MISE EN PLACE D'UNE SITUATION-PROBLÈME À DIMENSION HISTORIQUE SUR LES NOMBRES COMPLEXES[1]

Salek OUAILAL
Centre Régional des Métiers de l'Éducation et de la Formation
Souss- Massa- Daraa, Agadir (Maroc)

Résumé. Dans ce travail, nous mettons en valeur le rôle de l'intégration d'une rubrique historique dans l'enseignement des mathématiques. Ceci nous amènera à expliciter ses rôles didactiques selon trois axes auxiliaires, à savoir : le rôle motivant, le rôle de l'interdisciplinarité et enfin le rôle que peut jouer l'histoire des mathématiques dans l'installation d'une situation-problème pertinente. Ainsi, une expérience a été mise en action sous le nom de *situation-problème historique.* Elle porte sur l'origine algébrique des nombres complexes, dont le but est de placer les étudiants dans un contexte historique pour mieux accepter l'existence de l'outil mathématique qu'est le nombre complexe.

Mots-clés. Histoire des mathématiques, motivation, situation–problème, équations algébriques, nombres complexes.

Abstract. This article aims at discussing the important role of integrating a historical section in the operation of mathematics' teaching, in this perspective we brought this to explain these teaching roles through three auxiliary axes, namely : motivating role, the role of interdisciplinarity and the role that can be played in installing an adequate problem situation. Thus an experiment was put into action as *a historical problem situation* that concerns the origin of algebraic complex numbers, whose goal is to place learners in a historical context to better accept the existence of such a mathematical tool.

Key-wordS. History of mathematics, motivation, problem situation, algebraic equations, complex numbers.

Introduction

D'après des discussions menées avec des enseignants des mathématiques et notre propre expérience de classe, nous avons noté que dans une séance ordinaire du chapitre sur les nombres complexes – séance destinée aux élèves de la dernière année du cycle de Baccalauréat série scientifique – la majorité des scénarios de planification des connaissances mathématiques relatives à cet objet de l'algèbre commence généralement par la fameuse phrase *« Dans tout ce chapitre on suppose qu'il existe un nombre imaginaire i qui vérifie : i au carré égal à moins un ...»*, ceci bien entendu lors de l'introduction préalable à la leçon.

1 Ce travail a fait l'objet d'une communication orale lors des travaux de la première école de recherche en didactique des mathématiques, organisée par l'Observatoire Marocain des Systèmes d'Enseignement et de Formation à l'Enseignement des Mathématiques, Rabat, juin 2014.

Ainsi, juste après l'énoncé de telle affirmation, un petit sourire, ou parfois un étonnement, apparaît sur les visages des étudiants, chose que les professeurs ne prennent pas suffisamment au sérieux, car il s'agit ici de ce que je peux appeler : un accident de logique mathématique, lequel survient du fait que le carré d'une quantité est annoncé négatif ! En effet cette affirmation contredit d'emblée la culture mathématique scolaire que l'étudiant a développée au fil de ses années de scolarité. Or on le sait, certes, que communiquer une information ou un fait est différent d'énoncer une proposition ou un théorème, ce dernier nécessitant une déclaration interne au moins pour défendre cette opinion et même exhiber une démonstration.

Mais l'enjeu ici, n'est pas de donner une démonstration mais d'abord de convaincre l'étudiant d'accepter l'existence de ce nouvel objet mathématique qu'est le nombre dit « imaginaire ». Dans une approche constructiviste, nous espérons ici surmonter cet obstacle des connaissances antérieures (Sackur & Maurel, 2000) afin d'arriver à un état de consensus des savoirs chez l'étudiant.

Les acteurs principaux de notre expérience sont les élèves de différents établissements scolaires publics et privés, ce qui nous a donné un échantillon de 260 élèves environ. En nous basant sur les outils théoriques de la didactique des mathématiques comme le travail en petits groupes (Robert & Tenaud 1989), la théorie des situations, le changement de cadre (Douady 1992), la motivation… nous espérons trouver quelques réponses ou réfutations à nos considérations.

Dans une première partie, nous allons introduire un bref cheminement historique qui porte sur l'évolution du statut des nombres complexes, pour attirer l'attention sur le fait qu'il est naturel qu'un outil mathématique qui a pris des siècles pour prendre la forme qu'on lui connaît actuellement trouve une résistance chez l'étudiant et par suite qu'il est surprenant d'attendre que ce dernier puisse être convaincu en deux heures de classe !

La deuxième partie présente une lecture sur la place de l'histoire des mathématiques dans les manuels scolaires et aussi dans les orientations pédagogiques relatives à l'enseignement des mathématiques dans le cycle qualifiant (le Lycée). On y discute les réponses possibles aux deux questions suivantes : les enseignants des mathématiques sont-ils eux-même motivés pour délivrer un enseignement qui tienne compte de l'histoire du développement des outils mathématiques ? Le fait de plonger les étudiants dans un contexte historique n'est-t-il pas une perte de temps si on vise les compétences prescrites ? On argumente également sur la nécessité de l'introduction de la partie historique dans un cours de mathématiques suivant trois axes principaux, à savoir : la motivation, puis l'interdisciplinarité et enfin les liens possibles avec les situations-problèmes caractérisées par Douady et d'autres auteurs tels que Charnay (1987) et Peltier (2000). Sur l'usage de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques, on consultera aussi Dorier (2000), et la Commission Inter- IREM EHM (1998).

La troisième partie concerne le passage à l'expérience, en commençant, à titre de motivation, par une activité ancienne sur l'extraction de la racine positive d'une équation algébrique de second degré connue sous le nom de méthode d'Al-Khawarismi. Puis, dans une partie préalable à la recherche des racines d'une équation algébrique de troisième degré, nous confrontons les étudiants au fait que les solutions réelles de telles équations existent, soit par déduction du théorème de la valeur intermédiaire ou de la fonction réciproque[2], soit par changement de cadres tout en exhibant la question de l'interprétation géométrique. Dans une partie suivante de l'expérience, nous allons utiliser la technique de Cardan pour la résolution des équations cubiques : $x^3=6x+6$ et $x^3=15x+4$.

Et c'est dans cette étape que l'apparition, et donc l'introduction par expérimentation du nombre imaginaire *i* prend place en toute légitimité dans les petits groupes de « chercheurs mathématiciens » que sont nos élèves. À ce sujet, voir aussi deux textes de la Commission Inter-IREM HEM (1998) et de Rogalski (2001).

1. Un peu d'histoire sur l'origine algébrique des nombres complexes

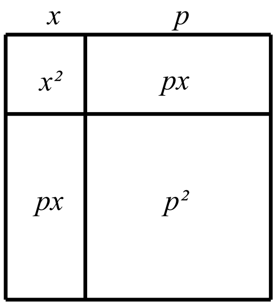
La recherche historique sur l'origine des nombres complexe (voir Commission Inter-IREM HEM 1998, Artigue & Deledicq 1992) nous conduit à suivre la ligne de développement de la notion de nombre en général, depuis l'Antiquité et le Moyen-Age à travers différentes civilisations : babylonienne, grecque, égyptienne et chinoise. Ainsi l'augmentation de la demande de précision dans le domaine de l'astronomie, découlant de l'exploration maritime du sixième siècle, boustera le développement des techniques de résolution des équations et aussi la création de tables trigonométriques plus exactes.

