre points qu'elle appelle I, R, E, M et elle déclare

«C'est juste pour voir dans quel ordre il faut faire la figure».

Elle prend alors les instruments de dessin. La première donnée est $\widehat{EIM} = 35°$; elle trace un angle de 35° de sommet I, place sur un côté le point M tel que IM = 4,9 cm mais elle manque de place pour mettre sur l'autre côté le point E tel que IE = 15,2 cm, comme le montre la figure 3 représentant à l'échelle 1/4 la feuille de l'élève.

figure 3



Elle prend alors une autre feuille et recommence en plaçant le point I plus à droite. Elle trace l'angle $\widehat{EIM}$ puis place les points I et E. Elle construit en M un angle de 136° et place le point R tel que MR = 8,3 cm.

Elle constate alors, sans effectuer de mesure, que ER est bien inférieur à 14,6 cm et déclare :

«Ça ne va pas. ER devrait faire 14,6 cm... ça ne peut pas aller !».

figure 4

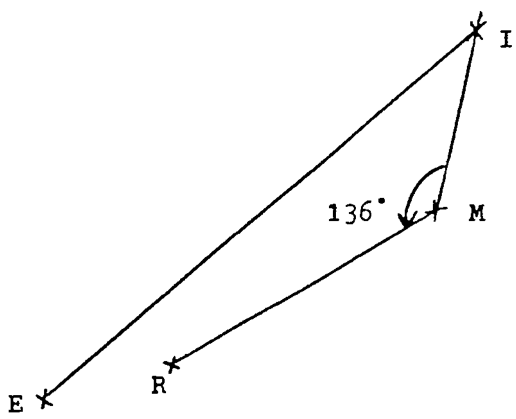
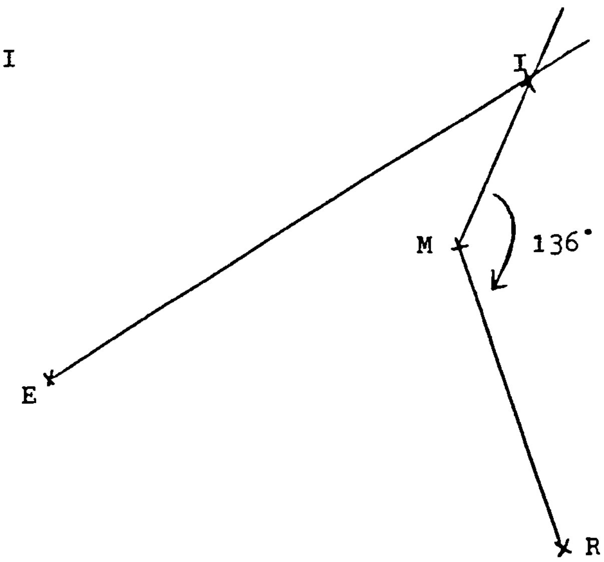


figure 5



Le dessin obtenu par RIS est représenté par la figure 4. Il s'agit d'une figure primé[5] le quatrième point, ici R, est mal placé.

RIS reste pensive puis demande :

– Il faut que ça fasse un rectangle ? Elle fait avec le doigt le geste de dessiner un quadrilatère.

L'expérimentateur ayant précisé qu'il s'agit «de quatre points, sans autre précision», l'élève prend une nouvelle feuille et recommence un nouveau dessin.

De la même façon que précédemment, elle place les points I, M et E puis dit :

– «Ce coup-ci je fais 136° de l'autre côté», et elle termine la figure en plaçant R tel que MR = 8,3 cm, comme l'indique la figure 5.

Elle trace alors ER, le mesure et dit :

– «Je crois que c'est ça».

La figure est en effet correcte cette fois !

L'expérimentateur ayant rappelé la question posée, l'élève fait le compte des éléments utilisés, répond six puis sept et corrige presque immédiatement pour conclure six.

(5) Nous appelons figure-prime une figure correctement construite mais dont le quatrième point est symétrique de la position qu'il devrait occuper par rapport à un des côtés du triangle déterminé par les trois premiers points.

Elle récapitule alors en disant :

— «j'ai fait l'angle de 35°, après M et E, après l'angle de 136° puis R et j'ai vérifié ER. ER il le faut ; c'est à cause de l'angle pour savoir si on le fait d'un côté ou de l'autre. Au début, je l'avais fait dans le mauvais sens».

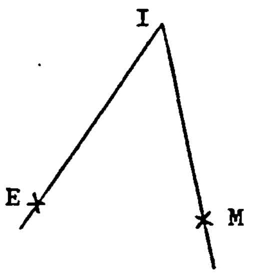
L'expérimentateur propose alors le problème général et demande si, dans le cas de quatre points quelconques, il faut toujours six renseignements.

L'élève après une hésitation, déclare qu'elle peut toujours faire sa méthode et elle l'expose :

— «Bon, on fait un angle, par exemple $\widehat{EIM}$ puis on met M et E. Là, c'est toujours bon, on peut faire cette figure où on veut».

