NOTION DE LIMITE ET DÉCIMALISATION DES NOMBRES RÉELS : UNE INGENIERIE DIDACTIQUE [1]

LE THAI BAO Thien Trung
Université Pédagogique de Ho Chi Minh Ville

Résumé. L'étude de la transposition didactique des notions de limites et de nombres guide notre recherche. Nous présentons ici quelques éléments de cette étude ainsi qu'une ingénierie didactique qui nous permet d'aborder la question de la viabilité d'un enseignement visant à introduire (dans les conditions et les contraintes actuelles au Viêt Nam) un point de vue topologique sur la notion de limite en relation avec la décimalisation des nombres réels dans un environnement « calculatrice ».

Mots clés. Notion de limite, Notion de nombre réel, Décimalisation des nombres, Problématique de l'approximation numérique, Milieu

Abstract. The study of the didactical transposition of the notions of limits and numbers guide our research. Here we present some elements of this study along with a didactical engineery that allows us to tackle the question of viability of a teaching aiming at introducing (in today conditions and constraints in Vietnam) a topological viewpoint on the notion of limit in relation with the decimalisation of real numbers in a environment of a "calculator".

Key-words. Limit, Real numbers, Decimalisation of number, numerical approximation questioning, Milieu.

Introduction

Dans un article précédent (Le Thai Bao 2012) nous avions montré que la construction de la notion de limite ne pouvait éviter le problème de la décimalisation des nombres réels et de leur écriture décimale, alors même que la principale raison d'être apparente de la notion de limite enseignée au Lycée est de répondre à la question du calcul algébrique des limites des fonctions en un point ou à l'infini. Cette raison d'être s'appuie sur la supposition implicite que ces limites existent ou sont infinies – et donc restreint la signification de « avoir une limite » ou « être une limite ». Notre hypothèse forte dans ce texte était que l'approximation décimale pouvait – était nécessaire pour – donner du sens à la notion de limite. Nous montrions aussi que la question de la décimalisation des nombres réels avait été posée, épistémologiquement, lors de l'introduction historique de la notion de limite.

Tout d'abord, nous reprenons dans le présent texte l'hypothèse de travail issue de cette première enquête à propos des relations entre limite et décimalisation des nombres réels :

> une construction cohérente de la notion de limite ne peut pas éviter une (re)construction des nombres réels, en particulier ne peut pas éviter le problème de la décimalisation des nombres réels, outillée par les concepts de l'analyse et mettant au centre de cette reprise les écritures décimales illimitées. (Lê Thai Bao 2012, p. 35)

1 Cet article s'appuie sur Lê Thai Bao T. T. (2007)

L'étude des traités français de Lebesgue (1931) et Bourbaki (1960), permet de montrer que le statut possible de l'écriture décimale illimité (EDI) dans la décimalisation des nombres réels reste ambigu. Une EDI *peut* représenter :

> – soit une suite particulière de décimaux satisfaisant un critère de convergence (axiome des segments emboîtés[2] dans la construction de R chez Lebesgue),
> – soit la limite de cette suite (développement décimal[3] d'un réel chez Bourbaki). (op. cité, p. 39)

Dans l'enseignement secondaire (EMS) au Viêt Nam, les nombres réels (rationnels et irrationnels) sont définis au niveau du collège en classe 7[4] comme l'ensemble des EDI. Nous avons étudié le rapport institutionnel aux EDI au Viêt Nam à l'aide d'un questionnaire adressé à des élèves de classe de seconde et de terminale ainsi qu'à des futurs enseignants de mathématiques, étudiants d'Ecoles Normales Supérieures (ENS) ; le constat est que ce rapport institutionnel est celui du Collège :

> – L'écriture décimale illimitée n'a ni le statut de suite numérique convergente de nombres décimaux ni celui de « limite » de cette suite même quand la notion de limite a été introduite. (op.cité, p. 43)
> – L'EDIP9[5] « 0,999… » est, pour une très large majorité des élèves de EMS et des futurs enseignants des ENS, un nombre, inférieur strictement à 1 et le plus proche de 1 (ordre discret[6]). Ce « nombre » EDIP9 est de plus, pour la plupart des élèves d'EMS et des futurs enseignants d'ENS observés, un nombre irrationnel. (Le Thai Bao 2012, p. 48)

