# GRANDEURS ET RELATIONS ALGEBRIQUES : PRATIQUE COURANTE DES ETUDIANTS EN PHYSIQUE

Laurence VIENNOT
L.D.P.E.S.
Université de Paris 7

## I – INTRODUCTION.

Une difficulté essentielle marque l'introduction de l'algèbre : un symbole littéral peut être associé à un ensemble de nombres et non plus seulement à un nombre unique. Et, corrélativement, deux symboles littéraux différents, x et y, peuvent se trouver associés à un même nombre, sans pour autant perdre leur identité. Ce découplage du symbole et du nombre est un seuil conceptuel qui ne se franchit ni aisément ni en une seule fois (1, 2).

Les lignes qui suivent concernent les étudiants dont on peut considérer, a priori, qu'ils ont franchi cette étape : étudiants en fin d'études secondaires ou en début d'études supérieures, ils manient des symboles algébriques depuis plusieurs années. Leurs études de physique, en particulier, les ont amenés à associer ces symboles à des **grandeurs** de dimensions variées, susceptibles de prendre des valeurs numériques positives ou négatives. L'usage du symbole littéral n'est donc plus un problème, mais il reste à savoir jusqu'où va la maîtrise du calcul algébrique et surtout la compréhension de sa signification. L'article qui suit envisage cette question, en se centrant plus particulièrement sur l'aspect «positif-négatif». En effet, il s'agit sans doute là du second seuil décisif dans la compréhension du calcul algébrique. On observera, à travers les résultats d'enquête qui suivent, que cette question n'est pas réglée pour un grand nombre de bacheliers scientifiques.

## II – CE QU'IL FAUT AVOIR COMPRIS.

Remarquons d'abord que les règles qui président au maniement des grandeurs et relations algébriques, en physique par exemple, ne sont pas explicitées si souvent auprès des élèves. On peut ainsi les résumer.

«petit x» n° 9 pp. 29 à 39. 1985

- **Grandeurs algébriques.**

A chaque grandeur considérée on affecte un symbole auquel sera associé, pour chaque état du système physique étudié, un nombre ou «valeur numérique». Mais pour que ce symbole ait un sens et que l'attribution de la valeur numérique se fasse sans ambiguïté, il faut spécifier complètement le code utilisé pour retranscrire les faits physiques, en d'autres termes donner une définition complète du symbole. Ceci implique un choix d'unités (nous ne développons pas ici cet aspect dimensionnel) et la spécification de tous les moyens de codage de type «orientation». Ainsi, dans une perspective algébrique, le symbole i ne désigne complètement l'intensité d'un courant électrique que si la direction des courants positifs est précisée. De même la «position x» ne désigne rien si un axe muni d'une origine et d'un vecteur unitaire n'est associé à cette définition. Un peu moins trivialement, «le travail» échangé entre deux systèmes A et B ne peut désigner une grandeur algébrique si l'on ne décide de parler précisément du travail exercé par A **sur B** (ou vice-versa) et de s'y tenir.

La réalité physique ne dicte donc pas, à elle seule, des nombres algébriques, et selon le codage choisi on pourra parler pour un même système, d'une intensité i positive ($i > 0$) ou négative ($i < 0$), d'une «puissance reçue» positive ou négative, etc. On traduit habituellement cela en disant que les valeurs numériques de grandeurs physiques dépendent des conventions de signe incluses dans leur définition.

- **Relations algébriques.**

L'écriture des lois physiques, qui sont des relations entre de telles grandeurs, peut donc a priori dépendre de ces conventions. On écrira par exemple $V_A - V_B = Ri$ ou $V_A - V_B = -Ri$, selon la convention choisie pour i. Mais une fois tous les symboles complètement définis, l'expression d'une relation telle que $V_A - V_B = Ri$ est déterminée, et insensible aux situations physiques particulières ne différant que, par exemple, par le sens courant.

Valeurs numériques de grandeurs physiques et relations algébriques n'ont donc pas les mêmes «sensibilités» : les premières dépendent de la réalité physique et des conventions de codage, les secondes ne dépendent, à l'intérieur de leur domaine de validité, que des conventions de codage.

## III – GRANDS TRAITS DE LA PRATIQUE COURANTE.

Ces caractéristiques ne sont pas souvent explicitées dans l'enseignement. L'usage est plutôt de les mettre en œuvre quotidiennement sans trop en parler. Mais la pratique courante n'est pas seulement marquée par l'implicite. Elle comporte au moins deux autres caractéristiques importantes dont on verra les manifestations tout au long des résultats d'enquête qui suivent.