Elle trace la figure 6 sans prendre de mesures.

figure 6



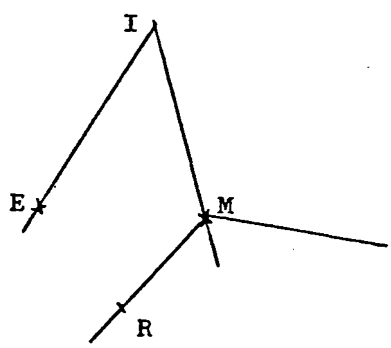


figure 7

Et elle poursuit :

— «c'est là. Pour l'angle $\widehat{IMR}$ on a le choix : d'un côté ou de l'autre. Puis, on met R et on mesure ER. Si c'est pas bon, on prend l'autre».

Elle obtient alors la figure 7.

L'examinateur demande alors si on peut prendre d'autres ensembles de six éléments et RIS poursuit sa recherche pendant quelques minutes en envisageant deux autres cas.

Nous constatons que l'élève RIS fait intervenir deux fois la symétrie-angle pendant sa recherche.

Pour la figure 4 elle aboutit à une contradiction observée ER $<$ 14,6 cm. Elle construit alors dans la figure 5 l'angle $\widehat{IMR}$ dans une position symétrique de celle qu'il occupe dans la figure 4 par rapport à la droite (IM), et elle obtient ainsi une figure correcte.

Dans la figure 7 qui explicite le raisonnement, elle trace deux angles $\widehat{IMR}$ adjacents, symétriques par rapport à leur côté commun IM.

UTILISATION DE LA SYMETRIE-ANGLE.

Cette procédure que nous appelons symétrie-angle apparaît dans seize protocoles sous des formes variables que nous allons décrire rapidement.

a) Deux élèves évoquent la possibilité d'une position symétrique dès le premier angle tracé.

Ainsi, dans le protocole 6-11 ; 07, l'élève RIV, dès le début dit :

«je vais essayer de faire le dessin. Je dessine l'angle $\widehat{EIM}$».

Il trace une demi-droite Ix, prend le rapporteur et dit «je ne sais pas de quel côté le tracer».

Il hésite, dessine cependant une demi-droite Iy telle que $\widehat{xIy} = 35°$ et place les points E et M.

Jusqu'à la fin de sa recherche, il n'est plus du tout question de symétrie et il répond 5 à la question posée après avoir placé le quatrième point par hasard de façon correcte.

Dans le protocole 2-14 ; 10, l'élève ROB, lui-aussi, dès le début de la séance trace IE, puis $\widehat{IEM}$ enfin M et dit :

«mais ça peut être dans l'autre sens».

Contrairement à RIV dont nous venons d'évoquer le travail, ROB retrouve cette procédure plus tard.

Au moment de réaliser son troisième dessin, il déclare «pour $\widehat{EIM}$ deux possibilités mais la figure est symétrique donc je prends M arbitraire».

La réponse définitive, en fin de recherche est formulée ainsi : «en théorie, cinq informations les longueurs : on obtient deux figures symétriques par rapport à (IE)».

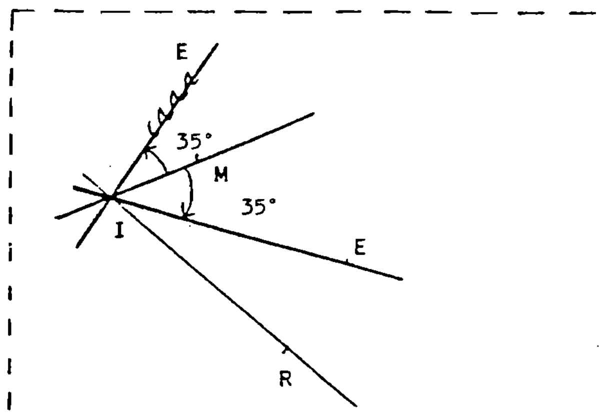
b) Une élève HEL dont le travail est relaté dans le protocole 4-14 ; 03 pense à la notion de symétrie à cause des dimensions de la feuille.

Quand elle réalise son deuxième dessin, elle trace IM, l'angle $\widehat{MIE}$ puis s'apprête à placer le point E mais elle manque de place et elle dit alors :

«je prends dans l'autre sens, puisque j'ai plus de place ; j'inverse».

Elle trace à ce moment là, sur la même figure, une demi-droite [IE), symétrique de la première par rapport à la demi-droite [IM) en dessinant un angle de 35° de l'autre côté de IM et elle termine en traçant l'angle $\widehat{EIR}$ comme le montre la figure 8 où les pointillés représentent deux bords de la feuille de l'élève.

figure 8



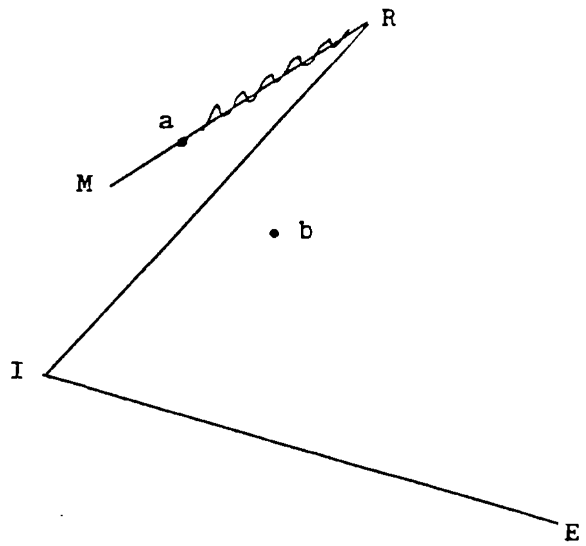
Nous pouvons remarquer que dans dix autres protocoles, nous retrouvons une situation semblable lors de la construction des trois premiers points mais, seule l'élève HEL citée ci-dessus fait intervenir la symétrie-angle pour arriver à placer le troisième point ; tous les autres renoncent à terminer la figure commencée et prennent une nouvelle feuille comme le fait d'ailleurs l'élève RIS dont nous avons relaté le travail précédemment.