Ces résultats vont dans le même sens que ceux de Neyret (1995) et Margolinas (1988) pour la France. Nous avons repéré en particulier dans les réponses des élèves au questionnaire l'obstacle « horreur de l'infini » (Sierpinska 1985) observable au travers de l'écriture *infini-fini* comme 3,(0)1 que les élèves expliquent comme suit : « *il y a une infinité de zéros et 1 de la fin.* ».

> Au deuxième obstacle de Cornu correspondrait tout le groupe d'obstacles nommé chez nous « horror infiniti ». C'est le groupe le plus important, il renferme les problèmes liés à l'idée de constante infiniment petite, la question de savoir si la limite doit ou ne doit pas être atteinte et aussi les problèmes que l'auteur intitule « autres obstacles ». (Sierpinska 1985, p. 64)
> On trouve dans ce groupe, les refus du statut d'opération mathématique pour le passage à la limite (1.1.-1.4.).
> – Il s'agit de se convaincre du fait que : […] Le passage à la limite considéré comme la recherche de ce dont nous ne connaissons que des approximations. […] (op. cité, p. 39)

De plus, rappelons que le point de vue dominant de l'enseignement de la notion de limite au Viêt Nam et dans la majorité des pays (Trouche 1996, Bosch et al. 2002 par exemple) est celui de l'algèbre des limites.

---

2 Il existe un nombre réel unique appartenant à tous les segments de chaque famille de segments emboîtés.

3 Pour tout nombre réel x, on a : $x=\lim_{n\to\infty} r_n$ où $r_n=p_0+\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{10^k}$ et p_0 ; u_k sont des entiers

4 équivalent de la 5ième en France.

5 EDIP9 : écriture décimale illimité de période 9.

6 Par exemple, « n est le successeur de 17 » a une solution dans **N**, mais pas dans **D.** (Brousseau 1987, p. 449).

> Ces constats conduisent à poser la question suivante : dans les conditions actuelles de l'enseignement secondaire des mathématiques (algèbre des limites) est-il possible d'organiser dialectiquement la prise en charge des deux passages fondamentaux pour l'analyse que sont :
> – le passage de l'ordre discret dans N à l'ordre dense (non discret) dans D et D∞[7],
> – le passage de l'algèbre des limites à la problématique d'approximation de la notion de limite ? (Lê Thai Bao 2012, p. 49)

Avant de tenter d'apporter des éléments de réponse à cette question par la méthodologie d'une ingénierie didactique, examinons deux projets emblématiques déjà anciens de l'enseignement de la notion de limite, ceux de Cornu (1983) et du groupe AHA (1999) : Le problème de la décimalisation des nombres réels apparait-il ? En particulier celui des EDIP9 est-il posé ? Si oui, comment ? Quels obstacles épistémologiques font-ils rencontrer ?

1. Les projets d'enseignement de la limite de Cornu (1983) et du groupe AHA (1999)

1.1. Le projet de Cornu

En se référant aux obstacles épistémologiques dégagés par son analyse épistémologique du concept de limite, Cornu (1983) construit une séquence didactique basée sur un questionnaire en direction d'élèves de Première.

Cette séquence [dit Cornu] a essentiellement deux buts :

> • commencer avec les élèves l'apprentissage de la notion de limite. […]
> • observer, dans une situation en classe, ce qui se passe lors de l'apprentissage de la notion de limite. Le but du chercheur est de recueillir le maximum d'éléments d'information pour répondre aux questions qu'il se pose. Ces questions se regroupent en l'occurrence autour de deux pôles : tout d'abord une étude du vocabulaire employé par les élèves. Comme on le verra plus loin, les premières activités proposées tentent de mettre l'élève en présence de la notion de limite, sans faire usage du vocabulaire habituel lié à cette notion. Or, l'élève aura à s'exprimer, par écrit et oralement. Il devra donc utiliser des mots, des expressions. Nous avons cherché à favoriser l'expression des élèves, de façon à relever le type de vocabulaire qu'ils mettent en œuvre. Par ailleurs, l'observation avait aussi pour but de repérer les obstacles auxquels se heurte l'élève. [...] (Cornu 1983, pp. 133 -134)