Les mathématiciens européens hériteront de l'intérêt des Indiens et des Arabes pour une algèbre basée sur l'arithmétique plutôt que sur la géométrie. À ce stade de l'histoire, il faut évoquer l'apport de la civilisation arabo-musulmane à l'algèbre (cf. Youschkevitch 2000). Commençant par le fameux Al-Khawarizmi[3], son livre *Kitab al-jam wa attafriq bi hisab al-Hind* (Livre sur l'addition et la soustraction d'après la méthode des Indiens) aida à répandre la numération indienne. Son traité *Al-kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wal-muqabalah* (Livre concis sur le calcul par restauration et équilibrage), dont le mot *al-jabr* est à l'origine du mot « algèbre », se voulait un manuel pratique aidant à raffiner les techniques d'arithmétique issues des problèmes rencontrés à l'époque lors des calculs d'héritages prescrits par le Coran, et aussi de l'évaluation foncière (cf. Norredine 1998).

Malgré cet aspect pratique, Al-Khawarizmi a toutefois senti le besoin de soutenir ses algorithmes algébriques par des arguments géométriques (cf. Poitras, 2007) : voilà un exemple de résolution d'une équation de second degré du type : $x^2+2px=q$, où $p>0$ et $q>0$ avec la méthode dite *méthode d'Al-Khawarizmi* (figure1) :

2 Ces théorème figurent bien dans le programme des mathématiques sur le chapitre de la continuité et dérivabilité d'une fonction numérique.

3 Un des membres de *Dar Al- hikma* : (la Maison de la sagesse) institution établie à Bagdad sous le califat Al- Mamum (809-833). Cette dernière encouragea la traduction des grandes œuvres grecques et indiennes comme celles du mathématicien et astronome Mohammed Ibn-Musa Al-Khawarizmi (ca. 850) d'origine de l'Ouzbékistan. L'introduction des œuvres d'Al-Khawarizmi en Occident au douzième siècle a eu un rôle essentiel dans l'apparition de la numération de position en Europe; il a été maintes fois traduit en latin, sa célébrité fût telle que ce calcul fut nommé algorisme (algorithme), d'Algorismus, latinisation d'Al-Khawarizmi.



L'aire totale A du carré de côtés $x+p$ est, d'une part : $(x+p)^2$, ce qui implique $x=\sqrt{A}-p$.
Et d'autre part, on a $A=x^2+2px+p^2$, donc $A=p^2+q$.
Finalement, la solution positive est :
$x=\sqrt{p^2+q}-p$.

Figure 1. *Méthode d'Al-Khawarizmi*

Un autre mathématicien arabe, Umar Al-Khayyam[4], dans son texte *Algèbre* (ca.[5] 1079), proposa une construction géométrique à l'aide de coniques pour résoudre l'équation suivante : (E): $x^3+px=q$, avec p et $q > 0$.

Cette dernière équation est à l'origine de la découverte par Cardan[6] (1501-1576) et surtout Raffaele Bombelli (1526-1573) des nombres complexes.

Voici *la méthode d'Al-Khayyam* :
Multipliant les deux membres de l'équation (E) par x, on trouve :
(F): $x^4+px^2=qx$. On pose $y=\frac{1}{\sqrt{p}}x^2$ (équation d'une parabole), on trouve l'équation cartésienne de cercle suivant : $x^2+y^2=\frac{q}{p}x$.
Les deux points d'intersections de ces deux formes géométriques (figure 2), vérifient l'équation (F), ce qui est équivalent à $x^3+px=q$ ou bien $x=0$.
Enfin, la solution réelle de l'équation (E) est le point d'intersection des deux courbes différent de l'origine, puisque 0 n'est pas une solution.

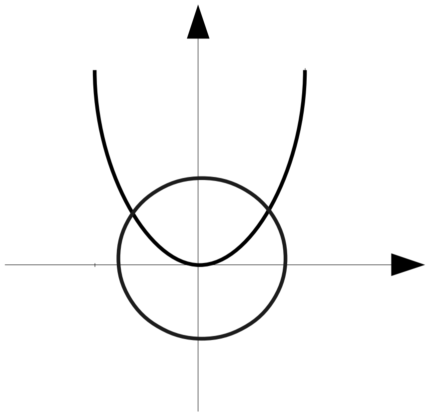


Figure 2. *Méthode d'Al-Khayam*

4 Umar Al-Khayyam : né à Nichapour (actuellement en Iran) fut à la fois mathématicien, astronome, poète et philosophe (ca. 1048-1123).
5 ca. signifie : circa (en latin), soit *environ*.
6 Jérôme Cardan : ou encore Geronimo Cardano mathématicien Italien fut à la fois médecin, cryptographe et astrologue, il a publié son livre célèbre en 1545 « Ars magna sive de regulis algebraicis »

1.1. La méthode de Cardan, cas de racines de nombres positifs

L'apparition du concept des nombres complexes datait du seizième siècle, et pour bien comprendre cet outil mathématique (lui donner le statut d'objet, c'est-à-dire de concept) il a fallu attendre le début du dix-neuvième siècle, lorsque le mathématicien norvégien Caspar Wessel (1745-1818), le suisse Jean-Robert Argand (1768-1822) et l'allemand Carl Friedrich Gauss (1777-1855) montrèrent que le calcul sur les nombres complexes n'est autre qu'une traduction symbolique très pratique de raisonnement de la géométrie du plan.

Avec son étudiant Ferrari (1522-1565), Cardan travaillait sur la résolution des équations algébriques à coefficients réels du deuxième, troisième et quatrième degrés. Pour les équations du troisième degré ils ont attribué à del Ferro (1465-1526) et Tartaglia (1500-1557) l'invention de la méthode de résolution.

Cardan commençait par réduire l'équation générale du troisième degré :

$y^3+ay^2+by+c=0$ à la forme $x^3+px=q$, en posant $y=x-\frac{a}{3}$,

d'où $p=b-\frac{a^2}{3}$, et $q=-c-\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}$.

Cardan traitait séparément les trois cas suivants, où n'apparaissent que des coefficients positifs : $x^3+px=q$, $x^3=px+q$ et $x^3+q=px$, sans analyser le cas :
$x^3+px+q=0$ (puisque celui-ci n'admet aucune solution positive).

Pour résoudre l'équation suivante : $x^3+px=q$, où p et $q>0$, Cardan utilisait le procédé équivalant à l'identité remarquable :

$(U-V)^3+3UV(U-V)=U^3-V^3$. Posons $u-v=q$ et $uv=(\frac{p}{3})^3$.

Si on pose $x=\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$, l'identité remarquable ci-dessus appliquée avec $U=\sqrt[3]{u}$ et $V=\sqrt[3]{v}$ montre que $x^3+px=q$: x est solution !

Mais u et $-v$ sont alors les solutions de l'équation de second degré $t^2-qt-(\frac{p}{3})^3=0$.