c) Dans d'autres protocoles, nous trouvons cette procédure symétrie-angle à des stades très différents de maîtrise depuis l'élève RIS dont nous avons précédemment résumé le protocole 3-14- ; 04 et qui manifeste une bonne prise de conscience jusqu'à l'élève ALD qui après avoir évoqué les deux positions de l'angle qu'il construit, y renonce définitivement à cause de son champ de contraintes.

Examinons rapidement cette démarche décrite dans le protocole 5-12 ; 00.

L'élève construit une première figure à l'aide des instruments de dessin ; dans un premier temps, il place correctement les trois points E, I et R. Il entreprend alors la construction de l'angle $\widehat{IRM}$ de 17° : il place le rapporteur au-dessus du segment IR et marque le repère «a» en face de la graduation 17 ; il fait de même en plaçant le rapporteur au-dessous du segment IR et obtient le repère «b» comme l'indique la figure 9.

figure 9



Il demande à l'examinateur :

«est-ce que c'est possible que la figure soit fermée, que ça parte par là (il montre la direction Rb)».

L'examinateur répond qu'il ne peut pas fournir de renseignements.

ALD trace alors la demi-droite Ra et place le point M. Il mesure alors la distance EM et dit :

«c'est faux parce que la distance est 11,5 et là c'est 16 (dans l'énoncé, on trouve ER = 11,5 cm). Je peux avoir une autre feuille ?».

La contrainte concernant la forme du quadrilatère est si forte que jusqu'à la fin de la recherche, en dépit de toutes les contradictions observées, ALD n'évoque plus cette procédure symétrie-angle et ne parvient pas à construire les quatre points corrects.

Entre ces deux cas extrêmes, nous trouvons des élèves qui maîtrisent plus ou moins bien cette symétrie-angle.

Examinons par exemple le travail de FRE décrit dans le protocole 6-12 ; 03.

L'élève, pour son deuxième dessin place les points I et M tels que IM = 4,9 cm puis le point E tel que $\widehat{EIM} = 35°$ et IE = 15,2 cm et enfin R à l'aide de $\widehat{EIR} = 63°$ et IR = 12,3. Il a construit l'angle $\widehat{EIR}$ adjacent à l'angle $\widehat{EIM}$.

Il vérifie alors l'angle $\widehat{MIR}$ et trouve 98° au lieu de 28°, puis la distance RM et trouve 13,8 cm au lieu de 8,3 cm et enfin la distance RE qui est conforme à la donnée : 14,6 cm.

Il conclut donc, en observant son dessin représenté par la figure 10.

«ah là, c'est juste, donc c'est le point M qui est mal placé».

figure 10

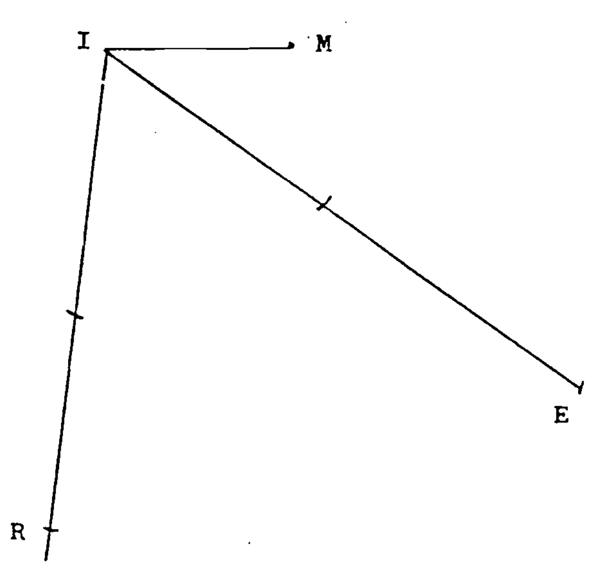
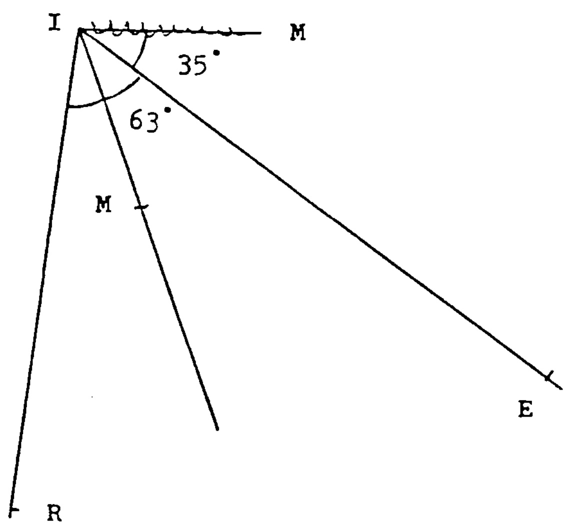


figure 11



Il effectue d'autres mesures, hésite, et déclare à nouveau en montrant le point M :

«c'est celui-là qui est mal placé».