■ **Mélange des langages.**

En théorie, la résolution d'un problème comporte une phase de traduction (définition de symbole et mise en équation), une autre de calcul, qui s'effectue en langage symbolique puis une dernière phase de traduction dans l'autre sens (interprétation et discussion du résultat).

En fait le physicien comme l'étudiant bouleversent souvent cette chronologie théorique, et font une sorte de va-et-vient entre ces phases de résolution. Cela va avec le fait que le langage verbal et le langage algébrique s'interpénètrent à l'échelle même d'une seule phrase (voir à ce propos la réf. 3). On peut donc s'attendre à ce que les règles qui président à la manipulation de chacun de ces langages déteignent en quelque sorte sur l'autre. Or ces règles sont différentes.

■ **Prédominance du positif dans la pensée naturelle.**

Il est naturel de penser «positivement», et cette tendance se manifeste dans le langage courant par l'existence de deux mots différents pour désigner les deux pôles opposés d'une même notion - altitude - profondeur, donner - recevoir, flux - reflux, là où l'algèbre se contenterait d'un symbole. Chaque mot évoque tout naturellement une valeur positive de la grandeur correspondante ou plutôt, pour rester dans le domaine du langage courant, une valeur «réelle». Comme le dira un étudiant d'université (1ère année) : «le signe - n'existe pas dans la nature».

A la faveur de l'imbrication de langages signalée plus haut, ce réalisme de la pensée s'étend aux grandeurs physiques. Alors que la définition d'une grandeur algébrique, on l'a dit, nécessite une spécification du codage, la tendance réaliste naturelle donne une sorte d'existence autonome à des notions incomplètement définies, telles que «la force», «le travail échangé», «la puissance mise en jeu». Les précisions telles que «la force de quoi sur quoi», «le travail reçu par quoi», sont souvent considérées comme à donner ultérieurement, sinon superflues. Une trace écrite de ce phénomène est l'usage de barres de valeurs absolues, sortes de remparts contre les tracas algébriques. Une telle pratique semble sous tendue par l'idée que le calcul des valeurs absolues des valeurs numériques de grandeurs physiques d'une part, la découverte du signe à mettre à la fin, d'autre part, sont deux opérations découplées.

Ces grandes tendances signalées, il reste à évaluer plus précisément les difficultés des étudiants à ce propos. L'enquête dont la description suit vise à catégoriser ces difficultés de manière à éclairer la construction d'activités pédagogiques adaptées. Elle concerne des étudiants dont les niveaux scolaires s'étendent de la classe de première à la deuxième année universitaire.

## IV – QUELQUES FAITS EXPERIMENTAUX.

Une première série de questionnaires est bâtie sur le modèle des deux textes résumés en tableau 1 (on trouvera plus de détails en réf. 4, 5, 6).

Ces questionnaires visent les points suivants :

– Comment les valeurs numériques de certaines grandeurs algébriques dépendent-elles

- des conventions incluses dans leur définition ?
- de la situation physique particulière que l'on traite ?

– Mêmes questions en ce qui concerne les relations algébriques entre ces grandeurs.

La maîtrise de ces points suppose, en particulier, que l'on sache distinguer les significations des écritures «$+ q$» et «$q > 0$».

Les réponses, les commentaires obtenus, montrent bien qu'il ne s'agit pas là d'évidence, même si l'apprentissage du physicien professionnel ou de l'étudiant avancé leur permettent en général de dominer finalement ce type de questions. On retrouve, parmi ces réponses, la trace des tendances rappelées plus haut (III), en particulier dans ces aspects largement représentés :

- Une grandeur physique positive le reste quoi qu'il advienne des conventions, c'est-à-dire en fait de sa définition* :

«$i > 0$ reste vrai (si on change seulement la convention) car il ne faut pas confondre valeur algébrique et valeur réelle».

«... car le sens conventionnel n'impose pas un signe».

- Une relation est adhérente à la situation particulière dont elle rend compte : la relation est conservée ou modifiée selon que la situation physique est elle-même conservée ou modifiée, indépendamment de la convention** :

«Le sens du courant étant toujours le même (on n'a changé que la convention), on a la même relation $V_A - V_B = Ri$».

«$V_A - V_B = \frac{q}{c}$ devient $V_A - V_B = -\frac{q}{c}$ (à convention identique) car si q change de signe, la d.d.p. devra changer aussi».