Son discriminant est $\Delta=q^2+4(\frac{p}{3})^3>0$, et u et v sont donnés par :

$$u=\frac{1}{2}[\sqrt{\Delta}+q] \quad \text{et} \quad v=\frac{1}{2}[\sqrt{\Delta}-q].$$

On trouve enfin, pour les radicaux positifs, la solution (dite formule de Cardan) :

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+(\frac{p}{3})^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+(\frac{p}{3})^3}}.$$

1.2. La méthode de Cardan : Un problème…Et si toutes les racines de l'équation cubique sont réelles et distinctes ?

Le moment fort de l'histoire des nombres complexes débute avec l'apparition des quantités négatives sous un radical. Pour bien comprendre ce passage assez important prenons l'exemple de l'équation cubique proposée par Cardan :

$$x^3 = 15x + 4$$

Cette fois, $q = 4$, mais il faut prendre $p = -15$ pour se ramener au cas précédemment vu $x^3 + px = q$, mais on pourrait refaire les calculs précédents pour ne travailler qu'avec des nombres positifs si on voulait…

Signalons d'abord à titre d'explication que cette équation admet trois racines réelles distinctes, ceci du fait que le graphique de la fonction associée à l'équation en question coupe l'axe des abscisses en trois points distincts. On peut même trouver explicitement ces solutions par un algorithme algébrique : la racine 4 est "évidente" (étant suggérée par le graphique ou une calculatrice), on factorise par $x - 4$ et on résout une équation de second degré. On trouve comme racines $\{4 ; -2 + \sqrt{3} ; -2 - \sqrt{3}\}$ (voir le paragraphe 4.1.2 de l'expérience). Ainsi d'après la formule de Cardan, on trouve que l'une des solutions est :

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}},$$

Ceci montre bien (pour nous !) qu'un nombre réel peut s'écrire sous formes de racines cubiques de nombres complexes !

1.3. Le génie de Bombelli

Laquelle des solutions réelles {4, –2+√3, –2–√3} est égale à l'expression $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$?

L'expression $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ n'avait, a priori, pas du sens dans un temps historique puisqu'on ignorait ce que représente le symbole $\sqrt{-1}$. Bombelli[7] en 1572, a eu l'intuition, d'une part d'introduire clairement « les nombres » de la forme $a + \sqrt{-1}b$ et leurs règles de calcul, et d'autre part de montrer que la somme de deux complexes conjugués (suivant notre appellation actuelle) est un nombre réel. Grâce à cela, voilà comment montrer que $4 = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$.

D'abord, à titre de simplification de la lecture du texte mathématique nous allons utiliser le symbole i pour designer $\sqrt{-1}$ (ce symbole a été introduit par Euler[8] en 1777 et publié en 1794).

Bombelli a utilisé l'identité $(a - ib)^3 = (a^3 - 3ab^2) + i(3a^2b - b^3)$ pour montrer que si on a trouvé *a* et *b* tels que $(a - ib)^3 = A + iB$, alors $\sqrt[3]{A + iB} + \sqrt[3]{A - iB} = (a + ib) + (a - ib) = 2a$.

---

7 Raffaele Bombelli (ca.1526-1573) était un ingénieur italien, qui a co-traduit cinq des sept livres de Diophante, et a publié son unique ouvrage *L'Algebra.*

8 Le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783), a publié en 1748 son ouvrage : *lntroductio in Analysum infinitorum.*

Puis il montre que $2+\sqrt{-121}=2+11\sqrt{-1}=(2+i)^3=2+11i$ (sans dire comment il a trouvé cette relation. Voir à ce sujet Rogalski et al, 2001).

Ainsi on obtient $\sqrt[3]{2+\sqrt{(-121)}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{(-121)}}=(2+i)+(2-i)=4$.

1.4. Petit arrêt historique

En conformité avec les axes didactiques annoncés pour ce travail, nous allons nous restreindre ici à une discussion des nombres complexes sous un point de vue algébrique, sans traiter leurs interprétations géométriques sur lesquelles de grands mathématiciens ont travaillé pendant des siècles : Descartes, Newton, Leibniz, Euler, Wessel, Argand, Gauss et Cauchy (cf. Poitras 2007), avant que cette notion mathématique ne prenne le statut scolaire actuel.

Sur le plan algébrique, le mathématicien français Girard (1629) a invoqué trois raisons historiques, non pas pour connaître la démonstration de l'existence des nombres complexes, mais pour accepter cette existence :

> «…On pourrait dire à quoy sert ces solutions qui sont impossibles, je respond pour trois choses, pour la certitude de la reigle generale, & qu'il n'y a point d'autres solutions, & pour son utilité ». (cf. Flament, 2003).

Girard travaillait sur les relations entre les zéros d'un polynôme et sa factorisation, et aussi sur la relation entre le degré d'un polynôme et le nombre de ses zéros.

Avec ces exemples, nous voulons montrer aux étudiants que les mathématiques ne sont pas une science axiomatique et stable, et que mêmes les grands mathématiciens ont rencontré des obstacles, des controverses, des débats et même des erreurs pendant leurs recherche.

2. La place de l'histoire des mathématiques dans les programmes scolaires

Une grande majorité des enseignants ne fait aucune référence d'ordre historique lors de l'introduction des chapitres mathématiques en classe. Les étudiants ne se donnent la peine d'ouvrir leurs livres que rarement, surtout lorsque les enseignants proposent les séries des exercices ou les devoirs maisons sur d'autres supports. D'autre part, dans les orientations pédagogiques relatives à l'enseignement des mathématiques dans le cycle qualifiant, on remarque qu'il n'y a aucune consigne directe qui mentionne la mise en place de l'histoire. Prenons l'exemple du chapitre sur les nombres complexes :

> Il convient de sensibiliser à la nécessité de l'introduction des nombres complexes d'une manière brève et précise. (Orientations pédagogiques et programmes relatifs à l'enseignement des mathématiques dans le cycle qualifiant, Maroc, novembre 2007).

Il nous semble cependant qu'il serait bénéfique de persuader les enseignants du rôle pédagogique motivant de l'introduction du volet historique dans le cours ordinaire de l'enseignement des mathématiques. Mais, comme le dit de Vittori à ce sujet :

> Avant tout professeurs de mathématiques, ils deviennent pour un temps professeurs d'histoire des mathématiques. Ce changement de posture n'est pas neutre car il oblige à se situer dans un domaine dont on n'est pas maître. (de Vittori, 2015).

Nous pensons donc qu'il faut introduire l'histoire des sciences – et particulièrement l'histoire des mathématiques – comme module complémentaire dans la formation des professeurs stagiaires dans les CRMEF[9], et pour les professeurs expérimentés faire des ateliers de formation continue. D'un côté, nous recommandons de travailler avec les étudiants dans le cadre des activités de clubs de mathématiques ou bien dans des séances supplémentaires portant le nom d'ateliers des mathématiques. Cela dans le but, d'abord d'éviter les contraintes horaires imposées par le programme, et nous suggérons une moyenne d'une séance sous forme d'atelier de création par deux semaines, ensuite de profiter du fait que ce contexte autorise plus de marges de liberté d'expression, de participation et d'intégration collective qu'une séance ordinaire de cours.

Dans ce contexte, le domaine est riche de sujets motivants qui figurent même dans le programme officiel. Nous proposons ainsi parmi d'autres problèmes historiques accessibles aux lycéens : l'histoire des nombres, la valeur de nombre Pi, l'aire d'un cercle, le nombre d'or dans la nature, les démonstrations du théorème de Pythagore, le calcul de la hauteur d'une pyramide, le logarithme, l'exponentielle, les probabilités… Une telle insertion des étudiants dans ces contextes historiques à caractère expérimental et créatif leur permettrait de mieux comprendre les démonstrations et le sens des outils utilisés et aussi de se rendre compte que les mathématiques sont le fruit d'une longue évolution.