Il trace alors, sur la même figure, un angle $\widehat{EIx}$ symétrique de $\widehat{EIM}$ par rapport à la demi-droite IE, il place un nouveau point M, effectue une vérification sur RM et dit «oui, c'est ça» et il hachure le premier segment IM tracé.

Il vient donc d'obtenir un dessin correct représenté par la figure 11.

A la fin de sa recherche, au moment du décompte des renseignements nécessaires, FRE explique :

«il faut obligatoirement les longueurs de I à M, de I à E, de I à R. Après le premier angle $\widehat{MIE}$, après l'autre angle $\widehat{MIR}$ ou alors $\widehat{EIR}$ donc il en faut 5. La réponse c'est cinq».

De la même façon en classe de seconde, ISA dont nous relatons la recherche dans le protocole 2-15 ; 05, obtient pour la première figure, une figure prime. Elle passe alors aux vérifications et dit :

figure 12

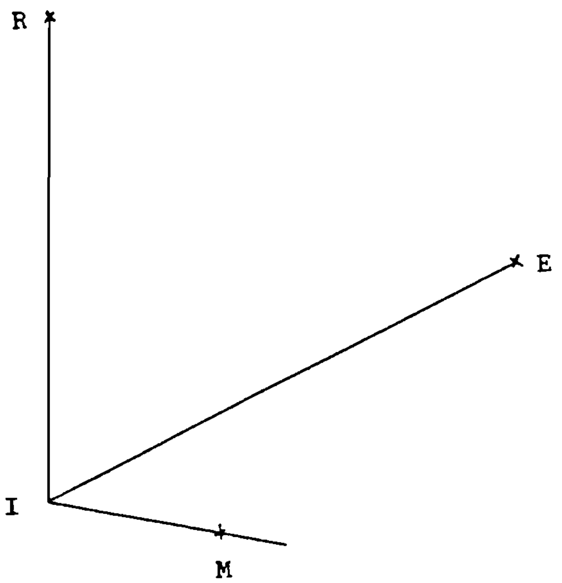
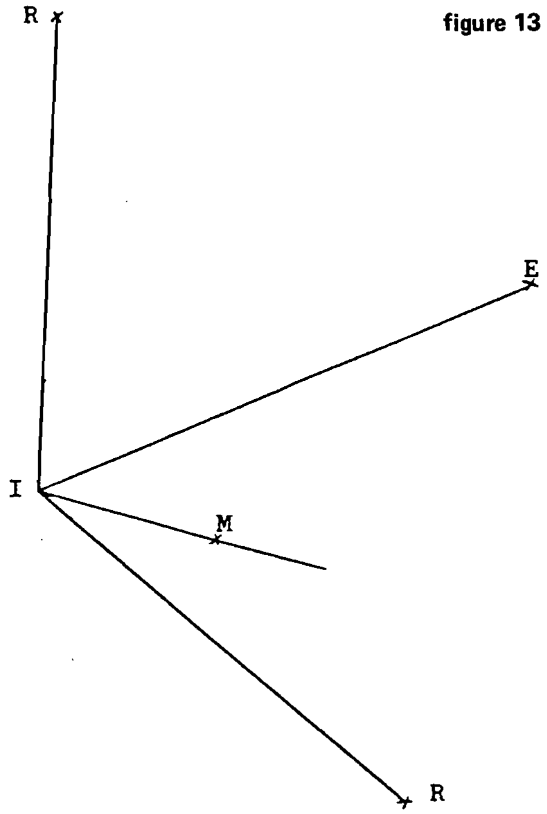


figure 13



«je mesure $\widehat{MIR}$ et je regarde si ça marche... 28°... ça marche pas ; j'ai dû mal disposer le point parce que...».

Elle a, en effet, lu $\widehat{MIR} = 28°$ sur la feuille de données et sur son dessin elle trouve plus de 90°.

Sans hésiter, sur le même dessin, elle construit un deuxième angle $\widehat{EIR}$, symétrique du premier par rapport à la demi-droite IE et elle déclare :

«si je mets l'angle $\widehat{EIR}$ ici, au lieu de le mettre là-dessus, avec IR ici, comme je l'avais mis, j'obtiens l'angle de 28° $\widehat{MIR}$, comme on l'a donné».

Elle a donc obtenu en définitive un dessin correct représenté par la figure 13.

Elle trace le segment EM et mesure l'angle $\widehat{IEM}$ en disant :

«$\widehat{IEM}$ fait 14°. Je regarde si ça marche... ça marche».

A la fin de sa recherche, lors du décompte du nombre de renseignements, l'élève explique :

«pour tracer le triangle IER, il me semble qu'il faut trois données, je ne vois pas comment on ferait avec moins de données et ensuite pour le point M on peut le situer

par rapport à un des points du triangle, c'est-à-dire en donnant une longueur et un angle ou alors deux angles».

FRE, en classe de sixième, et ISA, en classe de seconde, utilisent donc une même démarche que nous retrouvons aussi dans les protocoles 6-12 ; 02 ; 4-14 ; 07 ; 4-14 ; 09 et 2-15 ; 00.