Cornu intègre l'ensemble des questions de son questionnaire aux premières séances de l'enseignement de la notion de limite selon le programme des Premières B et C[8] de l'époque :

> Notre observation s'est donc située des le début de l'apprentissage, jusqu'à la définition formelle de la notion de limite, c'est-à-dire jusqu'à ce qui est la plupart du temps le début du cours [...] (Op. cité, pp. 137-138)

L'ensemble des questions de Cornu comporte différents types d'« approche » : géométrique, analyse, numérique au travers de développements décimaux et « mise en

7 Margolinas (1985) présente ainsi D∞ en se référant à Lebesgue (1931) : « Toute suite de chiffres indéfinie vers la droite et comportant une virgule ».

8 B correspond aux actuelles classes ES (Sciences économiques et sociales) et C à S (scientifique).

commun ». Nous nous intéresserons ici aux questions portant sur les développements décimaux, en particulier :

> I – Voici un nombre : 0,3
> et un autre nombre : 0,33
> et encore un nombre : 0,333
> … etc … : 0,3333
> 0,33333…
> 1/3 est-il dans la liste ?
> Y a-t-il dans la liste des nombres supérieurs à 1/3 ?
> Peut-on trouver un nombre a < 1/3 , plus grand que chacun des nombres de la liste ?
> Que signifie l'écriture 0,3333… ? Représente-t-elle un nombre ? Lequel ?
> II – On multiple chaque nombre de la liste précédente par 3. Que se passe–t–il ?
> III – On retranche de 1 chaque nombre de la liste obtenue en II. Que se passe–t–il ?
> IV – Voici une autre liste de nombre :
> 1,1
> 0,9
> 1,01
> 0,99
> 1,001
> 0,999
> Quel rôle joue le nombre 1 par rapport à cette liste ?
> V- Trouvez une autre situation analogue. (Op. cité, pp. 159 -160)

Ces questions portent *a priori* sur le lien analytique opéré par la notion de limite, en particulier comme borne supérieure, entre les fractions (1/3 et 1) et des « listes » qui sont implicitement des suites décimales illimitées[9].

> […] Dans I, on veut faire prendre conscience du rôle particulier que joue le nombre 1/3 par la liste proposée : il n'est pas dans la liste, et pourtant il n'en est pas loin… C'est en fait la notion de borne supérieure qui se trouve là. On pose également le problème de l'écriture 0,333…, écriture qui induit parfois chez les élèves l'idée qu'il existerait un « dernier nombre » avant d'atteindre 1/3. Dans II, on refait la même chose avec 0,999… ; mais cette fois, il faut trouver la limite. On passe ensuite à 0,1 ; 0,01 ; …, puis dans IV, on introduit une situation où la convergence n'est pas monotone. (Op. Cité, pp.141-142)

Cornu constate *a posteriori*, lors de l'analyse de l'expérimentation, que les EDI ne sont pas associées au mot « limite », mais activent richement les expressions désignant l'idée de l'infini. On retrouve l'*infini–fini* de Le Thai Bao (2004) dans l'expression « dernier 3 » de 0,333…

> […] Certains parlent du « dernier 3 » de 0,333… Le mot « limite » n'est toujours pas apparu ; mais cette activité a donné lieu à un vocabulaire assez riche : « valeur approchée », « se rapproche », « plus près… », « infini », « l'indéfiniment », « ne se finira jamais », « illimitée », etc… (Op. cité, p. 144)

Ce constat pose le problème du statut de nombre des EDI et du franchissement de l'obstacle « horreur de l'infini ».

9 Dans les suites décimales illimitée (a_n) $n\in\mathbf{N}$ d'un nombre réel a, chaque a_n est la valeur approchée par défaut ou par excès à 10^{-n} de a.

