

INTRODUCTION DU SIGNE «=» EN CLASSE DE C.P.

par Jean DANIAU

Préambule.

● Avant de prendre connaissance du compte-rendu qui suit, le lecteur est invité avec insistance à se reporter aux articles suivants publiés dans Grand \mathbb{N} sur le thème «désignation et égalité» :

- «Désignation, égalité» (par le comité de rédaction) numéro 4.
- «Deux exemples de l'utilisation de la désignation» (Henriette Laügt) numéro 4.
- «Désignation, égalité au C.P.» (Claude Comiti) numéro 4.
- «Apprenons à organiser l'information en tableau au C.P.» (Marie-Thérèse Chabroulet) numéro 7.

Rappelons brièvement que :

1) En mathématique, quand on désigne un objet on se place essentiellement dans une **situation de synonymie**, c'est-à-dire qu'à **un seul signifié** (objet mathématique tel que nombre, droite, segment, vecteur, relation, etc...) on associe **un ou plusieurs signifiants** (signes ou symboles destinés à représenter l'objet mathématique auquel on s'intéresse) ; autrement dit à la **pluralité** des signes de désignation correspond l'**unicité** du concept considéré.

2) En mathématique, l'écriture $a = b$ traduit le fait qu'un même objet mathématique est désigné par deux symboles a et b .

Certains s'interdisent, dans les activités mathématiques de l'école élémentaire, l'usage de signes pour désigner autre chose que des objets mathématiques.

Pour eux, le signe $=$ ne devrait être utilisé que lorsque l'on étudie des êtres mathématiques ; cette dernière restriction les conduit donc à n'introduire le signe $=$ au C.P. que dans des situations numériques (par exemple : $5 + 3 = 8$). Il nous semble, quant à nous, intéressant et possible de pratiquer les activités de désignation et d'égalité dans des **situations non numériques**. En effet, dans l'article qu'on peut lire dans les pages précédentes («Activités non numériques au cours préparatoire») nous avons montré tout l'intérêt de telles activités introduites au début de la première année de la scolarité élémentaire. Par ailleurs, dans toutes les classes où la désignation et l'égalité ont fait l'objet d'une étude à propos de situations non numériques empruntées au «vécu» des enfants, l'introduction des écritures chiffrées et du signe $=$ dans des situations numériques semble avoir été grandement facilitée.

Ajoutons enfin que ce parti-pris n'est nullement en contradiction avec le commentaire des programmes du 2 janvier 1970 qui précise, en son paragraphe 3.1, à propos de l'usage de l'écriture $a = b$: «les symboles a et b désignent le même objet» (et non pas «le même objet mathématique»).

● L'activité ci-dessous décrite a duré environ une heure. Elle a été préparée collectivement par un groupe de maîtres en stage «de recyclage» de 12 semaines, puis mise en œuvre par l'un d'entre-eux, à la fin du mois d'octobre 1975 dans une classe de cours préparatoire de l'école Berlioz de Grenoble. On voudra bien considérer qu'il ne s'agit pas ici d'un «modèle» à suivre à la lettre, mais simplement d'une démarche parmi d'autres qu'il serait intéressant de confronter à des séquences construites sur le même thème.

Les prérequis.

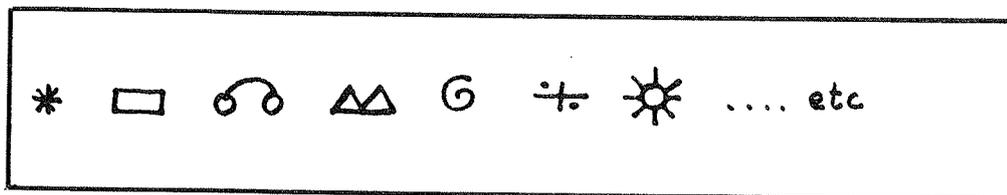
Avant que la séance ait lieu, les élèves ont été entraînés à l'utilisation de signes conventionnels pour se désigner ; ils savent aussi écrire leur prénom en écriture liée et le reconnaître. A l'occasion de ces activités de désignation, trois documents ont été préparés et affichés dans la salle de classe en des endroits éloignés.