Six élèves, après une contradiction analysée sur une figure prime utilisent la procédure symétrie-angle pour obtenir la figure correcte, mais lors du décompte des renseignements, ils oublient le rôle joué par la symétrie dans la détermination du quatrième point et ils ne donnent pas la réponse exacte.

D'autres élèves ayant pris conscience du rôle joué par la symétrie dans cette construction, l'utilisent dès le premier angle tracé, c'est-à-dire dès la détermination du troisième point.

Examinons par exemple le travail de BEN décrit dans le protocole 3-13 ; 11.

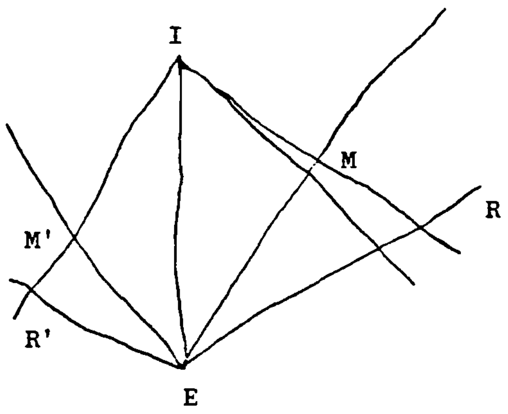
BEN, après une contradiction observée sur sa première figure, qui est une figure prime, réfléchit pendant quelques minutes en faisant des dessins à main levée.

Au bout de trente minutes de recherche, elle dit :

«oui, mais pour les angles, si vous voulez, il y a deux directions possibles, si on le place le machin comme ça, on aura un point qui sera dans ce sens et si on place le rapporteur dans l'autre sens on aura le point de l'autre côté. Avec un angle, à partir d'un point, on a deux directions possibles... Le problème c'est qu'avec les angles on ne peut pas n'en utiliser qu'un à chaque fois...».

Elle réalise le dessin à main levée représenté par la figure 14.

figure 14



Elle explique tout en le traçant

«on peut faire le point M d'un côté ou de l'autre et pour le point R c'est pareil».

Elle construit cette figure correctement, à l'aide des instruments et conclut que **«c'est symétrique par rapport à cette droite EI»** et elle décompte cinq renseignements seulement.

Dans le protocole 2-14 ; 10, l'élève ROB lui aussi utilise la symétrie-angle dans la détermination du troisième point ; examinons sa procédure.

Pour la construction de la troisième figure, il trace EI et dit :

«je prends IE arbitraire. Pour $\widehat{EIM}$ deux possibilités mais la figure est symétrique donc je prends M arbitraire» et lors du décompte, ROB conclut : «en théorie, cinq informations, les longueurs ; on obtient **deux figures symétriques** par rapport à IE».

Ces deux élèves qui utilisent des procédures très proches n'en sont cependant pas au même stade de prise de conscience du rôle de la symétrie.

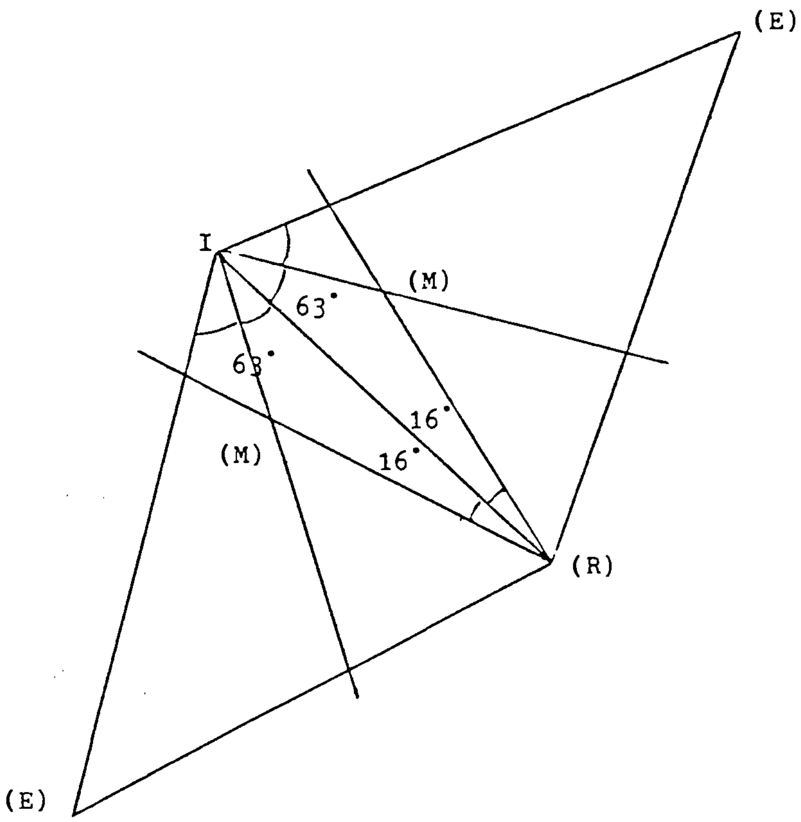
ROB, dans le protocole 2-14 ; 10, utilise certes la symétrie-angle dans la détermination des troisième et quatrième points mais il s'aperçoit que la première symétrie donne deux figures isométriques alors que la deuxième donne deux figures non isométriques.