1.2. Le projet AHA

Le projet du Groupe AHA (1999) vise, selon les auteurs, une approche heuristique de l'analyse. Dans cette approche, les auteurs du Groupe AHA proposent des études mathématiques diversifiées sur la notion de limite, comme annoncé dans l'avant-propos : Qu'est-ce que l'Analyse mathématique ?

> [...] L'Analyse, cela peut être regardé de très très près (étudier des tangentes) ou de très très loin (étudier des comportements asymptotiques). C'est le même concept de limite que nous construirons pour effectuer ces deux démarches. Nous verrons que ce procédé d'aller voir tout au bout, d'aller à la limite, sera aussi la clef de beaucoup d'autres problèmes, par exemple celui du calcul des aires de surfaces courbes, problèmes a priori non évidents. [...] (Groupe AHA 1999)

Du point de vue épistémologique, le titre de l'ouvrage du Groupe AHA – Vers l'infini pas à pas – suggère une tentative d'organiser progressivement des franchissements de l'obstacle « Horreur de l'infini » du concept de limite et donc un travail d'un point de vue *non algébrique*.

> On donne le nom de nombres réels à tous les nombres décimaux illimités. […] (Op. cité, p. 361)

Un discours se développe sur la base d'exemples d'EDI donnés pour illustrer l'affirmation que « tous les décimaux illimités sont des nombres » mais en l'absence de toute praxis. Ce discours est structuré en deux phases relatives à deux types d'EDI (périodique et générale) identifiés par un énoncé en gras.

> Phase 1
> **Tout décimal illimité périodique est un entier ou un rationnel.**
> Est-il légitime d'écrire 1 = 0,999… ? (Op. cité, p. 356)

Ce premier énoncé distingue ainsi entier et rationnel. La raison de cette distinction est de traiter le cas de l'écriture décimale illimitée ayant la période de 9 (EDIP9) pour énoncer (implicitement) la propriété : tout nombre décimal possède deux écritures décimales illimitées, l'une « n'est pas à proprement parler illimitée », l'autre (EDIP9) est une expression illimitée périodique :

> Prenons encore le cas de 1/4. La division de 1 par 4 conduit à 0,250000… qui n'est pas à proprement parler un décimal illimité puisqu'on l'écrit habituellement 0,25. En employant l'expression décimale illimitée de 1, on en obtient l'expression décimale illimitée (périodique)
>
> $\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=\frac{24+0{,}999\ldots}{100}=0{,}24999\ldots$ (op. cité, p. 361)

Nous présentons dans le tableau 1 ci-après la structure du discours de l'identification « 1= 0,999… ».

L'ordre et les opérations prolongent ceux de l'ensemble **D** et sont mobilisés dans l'identification « 1 = 0,999… ». Le discours se continue par l'identification analytique du cas « 0,64949… = $\frac{643}{990}$ » à l'identique du cas « 0,999… = 1 ».

Identification	« 1 = 0,999… »
Algébrique	En comparant simplement ou simplistement les parties entières, on est tenté de conclure 1 > 0,999…. Soit $x = 0{,}999\ldots$. Alors, $10x = 9{,}999\ldots$ $9x = 9{,}999\ldots - 0{,}999\ldots$ $9x = 9$ d'où $x = 1$.
Analytique par le calcul de la limite de suite	On peut identifier 0,999… à la limite d'une série, à savoir en l'occurrence la suite de terme général $\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\ldots+\frac{9}{10^n}$. Les calculs conduisent à $0{,}999\ldots = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{9}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\ldots+\frac{1}{10^{n-1}}\right)$ $= \frac{9}{10}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1-\left(\frac{1}{10^n}\right)\right)}{\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)\right)}\right) = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{1}{10}\right)} = 1$
Analytique par l'axiome des intervalles emboîtés	Ce résultat fait apparaître 0,999… à l'intersection des intervalles [1 – $1/10^n$, 1] emboîtés comme ceci : $[\frac{9}{10},1]\supset[\frac{99}{100},1]\supset[\frac{999}{1000},1]\ldots$ Par ailleurs 1 s'y trouve aussi et la longueur de ces intervalles tend vers 0. On ne peut donc qu'identifier 0,99… et 1, sinon il y aurait entre les deux une distance strictement positive qui contredirait le fait que la longueur des intervalles tend vers 0.