● Une liste des prénoms des enfants écrits en gros caractères les uns en-dessous des autres sur un rectangle de papier dont la plus grande dimension est disposée verticalement :

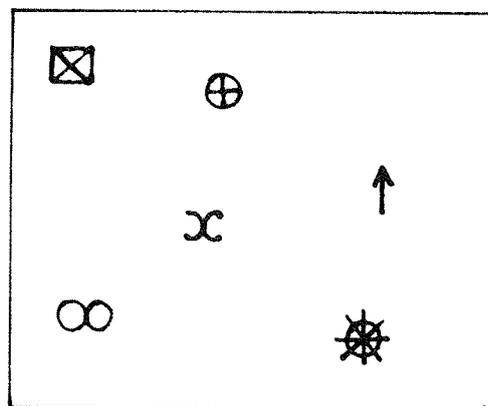
Paul
Pierre
Nathalie
Stéphane
Ignace
Valérie
.
.
.
etc...

N.B. Il se trouve que dans cette classe tous les enfants ont des prénoms différents.

- Une liste de signes arbitraires désignant chacun un élève de la classe, choisis par les enfants eux-mêmes et transcrits sur une bande ainsi disposée :



- Le troisième document rassemble d'autres signes inventés par les enfants pour se désigner et répartis sans ordre sur toute la surface d'une grande feuille :



Ainsi, chaque élève de la classe peut être désigné par trois signes distincts : l'écriture de son prénom, un premier signe conventionnel, un deuxième signe conventionnel.

Précisons encore que le maître dispose de trois séries d'étiquettes sur lesquelles sont transcrits les signes appartenant aux trois systèmes de désignation utilisés dans la classe.

Voici reproduites, aussi fidèlement que possible, les phases de l'activité.

I – PLURALITE DES SIGNIFIANTS – UNICITE DU SIGNIFIE.

En s'appuyant sur le matériel existant (listes affichées et étiquettes) on propose deux jeux aux enfants.

1er jeu.

Le maître annonce qu'on va jouer «sans parler» avec les étiquettes ; la consigne donnée oralement est «*je vais vous montrer des étiquettes qui portent vos signes ; ceux qui reconnaîtront leur signe se lèveront*». Il brandit une étiquette, attend la réaction de l'élève concerné et recommence ainsi une douzaine de fois ; le maître s'arrange pour désigner plusieurs fois de suite le même élève à l'aide des différents signes qui le représentent ; l'ensemble de la classe réagit alors en s'exclamant «c'est encore Stéphane !» ce qui est une manière de traduire la pluralité des signifiants opposée à l'unicité du signifié.

2ème jeu.

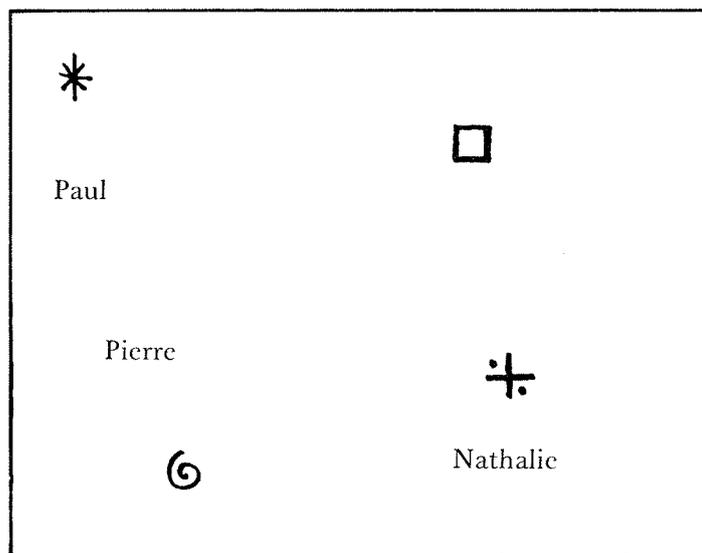
Le maître sans appeler les élèves par leur prénom les montre du doigt successivement en disant *va me montrer les signes qui te désignent* ; il s'agit là aussi, en consolidant la mémorisation des signes, de souligner concrètement qu'à un seul enfant correspondent trois signes différents.

II – DECOUVERTE DE LA RELATION D'EGALITE DANS UN ENSEMBLE DE SIGNES – TRADUCTION GRAPHIQUE.

On passe alors à un travail de recherche par petits groupes de quatre élèves. Les différentes phases de cette activité s'articulent ainsi :

1ère phase.