Enfin, nous suggérons de réserver dans les manuels scolaires du Maroc toute une page au début de chaque chapitre pour donner une approche historique des concepts mathématiques enseignés. Cette page devrait aussi donner les noms des mathématiciens de l'époque qui ont contribué au développement du sujet, et présenter des dates de repérage et bien entendu une bibliographie.

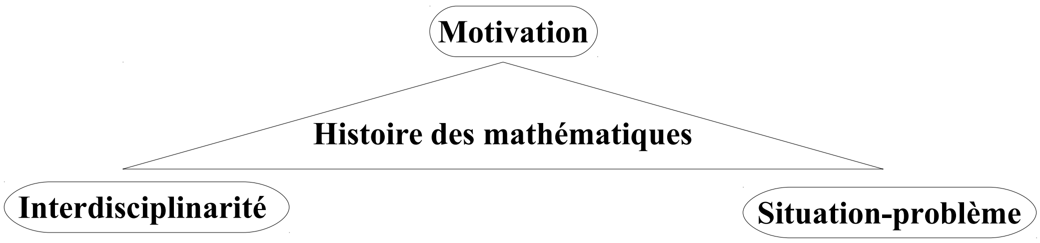
2.1. Le rôle didactique motivant de l'histoire dans l'enseignement des mathématiques

Au moment de l'enseignement du chapitre des nombres complexes pour les élèves de la dernière année du cycle de baccalauréat (séries scientifiques), la majorité des étudiants se contente d'absorber la proposition suivante : « le carré de i est moins un », ce que j'ai appelé un accident de logique mathématique !

Et donc après un déséquilibre et une perturbation de ses connaissances déjà institutionnalisées, l'étudiant oublie vite cette séquence scolaire et se lance dans l'application des techniques algébriques de résolution des équations et même dans les transformations de plan pour trouver l'image d'un point, l'antécédent par translation, homothétie ou bien rotation car il ne s'agit en fin de compte que de résoudre des équations du premier degré. Nous voulons dans une perspective didactique, revenir à cette séquence de départ, en commençant notre analyse par les représentations liées en premier lieu aux deux mots suivants : *complexe* et *imaginaire*[10].

9 Centre Régional des Métiers de l'Éducation et de la Formation où les professeurs stagiaires suivent une année de qualification qui se décompose en deux semestres chacun est composé de 13 semaines, au cours de l'année ils bénéficient de 12 semaines d'étude théorique et 14 semaines de pratique.

10 L'appellation « imaginaire » est due la première fois à René Descartes en 1637 dans une note marginale de son livre *la géométrie*.



2.2. Les représentations liées à la dualité « imaginaire / réel »

Dire que les nombres complexes sont complexes veut-il dire que les autres nombres qu'a rencontrés l'étudiant dans son parcours de scolarité sont non complexes ou bien simples et dans quel sens peut-on voir ou concevoir cette simplicité ?

Dire aussi que ces nombres sont imaginaires : sont-ils vraiment plus imaginaires que les nombres réels car comment peut-on croire à la matérialité de l'infinité des nombres après la virgule du l'écriture décimale du nombre réel « racine carrée de 2 » par exemple ?

On ne compte pas ici mener un débat philosophique, mais ce sont les deux premières questions qu'on a pu mentionner lors des discours pédagogiques avec des étudiants à la marge de la partie pratique sous forme d'activité mathématique proposée autour des nombres complexes. Car la majorité des étudiants dégage un concept abstrait de ces nombres, cet aspect semble lié plutôt à la nature des adjectifs, au lieu que les étudiants les perçoivent comme de simples qualificatifs donnés à des *objets mathématiques*.

Les représentations issues de cette terminologie – laquelle provient d'un héritage historique – ont un statut épistémologique qui nécessite, à notre avis, des explicitations.

2.3. Perception didactique du rôle de l'histoire des mathématiques

Nous postulons qu'il n'y a pas un savoir mathématique important sans une histoire collective ou personnelle. Son objectif est d'améliorer le processus d'apprentissage des mathématiques au lycée, et aussi de permettre aux lycéens d'acquérir des valeurs positives envers cette discipline. Nous allons donc maintenant discuter l'approche de l'intégration des notions historiques dans le cours, que cela soit dans un enseignement spécifique, par exemple : celui de la série sciences mathématiques, ou comme un petit paragraphe à la marge du cours pour les séries littéraires.

Nous pensons qu'une telle initiative peut changer la conception même des mathématiques chez les étudiants tout en les faisant imiter le rôle des mathématiciens de l'époque, comme le suppose Douady (1992) :

> Pour obtenir que les élèves dans leur ensemble acquirent des connaissances au sens ci dessus, notre hypothèse est que l'enseignement doit intégrer dans son organisation des moments où la classe simule une société de chercheurs en activité.

Pour faciliter la lecture de notre allégation, nous proposons le cadre théorique schématisé sous forme du triangle ci-après :

L'histoire des mathématiques et la motivation

On peut certes être nombreux à partager l'idée que généralement un problème mathématique – en particulier scolaire – ne va pas seul, et que le processus de sa résolution ne se limite pas à être un des facteurs de la transposition de savoirs mathématiques, mais aussi qu'il participe d'une transposition épistémologique, et aussi psychologique (cf. Conne 2004). Donc, dans cette vision, nous pensons qu'avant tout acte d'apprentissage l'enseignant doit d'abord transmettre à l'étudiant le désir d'apprendre, qu'il doit le motiver en permanence, car il se peut que l'étudiant possède la faculté et le potentiel de travailler son activité, mais qu'il choisisse de ne pas agir ou collaborer car tout simplement il n'est pas motivé.

Dans cette optique, l'histoire des mathématiques peut servir comme outil pour corriger le désintéressement des étudiants face à cette discipline, en déclenchant au moins leur curiosité qui est aussi un type de motivation – dite motivation cognitive. Ceci peut être fait depuis le niveau élémentaire, par exemple : quelle est l'origine historique des symboles mathématiques algébriques : plus, moins, racine, égale, des chiffres tels que nous les représentons sur le papier et qui ne sont en fait qu'une matérialisation d'une image intellectuelle abstraite. Ces petites réflexions d'ordre motivant peuvent bien convaincre les étudiants d'essayer de faire une deuxième lecture intérieure sur leur connaissance, et par suite changer la phase de l'institutionnalisation des savoirs dans le processus d'acquisition.

De telles activités mathématiques liées à l'histoire ont pour but de rendre l'étudiant acteur, et de lui donner un certain contrôle des objets mathématiques développés, ceci par le questionnement, la création et l'imagination. Ainsi le fait de dire à l'étudiant qu'on va faire de l'histoire des mathématiques attire son attention sur la possibilité pour lui d'une deuxième chance pour consolider, remédier, corriger et construire des savoirs déjà enseignés. Il s'agit aussi de surprendre les adolescents en leur faisant vivre avec plaisir ce qui apparaît comme statique et axiomatique dans l'énoncé du savoir sur les cahiers (cf. Giordan 2005). Nous pensons que cette motivation peut pousser l'étudiant à trouver un sens à ses actes et aux processus intellectuels. Nous reviendrons sur cette notion de *sens* dans le paragraphe 3.2.3 qui traite de la situation- problème.