Tableau 1. *Identification « 0,999... = 1 » dans l'ouvrage AHA (1999)*

Phase 2

Tout décimal illimité est un nombre grâce à la propriété des intervalles emboîtés

Vers quoi tend la série harmonique alternée $1\ ,\ 1-\frac{1}{2}\ ,\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ ,\ 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ ,\ \ldots$?

(Suggestion : situez sur un axe les quelques premiers termes de cette suite) (Op. cité, p.358)

Cet énoncé vise à justifier la raison d'être de l'axiome des intervalles emboîtés : « tout EDI est un nombre (sous-entendu réel) ». La recherche de la limite de la série harmonique alternée s'appuie sur la donnée d'une suite d'intervalles emboîtés fermés :

> Nous voici donc en présence d'une suite d'intervalles emboîtés fermés
> [0,5 ; 1]
> [0,5 ; 0,83…]
> [0,583… ; 0,83…]
> [0,583… ; 0,78…]
> [0,616… ; 0,78…]
> [0,616… ; 0,759…]
> [0,634… ; 0,759…] dont la longueur 1/n tend vers 0. On est tenté de dire, […], que leur intersection est réduite à un seul nombre, qui est la limite de la série harmonique alternée. Mais quelle sorte de nombre est cette limite ? (Op. cité, p. 359) .

Au contraire du cas de l'identification des EDIP, les bornes des intervalles emboîtés sont en écriture décimale. Une EDINP est associée au fait que ln2 n'est pas un rationnel :

> Or, il est crédible que $ln\, 2$ soit un irrationnel. S'il ne l'était pas, on pourrait trouver un nombre rationnel q tel que $ln\, 2 = q$ ou $e^q = 2$. Voilà qui semble bien difficile, vu l'irrationalité célèbre (mais non démontrée ici) de e. En conclusion, en admettant que les intervalles emboîtés : […] s'intersectent en un seul nombre, nous avons donné le statut de nombre à un décimal illimité sans doute non périodique. (op. cité, p. 361)

Pour démontrer que la limite de la série en question est égale à $ln\, 2$, le discours mobilise des objets mathématiques tels que : la droite graduée et la représentation des fractions sur cette droite ; la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ et son graphique ; l'intégrale $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ et la fonction logarithmique $ln\, x$; l'aire d'un rectangle et la formule de calcul d'aire du rectangle.

1.3. Conclusion

La séquence de Cornu (1983) et le projet du Groupe AHA (1999) convergent vers un enjeu commun : le statut de nombre des EDI en relation avec les notions de suites numériques et de limite de suite numérique. Le « discours technologique » de l'ouvrage AHA nous donne un exemple de l'identification des EDI selon le type de nombres (entier, rationnel et irrationnel), et en particulier l'identification de 0,999…= 1, par les limites de suites numériques trouvées par le calcul algébrique des limites ou par des démonstrations mobilisant l'axiome topologique des intervalles emboîtés.
Pourtant, ce qui nous manque ici, c'est d'une part le traitement de l'obstacle *infini – fini* mais aussi le prolongement de l'ordre et des opérations de **N** dans l'ensemble des EDI (définition de **R**) pour fonder le statut de nombre de l'ostensif « EDI ».
Brousseau (1998) insiste sur les conséquences didactiques de la non prise en compte de ce prolongement :

> Il est compréhensible que ce que les mathématiciens appellent le plongement de **N** dans un sur-ensemble, fasse disparaître certaines de ces propriétés qui ne sont plus vraies pour tous les nombres, ou même qui ne sont plus vraies pour aucun.
> L'élève n'est pas averti de cette rupture, car, ni la culture, et en particulier la tradition, ni l'ingénierie didactique n'ont encore produit les instruments nécessaires […]. Il commet donc des erreurs, et comme elles sont attachées à une certaine manière de comprendre les propriétés des nombres, ces conceptions fausses persistent et on peut observer les effets de la rupture pendant de nombreuses années. (Brousseau 1998, p. 153)

De plus, aucun des deux projets (Cornu 1983 et AHA 1999) n'étudie les EDI en relation avec la notion de limite de fonction.