Le maître distribue à chacun des cinq groupes une grande feuille de papier sur laquelle sont transcrits des signes divers empruntés aux trois systèmes de désignation en usage dans la classe auxquels on a adjoint des signes ne désignant aucun enfant de la classe :



Les élèves se livrent d'abord à une courte « observation sauvage » ; certains enfants reconnaissent spontanément leurs signes et quelques fois les signes de leurs camarades du groupe ou d'un groupe voisin. Devant l'hésitation que marquaient quelques uns, le maître émet alors la consigne : « *reconnaissez vos signes* » et passe de groupe en groupe pour recueillir les remarques. Certains enfants repèrent les signes non « pertinents » ; d'autres n'y prêtent pas attention.

2ème phase.

Le maître distribue à chaque groupe une série de crayons feutres et donne oralement la consigne suivante : « *je vais me déplacer de groupe en groupe et je veux que vous me fassiez comprendre sur vos feuilles quels sont les signes qui représentent le même élève* ». La consigne n'était pas bien comprise, il précise : « *sans rien me dire il faut que je comprenne quels sont les signes qui représentent le même enfant* ». Après un temps d'expectative, les enfants prennent les crayons feutres et schématisent, chacun à sa manière, la relation définie dans l'ensemble des signifiants par : « *... désigne le même élève que...* ». (Il va de soi qu'à aucun moment de cette activité le maître n'a explicité cette relation ; la perception intuitive favorisée par l'observation et les dessins exécutés par les enfant suffit). Voici quelques exemples de tracés obtenus :

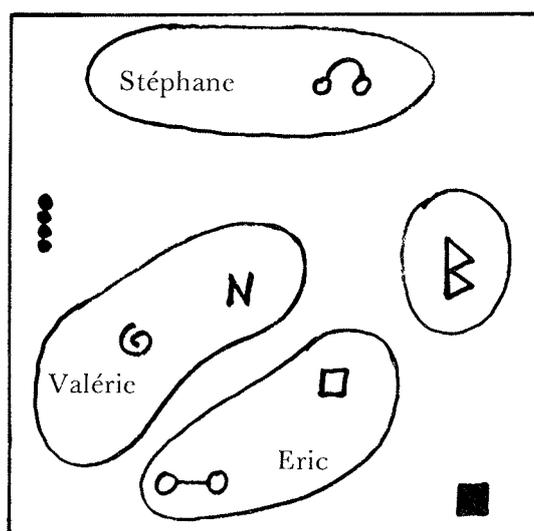


Schéma 1

Ici les enfants ont enserré dans un contour les signes qui renvoient au même élève ; les symboles laissés de côté n'ont pas été reconnus.

Dans l'exemple ci-dessous, le même type de représentation a été adopté conjointement à un procédé consistant à joindre par un trait les signifiants désignant un même élève (les signes de Marie-Pascale par exemple) :

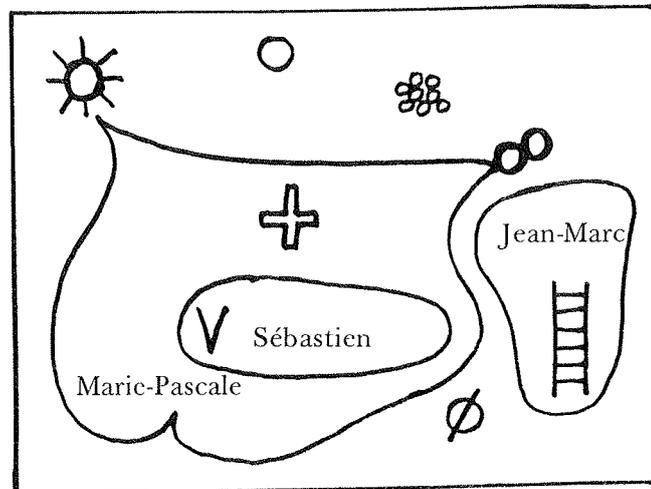


Schéma 2

Sur un des schémas figurent des flèches dirigées vers les enfants du groupe placés autour de la feuille :