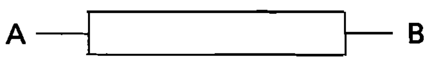
* 14 à 36% d'erreurs de ce type selon les groupes.

** 11 à 36% d'erreurs de ce type selon les groupes. Dans les populations de 1ère et 2ème année d'enseignement supérieur, au moins 30% d'erreurs dans toutes les questions de ce type.

## TABLEAU 1 – DEUX QUESTIONNAIRES

**Textes résumés** **et réponses**
(ch = changée...)
(id = conservée...)

I.

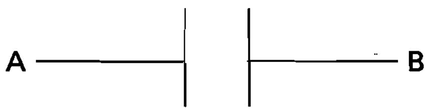


On a $i > 0$ (1)
$V_A - V_B = Ri$ (2)
$V_A - V_B > 0$ (3)

Qu'est-ce qui change si...

| La situation physique (courant : A ⟶ B) | La convention ($i_{A \longrightarrow B} > 0$) | Relation (1) | (2) | (3) |
|---|---|---|---|---|
| a) est conservée | est changée ($i_{A \longrightarrow B} < 0$) | ch | ch | id |
| b) est changée (courant B ⟶ A) | est conservée | ch | id | ch |

II.



On a $q > 0$ (1)
$V_A - V_B = \frac{q}{c}$ (2)
$V_A - V_B > 0$ (3)

Qu'est-ce qui change si...

| La situation physique charges + à g.) | La convention (q = charge de la plaque de gauche) | Relation (1) | (2) | (3) |
|---|---|---|---|---|
| a) est conservée | est changée (q = charge de la plaque de droite) | ch | ch | id |
| b) est changée (charges – à g.) | est conservée | ch | id | ch |

Ont aimablement participé à la collecte de ces résultats :
N. Calmet, J.L. Closet, F. Rouan, C. Royer, E. Saltiel. Les effectifs interrogés sont :

| 6ème année secondaire (technique) | 6ème année secondaire (scientifique) | 2ème année universitaire | Faculté des Sciences Agronomiques de Gembloux (Belgique) | |
|---|---|---|---|---|
| | | | 1ère année | 2ème année |
| 38 | 44 | 18 | 83 | 114 |

■ Il arrive que la «convention» instituant le sens d'un courant i positif, la plaque dont la charge s'appelle q, confère du même coup une «valeur réelle» positive à ces grandeurs.

Ce phénomème de «réalisation» de la convention, qui est en quelque sorte l'envers du précédent est sans doute à l'origine des taux surprenants d'erreurs concernant la relation $V_A - V_B > 0$ : dans toutes les polupations intéressées et pour chacun des trois tests, **plus de la moitié** des étudiants considèrent que la différence de potentiel $V_A - V_B$ change de signe lorsqu'on change les conventions de définition de l'intensité ou de la charge. Les commentaires suivants sont explicites :

«Le courant va effectivement dans le sens conventionnel» (1ère F, test I).

«La valeur de la charge portée par cette plaque (de droite maintenant) est $q > 0$» (ESIEA, 1ère année, test II).

«$V_A - V_B < 0$ car le courant positif va (maintenant) de B vers A» (1ère C, test I).

«$V_A - V_B < 0$ car si la plaque de gauche porte la charge q, alors $V_B < V_A$, donc si la plaque de droite porte cette charge, alors $V_B > V_A$» (1ère C, test I).

Non moins significative est l'ambiguïté des réponses qui évitent de se compromettre : on y parle de signe sans préciser s'il s'agit de celui qui figure dans une relation $V_A - V_B = +$, ou -, Ri, ou bien de celui de la valeur numérique d'une grandeur, au sens où celle-ci est positive ou négative ($i > 0$, ou $i < 0$).

Ainsi :

«$V_A - V_B = \frac{q}{c}$ change de signe»

«$V_A - V_B = Ri$ change de signe puisque i change de signe»

«L'équation deviendra négative».

**Pensée réaliste et compatibilité des signes.**

Un texte polycopié proposé à la critique des étudiants (tableau 2) s'est révélé source de renseignements du même type, qui recoupent les précédents et suggèrent une interprétation qui leur donne leur cohérence.

On remarque en particulier ce commentaire qui établit une dépendance entre relation et situation physique traitée :

«$i = -\frac{dq}{dt}$ à la décharge,

$i = +\frac{dq}{dt}$ à la charge».

Cette exemple résume à lui seul les tendances de la pratique algébrique quotidienne déjà relevées, et les articule ainsi :

■ Besoin de penser positivement certaines grandeurs. Ici, c'est l'intensité qui sert de point d'appui pour la démarche algébrique. Cette grandeur doit être positive quoi qu'il arrive.