BEN, dans le protocole 3-13 ; 11, n'a pas conscience du rôle différent joué par la symétrie dans la détermination des troisième et quatrième points.

Comme elle, l'élève OLI, rencontre des difficultés dans l'utilisation de cette procédure comme l'attestent ces réflexions relevées dans le protocole 6-12 ; 00.

«Je ne sais pas, parce que si je mets M d'un côté, E sera du même côté, si je mets M de l'autre côté, E sera là ; on ne saît pas de quel côté ils sont...» Il raisonne sur le dessin représenté par la figure 15.

figure 15



Après quelques comparaisons de longueurs qu'il effectue en espérant déceler des différences qui lui permettraient d'opter pour une des deux figures, il conclut :

«je ne suis pas plus avancé, tout est pareil. J'ai deux solutions... les indications ne suffisent pas» et pour conclure sa recherche il dit enfin

«on peut le trouver avec cinq renseignements mais quand on prend les points I et E, il faut mettre ceux qui coïncident avec».

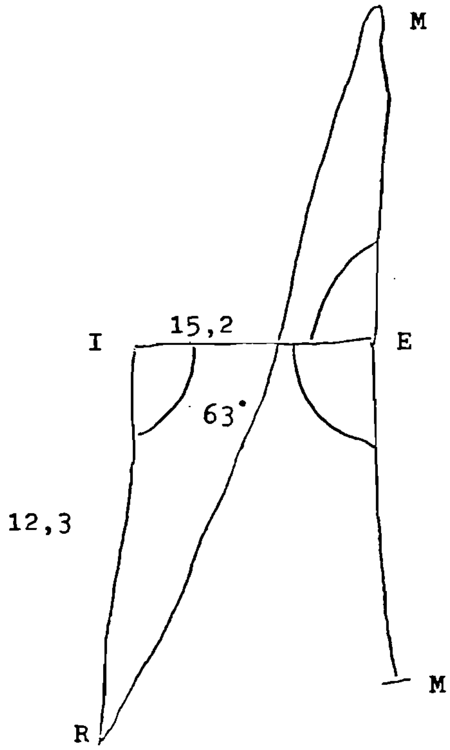
Trois élèves, enfin, parviennent à la réponse correcte «six renseignements» après une utilisation de la symétrie-angle plus ou moins parfaitement maîtrisée.

Examinons successivement leur démarche

NIC, dans le protocole 3-14 ; 09, réfléchit longuement en traçant des dessins à main levée. Après cinq dessins, il est parvenu à la réponse «cinq» qui paraît se confirmer dans son esprit. Au sixième dessin représenté par la figure 16, toujours à main levée, il place d'abord les trois points I, R, E et il s'apprête à placer le point M en utilisant l'angle $\widehat{IEM}$; il dit :

«le point M peut être aussi bien de ce côté que de l'autre ; il faudrait la distance RM pour bien m'assurer que c'est de ce côté ou de ce côté».

figure 16



Il demande alors des instruments pour réaliser un dessin précis et finit par conclure :

«c'est six... il en faut bien six. C'est bien dommage, c'est embêtant. Au début, je me suis planté parce que j'ai eu en tête que c'était un quadrilatère I, R, E, M alors que ça pouvait se tordre».

L'expérimentateur demande alors à l'élève s'il est bien sûr de son résultat et NIC répond :

«non, je suis sûr de rien».

Il entreprend alors un autre dessin, interrompu par la fin de la séance.

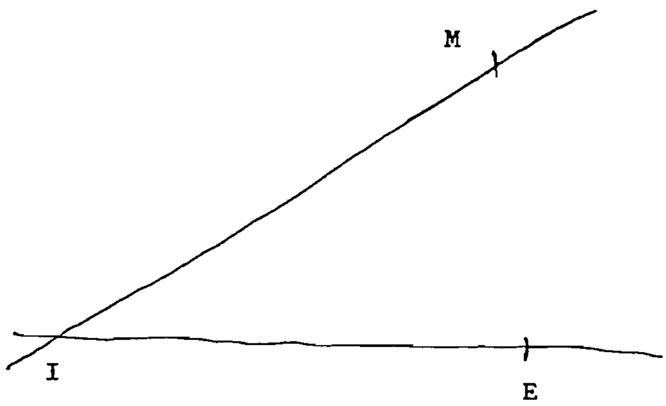
BOM dont le travail est relaté dans le protocole 2-16 ; 01, a déjà réalisé deux dessins à main levée quand il conclut à la onzième minute.

«Pour avoir deux points, il me faut un renseignement. Pour avoir le troisième point, il me faut deux renseignements de plus, ça fait trois. Et le quatrième point, il faut que je le localise au moins par rapport à deux points, donc deux renseignements de plus aussi. Donc, il faut au minimum cinq renseignements».

L'expérimentateur demande alors à l'élève s'il est bien sûr de pouvoir tracer les quatre points sans ambiguïté avec ces cinq renseignements.