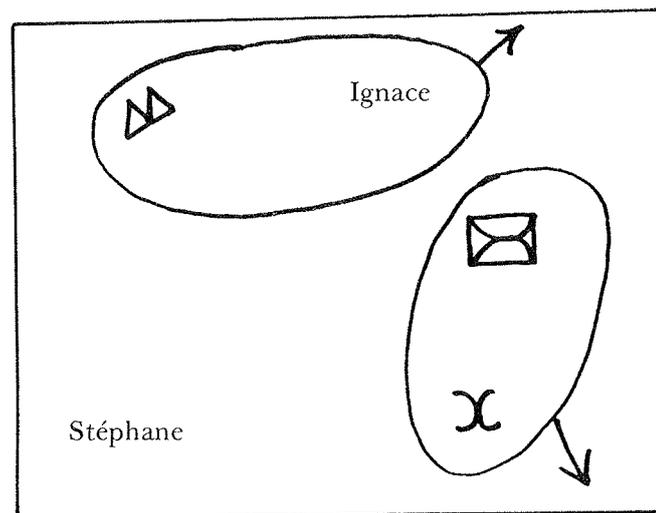


Schéma 3

La 3ème phase est consacrée à une mise en commun des recherches. Les feuilles sont affichées devant toute la classe et chaque groupe explique le procédé qu'il a employé pour montrer que plusieurs signes désignent le même élève. Les explications sont évidemment maladroitement mais elles sont des tentatives intéressantes de décodage d'un message écrit (car les élèves des autres groupes essaient de comprendre ce qu'ont voulu dire leurs camarades) ;

à cette occasion les enfants qui ont dessiné le schéma 3, s'aperçoivent que, leur feuille étant fixée au tableau, les flèches n'ont plus aucune signification. En observant le schéma numéro 2 la classe découvre, au travers des remarques de quelques uns, que les tracés sont ambigus («*on ne sait pas ce que ça veut dire*»). Le moment paraît donc propice pour introduire le signe universellement employé pour traduire la relation d'égalité.

III – INTRODUCTION DU SIGNE =

Il est évident que les élèves ne peuvent inventer cette convention ; l'intervention «*autoritaire*» du maître est de ce fait nécessaire.

Pour cela le maître choisit parmi les représentations diverses affichées au tableau un exemple ne mettant en jeu que deux désignations : *Pierre*, *.

Il dit : «*pour montrer que ces deux signes (il évite de lire l'écriture «Pierre») représentent le même élève, vous les avez entourés d'une boucle ; les «grands» ont l'habitude de faire autrement ; savez-vous comment ?*».

La question ne trouve pas de réponse : aucun élève ne semble connaître le signe =. Le maître dit alors : «*les grands font comme cela*» et il écrit lentement au tableau : *Pierre = **.

A ce moment quelques élèves réagissent et affirment qu'ils ont déjà vu le symbole. Le maître insiste d'abord sur la lecture du signe = et dit «*ce signe ne représente personne : il veut dire que ce signe là (Pierre) et ce signe là (*) désigne le même élève, Pierre Jullien*».

Suit une observation active de l'égalité ainsi écrite, sur incitation du maître qui demande : «*que remarquez-vous dans cette écriture ?*». Silence ; puis un enfant dit : «*égale est au milieu*» ; le maître précise : «*le signe «égale» est entre les deux signes, celui-là et celui-ci qui représentent Pierre Jullien*».

Le maître invite alors quelques élèves à venir s'exercer à traduire au tableau quelques égalités à partir d'exemples pris parmi ceux qu'on voit sur les feuilles affichées. Il s'agit, ce faisant, d'entraîner la classe à se familiariser :

- avec la disposition «*horizontale*» de l'égalité ;
- avec le nom du signe = ;

— avec la «syntaxe» propre à cette écriture : deux signifiants (et deux seulement) sont placés de part et d'autre du signe =.

Bien entendu, ces règles ne sont, à aucun moment, énoncées ni par le maître ni par les élèves.

IV — UTILISATION DU SIGNE =.

Mais il est évident que la maîtrise de ce nouveau type d'écriture suppose une pratique prolongée. Aussi le maître engage-t-il les enfants dans une nouvelle phase du travail qui va consister à transposer systématiquement les schémas faits par les divers groupes.

Le maître distribue donc à chaque groupe les schémas élaborés au cours de la première phase et une feuille vierge de même dimension. Il énonce la consigne : *«vous allez, sur la feuille blanche, montrer que des signes désignent le même élève, mais cette fois, en faisant comme les «grands» c'est-à-dire en utilisant le signe «égale»».*

Les élèves cherchent ; la plupart des «phrases» écrites sont correctes : la «syntaxe» précisée précédemment est respectée.

On affiche, à nouveau les schémas dessinés au début de la séance et on place sous chacun d'eux les feuilles que viennent de remplir les élèves en utilisant le signe =. On peut ainsi organiser une discussion collective au cours de laquelle quelques observations intéressantes sont formulées par les élèves. Voici le résumé de l'examen critique de quelques types d'écriture.

- type 1 : disposition verticale de l'égalité.