De plus la charge q(+ q) désigne implicitement la charge de la plaque chargée positivement.

■ Dès lors, la relation entre intensité et charge dépend de la situation physique :

— à la décharge, dq est $< 0$, donc il faut pour assurer la cohérence des signes, «que l'on rajoute un signe -», ce qui donne $i = -\frac{dq}{dt}$ ;

— à la charge, dq est $> 0$, et $i = +\frac{dq}{dt}$.

Ce mécanisme lie donc le réalisme (naturel) de la pensée à la nécessité (apprise) de cohérence des signes pour aboutir ici à une relation algébrique «adhérente» à la situation physique.

**Le signe - et son pouvoir évocateur.**

Un second aspect de la pratique des lois simples en algèbre apparaît notamment à propos de l' «explication de texte» mentionnée dans le tableau 2. Celle-ci a donné lieu à cette interprétation surprenante* :

«$i = -\frac{dq}{dt}$ : le courant induit s'oppose au courant qui décharge le condensateur».

Ceci n'est qu'un reflet caricatural du consensus quasi général accordant au signe -, dans certains contextes, une signification en lui-même, celle des grandeurs algébriques qu'il relie passant au second plan. La loi de Lenz et son cortège constituent l'illustration triomphale de ce consensus :

$e = -\frac{d\Phi}{dt}$, $e = -L\frac{di}{dt}$, personne n'hésite sur le signe puisque, chacun le sait, la tension induite **s'oppose** au flux, au courant, au phénomène... «qui lui a donné naissance».

Il n'est pas question, semble-t-il, de s'opposer avec un signe + (sans doute la tension $V_A - V_B = Ri_{A \longrightarrow B}$ ne s'oppose-t-elle pas au passage du courant ?). Le signe - donc, «s'impose». Mais de là à savoir si e signifie $V_A - V_B$ ou $V_B - V_A$ (A et B étant les pôles du dipôle concerné), ou bien à connaître la définition précise de $\Phi$ et donc

* Dans des proportions non moins surprenantes :
— 32% en 1ère année universitaire à Gembloux (N = 115)
— 12% en 1ère année universitaire à Paris (N = 25)

## TABLEAU 2

### UN TEXTE A CRITIQUER

**Questions.**

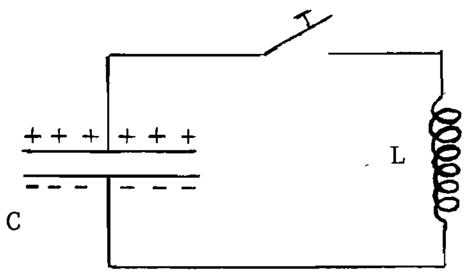
Quelles sont, dans le texte ci-dessous les **conventions de signes implicites ?**

Pourrait-on écrire :

«$i = + \frac{dq}{dt}$» ; «$V = + L \frac{di}{dt}$» ?

Si oui, à quelle(s) condition(s) ?

**Circuit oscillant LC**




Considérons un circuit électrique comprenant un condensateur de capacité C portant une charge q, un interrupteur et une bobine de self inductable L.
Etudions comment varie la charge q du condensateur (ou l'intensité i du courant dans la bobine) quand on ferme l'interrupteur.

La différence de potentiel sur le circuit fermé est nulle et égale à la somme des d.d.p. aux bornes du condensateur et de la bobine :

$$0 = V_c + V_L = \frac{q}{C} - L \frac{di}{dt}$$

Une diminution dq de la charge du condensateur entraîne l'apparition d'un courant i dans la bobine :

$$i = - \frac{dq}{dt}$$

On peut alors écrire :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$$

les circonstances qui rendent ce flux positif, il y a une distance importante. L'énoncé verbal qualitatif, cette histoire d'opposition, sont extrêmement utiles pour appliquer correctement la loi et faire des prévisions justes. Le signe - n'est à lui seul d'aucune utilité : selon le choix fait pour la signification de e, on pourra écrire :

$$e = -L\frac{di}{dt} \text{ ou } e = L\frac{di}{dt}.$$

Cette focalisation excessive de l'attention sur le signe -, considéré comme signifiant intrinsèquement un aspect d'une loi physique (l'opposition), s'accompagne dans la même logique, d'un refus du signe +. De fait, des étudiants qui interprètent l'énoncé $i = -\frac{dq}{dt}$ comme on vient de le voir répondent à la question : «pourrait-on écrire $i = +\frac{dq}{dt}$ ?» par un refus énergique («il faudrait supprimer la self»), alors que nulle part dans ce texte les symboles i et q n'ont été définis !