Notre projet est d'aborder simultanément le statut numérique des EDI et le point de vue topologique de la notion de limite de fonction. C'est pour cela que nous questionnons dans la partie suivante la transposition didactique de la topologie de **R** pour la notion de limite.

2. Transposition didactique de la définition de la notion de limite de fonction

On sait que la topologie usuelle de **R** peut se déterminer par sa métrique, la notion de distance étant au centre de cette métrique. Nous examinons ici la définition de la notion de limite de fonction et sa transposition didactique dans les institutions française et vietnamienne pour y repérer les traces de la topologie de **R**.

2.1. Dans la sphère savante

De nos jours, la notion de droite numérique achevée $\overline{\mathbf{R}}$ permet de formuler une définition des différents « cas » de limite.

> Soit A une partie non vide de R et $a \in \overline{\mathbf{R}}$ un point adhérent à A dans $\overline{\mathbf{R}}$. Un élément $l \in \overline{\mathbf{R}}$ est dit **limite en *a*** d'une fonction $f : A \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ si et seulement si, pour tout voisinage W de l dans $\overline{\mathbf{R}}$, il existe un voisinage V de a dans $\overline{\mathbf{R}}$ tel que $f(V \cap A) \subset W$.
> (Arnaudiès - Fraysse 1989, p. 133)[10]

Cette définition couvre trois possibilités pour les valeurs de a et l : fini, $+\infty$ et $-\infty$. Elle désigne donc neuf cas différents de limite (en excluant les cas de la limite à droite ou à gauche) : $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ où x_0 et y_0 sont des réels. Cette définition inclut aussi la notion de limite de suite numérique : si $A=\mathbf{N}$, $a = +\infty$ est un point adhérent à **N** dans $\overline{\mathbf{R}}$.

Si on se réfère à des traités comme ceux de Cauchy (1821), Weierstrass (vers 1872) et Arnaudiès–Fraysse (1989), la topologie de **R** se particularise en même temps que la notion de distance, selon le schéma 1 suivant.

Voisinage ⟶ Intervalle (voisinage particulier) ⟶ Boule (intervalle symétrique) ⟶ Boule de rayon $1/n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) ⟶ Boule de rayon 10^{-n} ($n \in \mathbf{N}$)

Schéma 1. *Particularisation de la topologie de R*

La distance décimale de la suite de boules ayant comme rayons la suite (10^{-n}), $n \in \mathbf{N}$ est donc suffisante à la définition de la notion de limite : ce fait est une des conséquences de la propriété « **D** est p*artout dense*[11] dans **R** », autrement dit « l'ensemble des points adhérents de **D** est **R** ». Chaque nombre réel est donc un point adhérent de l'ensemble **D :** la construction de la notion de limite d'une suite décimale participe à la construction de **R** à partir de **D**.

2.2. Présence d'un point de vue topologique de la notion de limite de fonction dans les manuels de l'EMS en France et au Viêt Nam (pour le cas *a* et *l* finis)

La transposition didactique de la notion de limite dans l'EMS en France et au Viêt Nam produit autant de définitions que de cas enseignés. Nous nous intéresserons ici aux définitions présentes dans les manuels secondaires pour le cas a et l finis.

10 L'hypothèse « *a est un point adhérent de A* » est nécessaire à la notion de limite parce qu'elle assure que $f(V \cap A) \neq \varnothing$ pour tout voisinage V de a.

11 Soit G un groupe Archimédien. Une partie E de G est dite **partout dense** dans **G** ssi pour tous x et y dans G tels que $x < y$, on peut trouver $z \in E$ tel que $x < z < y$. (Arnaudiès – Fraysse 1989, p. 15)

2.2.1. Manuels français

Depuis les années 1986, les définitions en termes (ε, δ) sont bannis des programmes. Nous les recherchons donc dans des manuels de la période 1970 – 1985.