L'histoire des mathématiques et l'interdisciplinarité

La mathématique est un réservoir d'outils, de formes et d'objets fictifs utiles, géré par une organisation et un ordre logique, bien entendu, qui se transmet de génération en génération ; et le plus important c'est que ces outils peuvent se réemployer dans d'autres disciplines. Or, au niveau du lycée on ne demande pas aux étudiants de produire un savoir mathématique, mais on leur propose dans les classes un savoir-faire mathématique ; il y a même des auteurs qui préfèrent utiliser *méthodes mathématiques* au lieu du mot *mathématiques.*

Le développement de la majorité des disciplines scientifiques a utilisé les mathématiques tout au long de l'histoire; nous allons rappeler sommairement des exemples de liens entre les sciences et l'évolution des mathématiques dans l'histoire (on se limitera aux notions figurant dans le programme de lycée) :

- le domaine de l'architecture et de l'art et leur relation avec le nombre d'or ;
- la fabrication de papiers format A4 et le nombre racine carrée de 2 ;
- les solutions chimiques et fluides et la notion de proportionnalité ;
- le microscope et la notion d'homothétie ;
- le domaine pharmaceutique et la statistique ;
- le domaine de l'informatique, de la technologie, et de l'algorithmique ;
- le domaine de la géographie et le passage de la représentation de la dimension physique à la notion de plan ;
- la datation par le carbone 14 et la notion d'exponentielle ;
- le calcul de surfaces et volumes et la notion d'intégrale ;
- les forces mécaniques et la notion de vecteur et produit scalaire ;
- la vitesse et la notion de dérivation…

On peut à cet égard se référer à un document remarquable pour plus de détails à ce sujet (cf. Desrochers, Trembblay, Mercier & Sassi 2005).

Dans le paragraphe suivant, nous allons essayer de remplacer le mot interdisciplinarité par le mot *réalité*, et ceci dans le but d'installer une situation d'apprentissage particulière.

3. L'histoire des mathématiques et la construction d'une situation problème

Dans l'approche socio-constructiviste de l'apprentissage des connaissances mathématiques, figure la pédagogie de la situation-problème comme situation d'enseignement. Nous allons essayer de voir l'impact, en termes d'assistance et motivation, du rôle que peut ajouter l'histoire des mathématiques dans le but d'une meilleure séquence d'apprentissage, selon les caractéristiques didactiques adoptées respectivement par Douady, Charnay et Peltier. On peut même aller un peu plus loin et donner un nom pertinent pour la proposition qu'on va essayer de défendre à la lumière des réflexions des trois auteurs cités ci-dessus ; il s'agit de la notion de *situation–problème historique* : (*SPH*).

3.1. Le relais sens / réalité

Un problème mathématique scolaire approprié (au savoir et à l'enseignement) possède une fonction particulière et articulaire, à notre avis, celle d'établir un positionnement d'équilibre entre les aller-retours tissés entre sens et réalité ; et à cet égard définissons d'abord ce que nous entendons par les deux mots sens d'une part et réalité d'autre part.

Nous n'accordons aucun sens prédéterminé, les mots «sens» ou «réalité» n'ont pas désormais de signification fixe, axiomatique ou prédéfinie : la signification leur vient par conséquent de l'action d'introduire la dimension de l'histoire des mathématiques dans le problème.

Brousseau définit le *sens* d'une connaissance mathématique comme suit :

> …l'ensemble des conceptions qu'elle rejette, des erreurs qu'elle évite, des économies qu'elle procure, des formulations qu'elle reprend, etc...

Voyons maintenant la trace de mot *sens* dans les idées des trois auteurs déjà mentionnés :

> Dans la constitution du sens interviennent les relations développées dans le contexte avec d'autres concepts relevant du même domaine ou d'autres domaines. (Douady, 1992)

> L'un des enjeux essentiels en même temps qu'une des difficultés principales de l'enseignement des mathématiques est précisément que ce qui est enseigné soit chargé de signification, ait du sens pour l'élève. (Charnay, 1987)

> Le problème doit servir de référence pour la notion et pour la classe…il serait très regrettable et dommageable d'exclure certains élèves des situations censées permettre de construire du sens et d'hypothéquer ainsi toute possibilités ultérieures de faire appel à cette situation pour mobiliser la mémoire de tous les élèves. (Peltier, 2000)

En ce qui concerne le mot *réalité,* nous nous réfèrons à la définition de Sackur & Maurel (2000) :

> Dans la perspective piagétienne, le sujet interagit avec son environnement: la réalité. …. nous avons besoin d'une «réalité mathématique» à laquelle va être confronté un élève qui fait des mathématiques… Il nous faut donc définir une «réalité» de nature conceptuelle qui permet de regarder et d'interpréter l'activité d'un sujet qui construit ses connaissances mathématiques… La réalité mathématique n'étant ni matérielle, ni symbolique, (nous ne sommes pas platoniciens), une de nos hypothèses de travail est qu'on peut rencontrer cette réalité dans la confrontation avec autrui, de préférence un autrui élève, dans un dialogue durant lequel on fait l'expérience de la contradiction.

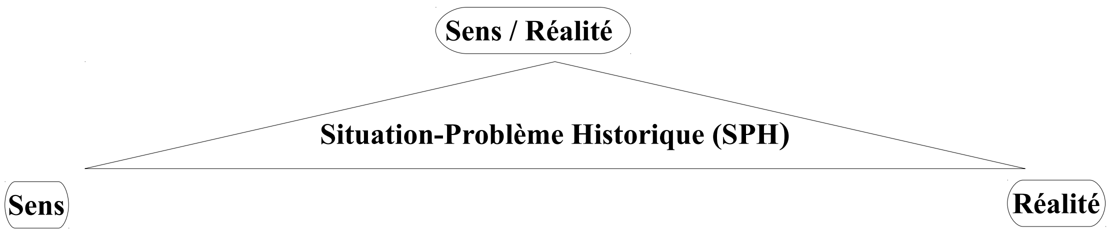
3.2. La situation-problème historique (*SPH*)

La mise en place de notre activité peut supposer le repérage au préalable d'une conception erronée d'ordre épistémologique. Il est important de souligner que l'histoire des mathématiques a cette particularité de nous éclairer autant sur les méthodes anciennes de cette discipline que sur la manière dont ont pu être pensés et élaborés ses objets. L'enjeu attendu des taches des étudiants existe lorsque les deux champs (histoire et mathématiques) entrent explicitement en contact au moment où le double contenu cible se réalise. Pour préciser cette caractéristique, je citerai de Vittori :

> Ce qui intervient dans une tache S n'est pas la rencontre de l'histoire avec les mathématiques car ces deux domaines, en tant que domaines universitaires, ont trop peu en commun. Avec les taches S, la jonction se fait à un autre niveau, celui de l'épistémologie des mathématiques à l'œuvre. …Il est clair que la modification épistémologique locale requise dans les taches S-fortes renvoie à une histoire des mathématiques qui se donne pour but d'éclairer les changements dans la manière de penser les objets de cette discipline. (de Vittori, 2015)

Un concept mathématique perd pratiquement son sens si on ne prend pas en considération sa fonction, c'est à dire sa fonction d'origine en tant qu'outil. Cette dernière a nécessité bien évidemment des siècles de travaux avant de prendre le statut d'objet connu dans la culture scolaire. Ainsi la situation didactique dont nous voulons disposer et que nous allons nommer *situation-problème historique* (*SPH*) se caractérise par le fait que le principal acteur qu'est l'étudiant - motivé par la curiosité historique – puisse avoir bien conscience de ce processus d'acquisition de la notion étudiée. S'il l'utilise de façon pertinente, on peut dire qu'il a touché au point d'équilibre dans le relais : sens - réalité et par suite il aura plus de chance pour faire évoluer cette notion et l'utiliser dans d'autres champs mathématiques.