L'élève BOM commence alors un troisième dessin, à main levée toujours. Il trace un angle, le nomme $\widehat{EIM}$ et place les points M et E sans tenir compte des distances comme le montre le dessin représenté par la figure 17.

figure 17



BOM dit :

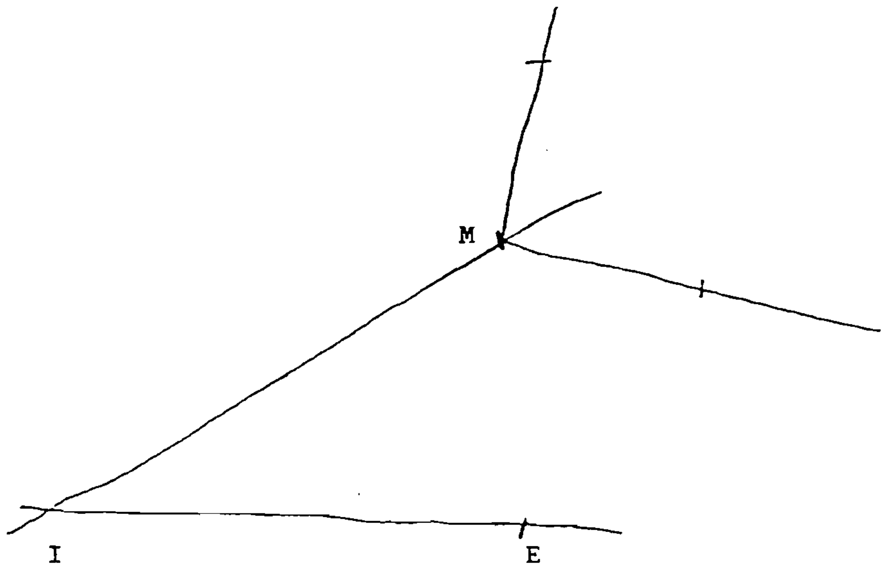
«de toute façon là on a l'angle $\widehat{EIM}$, là $\widehat{IEM}$, les trois points sont localisés sur des droites, c'est pas possible de se tromper là. Les points E ou M, selon la demi-droite sur laquelle ils sont... là je pense que ça n'a pas très grande importance... parce que le quatrième point dépendra de la position des deux autres. Là, je ne pense pas que ça change. Donc, il faut une distance pour trouver le point M. On n'a pas besoin de savoir sur quelle droite est E, sur quelle droite est M».

Comme l'élève ROB dans le protocole 2-14 ; 10, BOM manifeste ici une bonne maîtrise du rôle de la symétrie-angle dans la détermination du troisième point.

A la quatorzième minute, il s'interroge sur la position du quatrième point et il dit :

«pour trouver le quatrième point, je peux prendre un angle. C'est là qu'il y a plusieurs possibilités. Si je prends par exemple l'angle $\widehat{IMR}$, 136°, il pourra être comme ça, il pourra être comme ça. Là il y a déjà deux possibilités. En disant cela il termine le dessin commencé avec l'angle $\widehat{EIM}$, comme l'indique la figure 18.

figure 18



Il conclut donc :

Voilà il faudrait donc un renseignement de plus.

Peu sûr de son résultat, il fait diverses tentatives utilisant parfois les distances à la place des angles et à la quarante cinquième minute, il dit à propos du quatrième point :

«c'est pareil, étant donné que c'est symétrique. Il me faudrait toujours un autre renseignement pour savoir lequel des deux points c'est.

Le dessin me trompe. Je n'aurais pas du faire les deux, la symétrie, puisque c'est pareil. Je suis en train de m'embrouiller avec ça. Je vais refaire un dessin».

Il effectue, en effet, un autre dessin et donne sa réponse définitive :

six ; et il écrit au bas de la dernière feuille utilisée 1 + 2 + 3 soit 6 rappelant ainsi qu'il faut un renseignement pour déterminer les deux premiers points, deux autres renseignements pour le troisième point et enfin trois renseignements supplémentaires pour fixer le quatrième point.

Examinons enfin le cas de l'élève LAU dans le protocole 4-14 ; 04.

Après avoir eu divers ennuis techniques d'utilisation du rapporteur entre autres, pour ses dessins de la première feuille, LAU prend une deuxième feuille et commence un nouveau dessin.

Il place correctement les points I, E et M en utilisant l'angle $\widehat{EIM}$ et les distances IE et IM. Il vérifie que ME mesure bien 11,5 cm et dit :

«c'est juste, je vais tracer l'angle $\widehat{EIR}$».

Par hasard, il choisit pour cet angle la position correcte mais pris de doute, il dit :

«j'ai dû me tromper de côté».

Il pense donc à ce moment là à une autre position possible de l'angle. Il vérifie la distance RM qui lui donne satisfaction à un millimètre près. Il abandonne donc l'idée d'une autre position pour le point R.

L'expérimentateur lui rappelle alors l'énoncé et pour répondre LAU refait exactement le même dessin, au-dessous du précédent en comptant au fur et à mesure les renseignements utilisés.

«Il faut IE, l'angle $\widehat{EIM}$, la longueur IM, l'angle $\widehat{RIE}$, la longueur IR, c'est tout. Ça fait cinq renseignements. C'est tout, j'ai pas besoin d'autre chose... ah... non ! parce que cet angle, $\widehat{EIR}$, je peux le mettre de l'autre côté. Ça fait six renseignements».

Ces trois élèves maîtrisent suffisamment cette procédure symétrie-angle pour la faire intervenir tous trois dans leur réponse numérique mais seul l'un d'entre eux, BOM, utilise le mot symétrie.

CONCLUSIONS.