– La définition du manuel de Première (CDE) de la collection Queysanne-Revuz (programme 1970) est proche de celle de la sphère savante.

> Une fonction f définie sur un intervalle pointé de centre x_0 admet la **limite** l au point x_0 si et seulement si, quel que soit l'intervalle J de centre l, il existe un intervalle pointé I' de centre x_0 tel que $f(\mathrm{I}') \subset \mathrm{J}$. (p. 63)

Quelques lignes au-dessus, les rédacteurs expliquent le terme d' « *intervalle pointé* ».

> La fonction f est définie sur un intervalle de centre x_0, sauf peut-être en x_0, donc sur un intervalle pointé de centre x_0. (p. 62)

La formulation (ε, δ) figure aussi dans ce manuel.

> On peut également dire que f admet l pour limite au point x_0 si et seulement si étant donné $\alpha > 0$ on peut trouver $\beta > 0$ tel que, quel que soit x réel on ait
> $0 < | x - x_0 | < \beta \Rightarrow | f(x) - 1 | < \alpha$. (p. 63)

– Le manuel de Première (SE) de la collection Dimathème (1982) présente une définition en termes (10^{-n}, 10^{-p}).

> Soit E une partie non vide de R telle que $\mathrm{E} \cup \{x_0\}$ soit un intervalle. Une application f de E vers **R** admet une limite nulle en x_0 si :
> $\forall\, n \in \mathbf{N}, \exists\, p \in \mathbf{N}$ tel que : $[\, x \in \mathrm{E}$ et $\left| x - x_0 \right| < 10^{-p}\,] \Rightarrow [\, \left| f(x) \right| < 10^{-n}]$
> Que l'on peut écrire aussi :
> $\forall\, n \in \mathbf{N}, \exists\, p \in \mathbf{N}$ tel que : $[\, x \in \mathrm{E}$ et $x_0 - 10^{-p} < x < x_0 + 10^{-p}\,] \Rightarrow [-10^{-n} < f(x) < 10^{-n}]$
> (p. 191)

La définition en termes (ε,δ) s'énonce comme une « formulation équivalente » sans démonstration :

> b) **Formulation équivalente**
> f admet une limite nulle en x_0 si :
> $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \alpha > 0$ tel que : $[x \in \mathrm{E}$ et $| x - x_0 | < \alpha\,] \Rightarrow [|f(x)| < \varepsilon]$ (p. 192)

Ce manuel privilégie la définition en termes (10^{-n}, 10^{-p}), c'est-à-dire introduit la suite des boules ouvertes ayant comme rayons la suite (r_n=10^{-n}), $n \in \mathbf{N}$.

En résumé (tableau 2)

$\lim_{x \to a} f(x) = l$	Topologie de **R** pour la notion de limite de fonction
$\mathbf{A} =]b\,;c[$ et $a \in \mathbf{A}$ $\mathbf{A} =]b\,;c[\backslash\{a\} \Rightarrow a \in \mathbf{A}$	Notion d'intervalle pointé Distance (ε,δ) Boules ouvertes de rayons (10^{-n} ; 10^{-p})

Tableau 2. *Topologie de **R** pour la notion de limite de fonction dans les manuels français 1970–1985*

En confrontant ce tableau au schéma 1 « Particularisation de la topologie de R », on voit que les manuels français étudiés (1970–1985) introduisent les notions de distance et de boules ouvertes de rayons (10^{-n} ; 10^{-p}) mais évite toute référence au voisinage dans les définitions de la notion de limite de fonction.

2.2.2. Manuels vietnamiens

– Manuels du programme « réforme de l'éducation » (1990 -1999)

Durant cette période, trois manuels sont présents.

• Le manuel *Algèbre et Analyse 11* du groupe des rédacteurs Tran Van Hao–Phan Truong Dan (1998) :

> Le nombre b s'appelle limite de la fonction $f(x)$ quand x tend vers a si, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage δ du point a tel que, pour tout $x \neq a$ de ce voisinage, on ait $|f(x) - b| < \varepsilon$. (p. 156)

On présente donc une définition de la limite de fonction dans laquelle sont imbriquées les notions de voisinage et de distance en termes (ε, δ). Le voisinage est la boule ouverte centrée en a et de rayon δ.