Les élèves font remarquer simplement : *«on n'écrit pas debout».*

⊗
||
N

- type 2 : erreur sur l'orientation des signes

 = 

au lieu de  = 

On passe très vite sur cette erreur qui tient au fait que, sur les feuilles distribuées au début de la séance, les signifiants avaient été transcrits sans que soit toujours respectée l'orientation initialement arrêtée.

• type 3 : on trouve sur les feuilles de très nombreuses «chaînes» d'égalités, les unes écrites horizontalement les autres non :

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & = & \boxed{\uparrow} = \text{Ignace} & \quad & \oplus & = & \ell \\ & & & & \parallel & & \\ & & & & \text{Stéphane} & & \end{array}$$

Pour l'enfant de C.P. la première de ces écritures signifie simplement que $\uparrow = \boxed{\uparrow}$ et que $\boxed{\uparrow} = \text{Ignace}$ et ne traduit pas, à ses yeux, que $\uparrow = \text{Ignace}$ (transitivité de la relation d'égalité).

La seconde écriture présente la même difficulté d'interprétation ; pouvons-nous être sûr que, pour l'enfant qui l'a écrite, Stéphane = ℓ ?

Au cours de la discussion, le maître n'a pas essayé de lever ce type de difficulté : ce sera pour plus tard. Il a surtout insisté sur la «syntaxe» attachée à l'écriture d'une égalité en précisant que «*on ne prend toujours que deux figures à la fois qu'on sépare par le signe =*».

• type 4 : sur une des feuilles affichées on trouve un exemple d'écriture faisant se chevaucher les signes :

$$\text{Marie-Pascale} = \text{☀} \text{⊙} \quad (\text{deux signes superposés})$$

Cette erreur a été immédiatement relevée par les élèves qui ont dit «*on ne voit pas bien ce qui est écrit*» ; «*il ne faut mettre qu'un signe par là*» (c'est-à-dire à droite du signe =).

Il est à noter enfin qu'aucune erreur n'est apparue (deux signes d'enfants différents reliés par le signe =) qui aurait permis l'introduction du signe \neq ; la présentation de ce nouveau signe se fera ultérieurement.

* *
*

Cette séquence a été suivie d'une discussion à laquelle ont pris part les maîtres en stage qui ont assisté à son déroulement. Les points forts de cet échange ont été les suivants :

1) Est-il bien utile de consacrer beaucoup de temps à la recherche de divers types de représentation de la relation d'égalité ? (paragraphe II). Pourquoi ne pas tout de suite introduire le signe = sur quelques exemples ?

Sur ce point, après confrontation des arguments, il est apparu que cette phase de tâtonnement est indispensable car :

- * au travers de la recherche se construit une prise de conscience de la relation d'égalité ;
- * les enfants comprennent que la convention en mathématique relève d'un choix entre plusieurs procédés de représentation d'un concept ;
- * l'assimilation des règles syntaxiques liées à l'écriture des égalités en est favorisée.

2) On a critiqué à juste raison l'usage des pré-noms écrits pour désigner les élèves. On est tenté en effet de les lire alors que les signes conventionnels ne peuvent pas être énoncés ; de plus, en lisant «Pierre» par exemple, la désignation se fait à un second degré : l'enfant est désigné par le mot écrit qui est lui-même désigné par sa valeur phonétique. Pour ces raisons ne vaudrait-il pas mieux n'utiliser que des signifiants tout à fait arbitraires ?

3) En raison des conditions dans lesquelles s'est déroulé ce travail, on a fait remarquer que la séance a trop duré et que le «menu» proposé était trop copieux. Peut être aurait-on pu s'en tenir aux trois premiers paragraphes, l'utilisation du signe = et l'étude «syntaxique» de l'égalité étant reportée à plus tard.

4) On s'est aussi interrogé sur la suite à donner à une telle activité. Sans entrer dans les détails il semble que cette séance pourrait se prolonger de la manière suivante (ne considérer cette liste de suggestions ni comme obligatoire ni comme exhaustive) :

- * reprendre le travail avec des situations différentes où les enfants ne seraient pas directement impliqués (désignation d'animaux, d'objets, de personnages de contes... etc...). Approfondir le statut de l'égalité. Le signe \neq ;
- * relation d'égalité dans un ensemble de signifiants d'ensembles ;
- * chercher à écrire «beaucoup» d'égalités à partir de deux signifiants, de trois signifiants sans qu'il soit question, bien entendu, d'en faire un inventaire complet. Au travers de ces exercices de dénombrement les enfants percevront intuitivement quelques unes des propriétés de l'égalité, symétrie et transitivité, sans qu'il soit nécessaire de procéder à une étude systématique de celles-ci.