– Les analyses que nous venons de faire concernant seize protocoles permettent de dire que cette procédure, nommée par nous «SYMETRIE-ANGLE» apparaît chez certains élèves, quel que soit leur niveau scolaire de la sixième à la seconde.

– Bien que certains propos peu explicites du type «dans l'autre sens», «de l'autre côté...», «j'inverse...» puissent faire penser à la notion de rotation par exemple, tous les explicites fournis par les élèves lient cette procédure au concept de symétrie et chez un même élève ces explicites interviennent après l'utilisation des expressions ci-dessus qui peuvent paraître ambiguës.

Rappelons certains cas.

ROB (2-14 ; 10) dit au début «ça peut être **dans l'autre sens**» mais plus tard il précise «la figure est **symétrique**».

BEN (3-13 ; 11) commence par dire «mais pour les angles si vous voulez, il **y** a **deux directions** possibles ; si on place le machin comme ça on aura un point qui sera dans **ce sens** et si on place le rapporteur dans l'autre sens, on aura le point de **l'autre côté...**», pour conclure à la fin de la séance en disant «**c'est symétrique** par rapport à cette droite EI».

BOM (2-16 ; 01) explique dans la première partie de la séance «pour trouver le quatrième point je peux prendre un angle. C'est là qu'il y a plusieurs possibilités. Si je prends par exemple l'angle $\widehat{IMR}$, 136° il pourra être **comme ça** ou il pourra être **comme ça** : là il y a déjà deux possibilités».

Mais plus tard il précise :

«là, pour l'angle j'aurais eu deux possibilités mais le dessin aurait été **inversé**, c'est tout...» et quelques secondes plus tard «ç'aurait été exactement le même dessin, le symétrique avec l'axe IE. Sinon, c'est exactement pareil».

Ce sont ces constatations qui nous ont conduits à faire paraître le mot SYMETRIE dans le nom de cette procédure.

— Cette procédure apparaît chez les plus jeunes de nos élèves sous la forme d'une simple pratique sans relation avec le concept de symétrie dont la prise de conscience et une certaine maîtrise ne se manifestent qu'à partir de la classe de 3ème : l'**action** précède le **concept**, qui n'est pas acquis à la fin de la classe de seconde.

— Signalons par ailleurs que cette procédure n'est pas la seule utilisée par les élèves, en relation avec le concept de symétrie. Pour la détermination du quatrième point, huit élèves par exemple, en utilisent une autre que nous avons nommée «symétrie-compas» et définie ainsi :

«l'élève construit, ou évoque seulement, deux arcs de cercle ainsi que les deux points d'intersection de ces arcs».

Les élèves imaginent des constructions de figures symétriques adaptées au problème auquel ils sont confrontés : dans un précédent problème[6] c'était le retournement et la symétrie-technique, ici, dans le problème QAT c'est la symétrie-angle et la symétrie-compas ; dans tous les cas il s'agit essentiellement d'une **pratique** dans laquelle la **conservation** de certaines mesures joue un rôle fondamental.

Comme pour la symétrie-technique et le retournement, les procédures de symétrie-angle et de symétrie-compas ne sont généralement identifiées ni entre elles ni avec le concept de symétrie, mais l'étude de certains protocoles montre que leur identification est en corrélation étroite avec la constitution du concept.

— Alors que la symétrie orthogonale est étudiée dès la classe de 4ème comme transformation, dans le problème QAT nous constatons que les quatre élèves qui

(6) Problème PEN analysé par G. Audibert, cf. note (2).

seuls utilisent le vocabulaire attaché à cette notion, l'utilisent essentiellement pour constater la symétrie de la figure observée. Ils disent par exemple :

«la figure est symétrique...» ;
«on obtient deux figures symétriques par rapport à IE...».

Il s'agit, pour ceux qui évoquent la symétrie, de la notion statique de symétrie d'une figure et non de la notion dynamique de transformation qui leur est enseignée.

— Rappelons enfin que les élèves de 4ème, 3ème, 2ème soit les deux tiers des élèves observés avaient étudié en classe la symétrie orthogonale, or nous n'avons trouvé trace du vocabulaire attaché à ce concept que chez quatre d'entre eux.

Ce concept et le vocabulaire qui lui est lié n'ont donc pas un statut d'outil pour l'élève du premier cycle ou de la classe de seconde, en situation de recherche. Il semble donc raisonnable de faire l'hypothèse qu'un concept, au tout début de sa formation, ne devient un outil efficace dans la résolution de problèmes que plusieurs années après, ce qui peut expliquer les énormes difficultés rencontrées par les élèves en fin de premier cycle pour formuler des démonstrations.

— Les différentes observations rappelées ci-dessus nous suggèrent certaines remarques pédagogiques.

L'étude théorique des isométries et de la symétrie orthogonale en particulier, dans le premier cycle, pourrait s'appuyer sur la pratique des élèves et plus précisément sur la confrontation entre les différentes procédures qu'ils utilisent spontanément du type symétrie-angle, retournement... (cette liste n'étant pas limitative car elle varie selon le problème proposé).

Par ailleurs, être exigeant quant à l'utilisation des isométries par les élèves du premier cycle pour l'élaboration de démonstrations, paraît prématuré.

Il faudrait évidemment étayer ces hypothèses par une expérimentation didactique qui sort du champ de cette étude, et par la confrontation avec d'autres travaux.