Pour schématiser, à titre de synthèse, nos réflexions autour de *la situation-problème historique,* nous proposons un nouveau schéma du paragraphe 3.2 qui est le suivant :



En ce qui concerne la modalité de mise en œuvre de la SPH, elle doit de préférence être faite collectivement sous l'animation de l'enseignant dans une séance préliminaire avant le cours tout en profitant du travail en petits groupes.

L'expérience que nous allons présenter est un exemple d'une *situation-problème historique*, qui porte sur l'origine historique des nombres complexes, à travers laquelle nous espérons trouver quelques conclusions justifiant notre thèse.

4. Un exemple de *situation-problème historique*

4.1. L'origine historique des nombres complexes : préparatifs de l'expérience

Notre expérience s'est déroulé avec huit classes différentes de la deuxième année du baccalauréat (série scientifique) : trois établissements privés avec une moyenne de 25 élèves par classe, et cinq lycées publics avec une moyenne de 35 élèves. Après une séance de micro enseignements dans notre centre de formation[11], avec huit groupes de professeurs stagiaires, nous avons débattu des scénarios pédagogiques préliminaires. Chaque groupe est composé de trois animateurs, chacun d'eux connaît bien ses consignes.

Nous voulons que cette expérience s'effectue avant l'enseignement du chapitre des nombres complexes. Donc notre équipe va travailler dans un délai couvrant deux semaines de cours, en tenant compte du décalage possible de l'avancement des cours dans chaque établissement.

Pour profiter de la dynamique des groupes, nous avons décidé que le travail se ferait en groupes de trois ou quatre élèves, avec trois types de répartitions :

- premier type : on a pris une liste proposé par le professeur de la classe qui a organisé des groupes d'élèves de bon niveau, d'assez bien, et de moyens ;
- deuxième type : on a formé des groupes de façon aléatoire ;
- troisième type : on a laissé le choix aux étudiants eux-même de former les groupes.

Pour la mise en commun des écritures des synthèses, nous avons préféré que les étudiants passent au tableau et notre rôle est principalement celui d'animateurs, vu que les ingrédients mathématiques pour travailler sont déjà acquis par les étudiants, et qu'ils les maîtrisent assez bien : les théorèmes de la fonction réciproque et des valeurs

11 Je remercie vivement mes collègues formateurs H. FLIOUET, A. JHILAL, L. BOLAMBA et R. REBAI pour leurs discussions fertiles et leurs collaboration.

intermédiaires relatifs aux fonctions numériques, la lecture géométrique de l'intersection des graphiques avec l'axe des abscisses, l'identité remarquable d'ordre trois $(a+b)^3$, la résolution algébrique d'une équation de second degré.

Le sujet à travailler est composé de trois parties. Il n'y a pas de contrainte de temps, dans la limite de ce que la totalité de la séance de l'expérience ne dépasse pas les trois heures et trente minutes. Le déroulement de l'expérience est programmé l'après-midi d'un mercredi ou bien d'un vendredi, dans les activités d'un club de mathématiques, ou bien comme séance complémentaire de mathématiques. L'enseignant intervient après chaque partie pour l'institutionnalisation des conclusions.

Énoncé de la situation-problème historique

A titre de motivation, et comme petite introduction historique, l'enseignant présentera l'utilisation du cadre géométrique, au tableau, *via* la résolution d'une équation quadratique, géométriquement par *la méthode d'Al-Khawarizmi* ; et aussi la résolution d'une équation cubique par *la méthode d'Al-khayam* (cf. paragraphe 1). Puis il distribue la situation suivante :

Partie 1. Résolution de l'équation (E): $x^3=6x+6$

A.1.a – En utilisant le théorème de la fonction réciproque montrer que l'équation $x^3=p$, où p est un réel, admet une et une seule solution réelle, qu'on va la noter $\sqrt[3]{p}$.

b – Écrire à l'aide de la nouvelle notation les réels suivants : 2 ; 5 ; –3 ; –10 ; –1.

2. En utilisant le graphique de la fonction f définie par $f(x)=x^3-6x-6$, déterminer le nombre des solutions réelles de l'équation (E): $x^3=6x+6$.

B. 1. On pose $x=u+v$, où u et v sont des nombres réels.

a – Montrer que $x^3=3uvx+u^3+v^3$.

b – Montrer que si le couple (u,v) est solution du système (S): $u^3+v^3=6,\ uv=2$, alors le nombre $x=u+v$ est solution de l'équation (E).

Généralisation : Méthode de Cardan (**1501- 1576**)

On considère l'équation $x^3=px+q$. Montrer que l'une des solutions réelle – si elle existe- s'écrit sous la forme suivante :

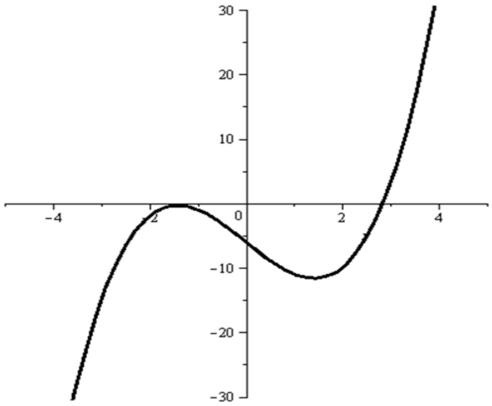
$$x=\sqrt[3]{\{\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2-(\frac{p}{3})^3}\}}+\sqrt[3]{\{\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2-(\frac{p}{3})^3}\}}.$$

Vérifier le cas précédent pour $p=q=6$.

2. On pose $U=u^3$ et $V=v^3$.

a. Montrer que le couple (u,v) est solution du système (S) si et seulement (U,V) est solution de nouveau système (S'): $U+V=6,\ UV=8$; puis en déduire que U et V sont solutions de l'équation quadratique $x^2-6x+8=0$.

b. Donner la solution réelle de l'équation $x^3=6x+6$.



Partie 2. Résolution de l'équation (F): $x^3 = 15x + 4$

1. Donner par lecture de graphique ci-dessous le nombre des solutions de l'équation cubique (*F*).

2. En utilisant la méthode de Cardan, montrer que l'une des solutions réelle de l'équation (*F*) s' écrit sous la forme

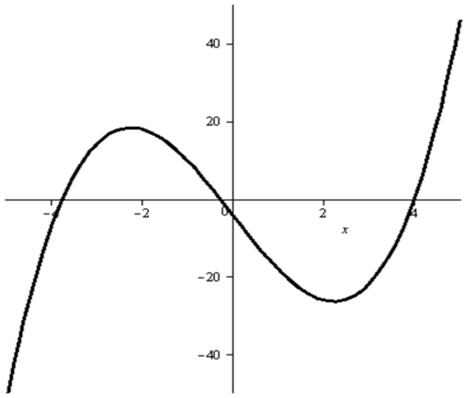
$$x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

3. On convient que $\left(\sqrt{(-1)}\right)^2 = -1$. Développer les expressions suivantes :

$\left(2-\sqrt{(-1)}\right)^3$ et $\left(2+\sqrt{(-1)}\right)^3$.