## V – BILANS ET CONVENTIONS.

Les aspects du raisonnement que l'on vient de souligner se retrouvent de façon particulièrement nette dans la manipulation des lois de type «bilan d'entrée-sortie» associées à des lois de conservation. Des articles antérieurs (4, 5, 6) développent cette question* à propos de la loi des nœuds en électricité, et des bilans énergétiques ou entropiques en thermodynamique. On retrouve là les conflits entre un point de vue verbal, réaliste, souvent soutenu par une illustration graphique, selon lequel une chaleur reçue est «effectivement reçue», et le point de vue algébrique où la flèche qui va de la source S à la machine thermique M illustre non pas un transfert effectif mais la définition d'une grandeur algébrique (Q est positive si le transfert est «effectivement» de S vers M).

## CONCLUSION.

Il reste maintenant cette question : comment conduire un plus grand nombre d'étudiants à manipuler les langages verbal, algébrique et graphique avec une cohérence et une maîtrise où chaque symbole, chaque énoncé, conserve une signification précise et donc unique ?

On peut reprendre ici, notamment à propos des exemples relevés plus haut, l'habituelle et toujours nécessaire exhortation à plus de rigueur de la part des enseignants. On ne saurait trop s'y employer. Mais les plus scrupuleux d'entre eux savent

* Ce qui n'est pas possible ici faute de place, mais sera fait dans l'exposé.

mieux que personne que cet effort rencontre, tôt ou tard, une limite. Par ailleurs, il n'est pas question non plus de bannir toute l'aide que l'on peut attendre d'une représentation réaliste des phénomènes physiques. On n'échappe donc pas, pour ce qui est de la pratique courante, à l'idée de compromis, pour laquelle nul décret ne dictera à chacun le dosage souhaitable en fonction des étudiants qui lui sont confiés.

En revanche, on voudrait avoir convaincu le lecteur qu'à **tous les niveaux d'enseignement** les étudiants doivent avoir des occasions, aussi fréquentes que possible, de pratiquer des traductions d'un langage dans l'autre avec une extrême rigueur.

On observe trop souvent dans la pratique enseignante un déséquilibre entre les inquiètudes des étudiants liées à la manipulation technique des symboles algébriques, et leur désinvolture quant à la signification des écritures utilisées.

Il faut à cet égard des exercices **centrés** sur un type d'activité où les difficultés liées aux manipulations calculatoires soient absentes ou résolues dans le texte, de façon à ne pas faire écran à celles que l'on vient d'évoquer. Libérés de l'inquiétude du calcul, les étudiants sont plus disponibles pour se soucier de la signification, pourvu qu'on les y provoque. Les occasions d'un travail spécifique sur ce point sont actuellement rarissimes dans l'enseignement. Les questionnaires cités ici ne sont que des exemples parmi d'autres d'un type d'exercices qu'il faudrait développer et pratiquer davantage (7). L'expérience personnelle de l'auteur est que les étudiants passent, à leurs propos, de l'étonnement à la satisfaction.

Ceci nous ramène à l'enjeu véritable d'un tel effort qui, bien évidemment, se situe à un autre niveau que l'objectif immédiat de l'enseignement d'une matière (et peut même apparaître parfois comme contradictoire...). Porter un regard critique sur un texte scientifique, ne pas laisser le souci du sens disparaître derrière celui des calculs, mesurer la distance entre le langage algébrique et le langage courant réaliste, sont autant d'aptitudes qu'il faut développer par des activités spécifiques sans attendre qu'elles viennent d'elles-mêmes d'une longue pratique scientifique.

## REFERENCES.


CHEVALLARD Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. «petit x» n°5, pp. 51 à 94.

BOOTH L. (1984) Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. «petit x» n°5, pp. 5 à 17.

LABORDE C. (1982). Deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques : langue naturelle et écriture symbolique. Thèse d'état, Université de Grenoble 1.

VIENNOT L. (1980). Pratique de l'algèbre élémentaire chez les étudiants en physique. B.U.P. n°622, p. 783 ssq.

**VIENNOT L. (1981)** Bulletin de la S.F.P.
**VIENNOT L. (1981).** Eur J. Sc. Ed. Vol. 3 n°2, p. 183 ssq. (en anglais).
**CROS A. et al. L'évaluation en classe termilanel.** B.U.P. **n°659, p. 287 ssq.**