(*Ceci est la question primordiale, qui peut être omise selon les choix de l'animateur*).

4. Calculer une solution réelle de l'équation (*F*), on posant $\sqrt{(-121)} = -11\sqrt{(-1)}$.



5. En déduire les autres solutions réelles de l'équation (*F*).

Partie 3. méthode de Cardan. Applications

Résoudre par la méthode de Cardan les équations suivantes :

a. $2x^3 - 30x - 8 = 0$, b. $x^3 - 7x - 6 = 0$, c. $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Le sujet est donc composé de deux parties, chacune aborde une équation cubique bien choisie (on a gardé l'originalité historique du texte, ce sont les mêmes équations utilisées au seizième siècle, même si cela peut poser dans certains cas un problème didactique, voir Rogalski 2001). Généralement, il n'y a pas de difficultés remarquables dans les consignes, tout élève de Terminale scientifique de niveau moyen peut s'emparer du problème, sauf pour la question 3 de la partie 2 que l'enseignant peut proposer comme travail individuel car c'est le début de la découverte de l'outil ***i***.

La première question de la partie 1 est une question préliminaire qui fait paraître le symbole $\sqrt[3]{\ }$, notation qui trouve son sens car son existence a été montrée à l'aide d'un théorème que l'étudiant connaît (celui de la fonction réciproque). Pour lui donner un statut plus réel, on a demandé aux élèves, dans un moment motivant de divertissement, de nous proposer d'autres notations. L'animateur peut dans cette séquence se référer à l'origine de l'écriture de symboles pour les racines au seizième siècle ; voici un support qu'on peut proposer (cf. Hauchecorne & Surateau 1996) :

8. Notations cossiques

Christoph Rudolff introduit en 1525 la notation $\surd$ pour la racine carrée, $\surd\surd\surd$ pour la racine cubique et $\surd\surd$ pour la racine quatrième.

M. Stifel adopte $\surd z$ pour désigner $\sqrt{\ }$, puis plus tard il écrit $\sqrt{\ }$

$\surd\&$ pour désigner $\sqrt[3]{\ }$

$\surd zz$ pour désigner $\sqrt[4]{\ }$

Il écrit AA pour x^2

AAA pour x^3.

Figure 3. *Notations cossiques*

9. Notation de Cardan (Ars magna)

Cardan écrit l'égalité :

$$(5+\sqrt{-15})\cdot(5-\sqrt{-15})=25-(-15)=40$$

sous la forme :

5 p : Rm : 15,

5 m : Rm : 15,

25 m : m : 15qd est 40.

Il note $\sqrt{7+\sqrt{14}}$ sous la forme R.V.7p : R14.

Le signe V indique que tout ce qui suit est sous le signe radical.

Figure 4. *Notation de Cardan*

Le groupe des élèves, ainsi, joue le rôle d'un petit groupe de chercheurs en mathématiques, car chacun a essayé de défendre et argumenter sa notation à partir de ses propres considérations. En outre, tout en répondant à cette question ils écrivent et approuvent eux même des quantités négatives sous des radicaux, et voilà d'après notre hypothèse de travail la première fois où intervient l'effet du relais : *sens–réalité*.

Dans la deuxième question de la partie 1, on a procédé par changement du cadre algébrique au cadre géométrique pour confirmer chez l'élève et tenir pour acceptable l'existence d'une solution réelle de l'équation cubique envisagée. La section B présente un processus d'une méthode de calcul, utilisée déjà par Cardan (et inventée par Tartaglia, voir Toscano 2011) ; on vise à ce que l'élève se familiarise – ce qui est tout à fait faisable – avec cette technique de résolution dans ce premier exemple élémentaire.

La question suivante donne la formule générale d'une solution connue sous le nom de formules de Cardan. Ici, il s'agit d'un virage logique assez important, dont l'animateur va profiter pour pousser le groupe à voir s'il est possible de jouer avec les paramètres pour avoir un nombre négatif sous un radical.

Dans la partie 2, avec l'équation cubique donnée dont les solutions sont toutes réelles, l'élève se trouve face à une formule qui a du sens pour lui, mais *la réalité* exige qu'elle s'écrive sous une autre forme. Ici, le débat fondamental se déclenche ; on peut laisser l'enseignant animer cette séquence selon ses choix : omettre par exemple la question 3, ou bien la reformuler selon les particularités pédagogiques du groupe.

On arrive enfin à un consensus qu'il est possible d'admettre l'écriture *racine de moins un* : c'était l'un des objectifs majeurs cherché par notre *situation-problème historique*.

4.2. Quelques points remarquables dans la séquence de la SPH

Commentaires didactiques

Pour tout remaniement possible ou dévolution de notre SPH, nous allons souligner succinctement quelques éléments d'ordre didactiques :

- Une première variable didactique consiste à changer les valeurs du nombre p dans l'équation $x^3=p$ (question 1.a de la partie 1) pour pousser les élèves (logiquement) à écrire des nombres négatifs sous un radical.
- Une autre variable didactique importante est le couple (nombre de solutions ; signe du discriminant $\Delta=q^2+4(\frac{p}{3})^3$ dans la formule de Cardan) qui influence et justifie le choix des équations cubiques proposées.
- La question 3 de la partie 2 peut être omise selon le projet pédagogique de l'enseignant, pour souligner le rôle décisif de Bombelli (le travail mathématique des bons élèves « chercheurs » intervient, ici, comme un défi pour chercher et voir qu'un nombre réel peut être égal à une formule complexe comportant des racines cubiques).
- La possibilité de formulation dans plusieurs cadres (géométrique, algébrique, graphique ou numérique) de la résolution des équations proposées dans notre SPH, est l'une des caractéristiques auxiliaires qui favorise la construction du sens de l'outil mathématique (nombre imaginaire ***i***) chez les élèves.

- Il convient aussi de mentionner l'influence fortement motivante lors de l'introduction de la partie préalable concernant la résolution d'une équation quadratique par une méthode « non ordinaire » (la méthode d'Alkhawarizmi), étape qui a incité la totalité des élèves à s'engager dans la SPH avec un degré remarquable de motivation grâce à leur attitude a priori positive à l'égard du champ culturel et historique. Ce facteur est une des caractéristiques primordiales de la SPH.

Moments surprenants

On a demandé aux professeurs stagiaires, lors de nos préparations, de noter tout acte qui leur apparaît intéressant, étrange ou distrayant ; nous en présentons quelques uns dans ce qui suit.

- Un groupe de bon niveau a demandé des exemples d'applications. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on a ajouté la troisième partie avec des applications ; cependant on a noté une grande compétition entre les élèves pour trouver les solutions des équations algébriques de troisième degré. Parmi eux il y en a certains qui ont appris par cœur la formule de Cardan, d'autres élèves, par la suite, ont même demandé des équations cubiques sous la forme classique pour discuter la procédure de transformations du modèle proposé dans la SPH.
- Lors de la répartition des élèves en petits groupes selon leurs notes de dernier devoir surveillé on a senti un départ non encourageant de la séance. Pourtant, pendant le déroulement de la SPH, on n'a pas noté une grande différence en ce qui concerne l'intégration et la communication de cette catégorie d'élèves. On propose donc d'éviter ce genre de répartition à la base des notes de classe dans le travail par groupes.
- Un des élèves a demandé s'il y avait possibilité de voir les images des mathématiciens de l'époque mentionné dans la SPH, et l'un de ses camarades a sorti sa tablette et un autre son téléphone portable pour montrer quelques portraits en utilisant Internet.
- On a noté que les élèves ont assimilé ce qu'on entend par outil mathématique et la possibilité qu'il devienne - après un développement de son usage - un objet mathématique ; et on a discuté dans ce cadre quelques considérations d'ordre logique mathématique en particulier la valeur de vérité d'une proposition ou de l'hypothèse de départ – chose qui ne prend pas, en général, une grande place en classe dans la résolution d'un problème mathématique.
- Après avoir terminé la SPH, un groupe a proposé de changer le nom des nombres complexes par d'autres noms : nombres composés, extraordinaires, simples, auxiliaires…
- Un autre groupe a attiré l'attention des autres sur la multi-nationalité des mathématiciens qui ont travaillé sur le sujet des nombres complexes.

Conclusion

Dans ce travail nous espérions discuter une approche de la signification du mot sens des connaissances chez les étudiants de lycée, mais cette réflexion nous a mené à évoquer un autre mot, celui de la réalité. En définitive, nous pensons qu'établir une position d'équilibre de l'entendement chez l'étudiant, dans le relais sens-réalité, aiderait fortement à améliorer la qualité de l'enseignement des mathématiques.

Nous postulons que l'histoire des mathématiques est l'une des clés auxiliaires et déterminantes dans le dit relais ; pratiquement nous avons proposé une activité didactique spécifique nommée situation-problème historique qui peut être une réponse possible à la question initiale « Une introduction aux nombres complexes en suivant la voie historique de la résolution d'équations cubiques est-elle pertinente et viable dans le système d'enseignement actuel ? »

Cette expérience travaillée en classe a permis aux étudiants de changer leur vision et leur conception des mathématiques, et de se rendre compte de plusieurs points.

- Ils ont pu prendre conscience de la dialectique outil-objet sous une forme explicite, en travaillant une situation mettant en jeu des pratiques de formulation des mathématiciens dans leurs recherches.
- Ils ont réalisé que la discipline « mathématiques » est certes devenue une science axiomatique, mais c'est un produit qui a nécessité des siècles de développements de recherches.
- Ils ont pu changer l'idée au sujet des anciens mathématiciens : ce sont des êtres humains qui ont aussi fait des erreurs, réclame un groupe !
- L'universalité des mathématiques est un aspect de la réalité, qui a poussé les étudiants à faire un effort de plus dans la rédaction mathématique afin de convaincre leurs collègues.
- Ils ont commencé à concevoir les obstacles des mathématiques anciennes, illustrés dans le travail des chercheurs mathématiciens d'une part, et les comparer avec les mathématiques scolaires d'autre part dont les problèmes disposent souvent de solutions.

La situation-problème historique est une activité principalement de caractère créatif et doit être mise en action dans une séance complémentaire, pour avoir la validation des outils mathématiques à enseigner, puis être suivie, bien entendu, des activités mathématiques ordinaires ; cette démarche donnera sûrement aux étudiants des valeurs positives envers la matière.

La motivation forte qu'on a pu constater chez les étudiants dès lors que l'on a parlé historiquement de tels outils mathématiques nous a incités à travailler sur la possibilité de produire un petit livre des situations-problèmes historiques qui pourront servir de modèles.

Références

ARTIGUE M., DELEDICQ A. (1992) *Quatre étapes dans l'histoire des nombres complexes : quelques commentaires épistémologiques et didactiques*, Cahiers de Didactique des Mathématiques, Série 2, n° **15**, IREM de l'université Paris-Diderot.

BROUSSEAU G. (1983) Les obstacles épistémologiques et les problèmes d'enseignement, *Recherche en didactiques des mathématiques.* La Pensée Sauvage, **4.2**, p.170.

CHARNAY R. (1987) Apprendre par la résolution de problèmes. *Grand N*, **42**, Grenoble, CRDP.

Commission Inter-IREM (1998) *Épistémologie et Histoire des Mathématiques Images, Imaginaires, Imagination*. Ellipses, Paris.

CONNE F. (2004) Problème de transposition didactique. *Petit x*, **64**, 62-81. IREM de Grenoble.

COLLETI J. -P. (1977). *Histoire des nombres complexes, aperçu historique et quelques considérations pédagogiques*. Cegep Montmorency

DESROCHERS J., TREMBLAY K., MERCIER E. et SASSI M. (2005) *L'histoire dans l'enseignement des mathématiques : Présentation d'un outil pédagogique*. Université du Québec à Montréal.

DE VITTORI T. (2015) Les tâches des élèves dans une activité mathématique à dimension historique. *Petit x*, **97**, 5-26. IREM de Grenoble.

DOUADY R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **7(2)**, 5-31. La Pensée Sauvage, Grenoble.

DOUADY R. (1992) Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques. *Thèse d'État*, université Paris 7.

DOUADY R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repère- IREM*. **6**, 132-158 .

DORIER, J.-L. (2000) Use of history in a research work on the teaching of linear algebra, in V. Katz (ed) *Using history to teach mathematic – An international perspective* MAA notes #51, Washington D.C. : The Mathematical Association of America (Inc.), 99-110.

FLAMENT D. (2003) *Histoire des nombres complexes : Entre algèbre et géométrie. CNRS Histoire des Sciences*. Paris: CNRS Éditions.

GIORDAN A. (2005) Vive la motivation ? N°**429-430** : *Dossier : "Cette fameuse motivation"* CRAP *Cahiers pédagogiques*, Université de Genève.

HAUCHECORNE B. et SURATEAU D. (1996) *Des mathématiciens de A à Z*. Ellipse, Paris.

ROBERT A., TENAUD I. (1989) Une expérience d'enseignement de la géométrie en terminale C. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **9(1)**, 31-70. La Pensée Sauvage, Grenoble.

NORREDINE M. (1998) *Histoire des équations algébriques.* chez Diderot Éditeurs.

PELTIER M-L. (2000) Le napperon. *Grand N*, **68**, IREM de Grenoble.

POITRAS L. (2007) *Origine algébrique et géométrique des nombres complexes et leur extension aux quaternions; Fondements de la géométrie.* Mémoire présenté à l'université du Québec à Montréal.

ROGALSKI M. et al. (2001) *Carrefours entre analyse algèbre géométrie*, Ellipses, Paris.

SACKUR C. et MAUREL M. (2000) Les inéquations en classe de la seconde une tentative pour enseigner la nécessité des énoncés mathématiques. *Petit x*, **53**, 5-26. IREM de Grenoble.

SCHUBRING G. (1986) *L'histoire de l'enseignement des Mathématique comme sujet de recherches en didactique des Mathématiques*, Cahier de Didactique, Série1, n° **25**, IREM de l'université Paris-Diderot.

TOSCANO F. (2011) *La formule secrète.* Éditeur Belin, Pour la science, Paris.

YOUSCHKEVICH A.P (2000) *Les mathématiques arabes du 8ème au 15ème siècle.* Vrin.