Dans les deux autres manuels, on lit :

• manuel *Algèbre et Analyse 11* du groupe des rédacteurs Ngo Thuc Lanh–Vu Tuan–Ngo Xuan Son (1996) :

> On dit que la fonction $y=f(x)$ tend vers L (ou admet la limite L) quand x tend vers a si, quel que soit un nombre ε positif (aussi petit que l'on veut), on peut trouver un nombre positif δ tel que lorsque $0 < |x - a| < \delta$ alors $|f(x) - L| < \varepsilon$
>
> ($0 < |x - a|$ veut dire que $x \neq a$)
>
> […] On suppose $x \neq a$ parce qu'on ne s'intéresse qu'au « comportement » de $f(x)$ quand x tend vers a, mais pas au comportement de $f(x)$ quand $x = a$. (p. 155)

• manuel *Algèbre et Analyse 11* du groupe des rédacteurs Phan Duc Chinh – Ngo Huu Dung (1998) :

> On dit que la fonction $y=f(x)$ admet la limite L quand $x \to x_0$, noté $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$, si pour toutes suites (x_n ; n=1, 2, 3 …), les valeurs x_n appartenant au domaine de définition de la fonction, la suite ($f(x_n)$; n=1, 2, …) tend vers L. Autrement dit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_n) = L$
>
> ($x_n \in \boldsymbol{X}$ domaine de définition de la fonction) (p. 112)

Ceci amène à poser la question : quelle est la nature de l'ensemble de départ A de la fonction f ? La relation entre le point a et l'ensemble A est-elle précisée ?

Pour le troisième manuel l'ensemble de départ A de la fonction f est le domaine de définition de la fonction f. Seul le premier manuel explique dans une remarque la relation entre a et un « voisinage de a ».

> Remarque : A partir de la définition de la limite de fonction $f(x)$ quand x tend vers a, la condition nécessaire de la limite est que la fonction $f(x)$ soit définie en tout point d'un voisinage quelconque de a, sauf au point a où la fonction peut être définie ou non (on a $x \neq a$ dans la définition). Cela permet de chercher, dans certain cas, la limite de fonction en des points où la fonction n'est pas définie.
>
> (Tran Van Hao–Phan Truong Dan 1998, p. 157)

• Manuel en vigueur du programme « harmonisation et unification » (à partir de 2000)

Durant cette période, il n'existe qu'un seul manuel. Ci-après la définition de la notion de limite donnée.

> Soit la fonction $f(x)$ définie sur un intervalle K, sauf peut-être en $a \in K$. On dit que la fonction $f(x)$ a pour limite L (ou tend vers L) lorsque x tend vers a, si pour toute suite numérique (x_n) ($x_n \in$ K, $x_n \neq a$, $\forall\, n \in$ N*) telle que si $\lim x_n = a$ alors $\lim f(x_n) = L$.
>
> (Algèbre et Analyse 11, p. 117)

On définit donc la notion de limite de fonction dans le « langage des suites numériques ». Il n'y a pas de traces de la topologie de **R** dans la définition de la notion de limite de fonction du manuel en vigueur : elles ne se trouvent que dans la notion de suite numérique définie en termes (ε, N).

Par rapport aux manuels du programme précédent, on précise que l'ensemble de départ est un intervalle K et que a peut appartenir ou non à K. La définition dans le « langage des suites numériques » assure mathématiquement que a est un point adhérent de K, sans que la notion d'adhérence soit présente explicitement.

En résumé (tableau 3) :

Période	$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$	Topologie de **R** pour la notion de limite de fonction
1990 - 1999	**A**=Df domaine de définition de f $a \in$ Df ou $a \in$ Df	Distances (ε, δ) Voisinage = boule (intervalle symétrique)
Depuis 2000	**A** =]b ; c[et $a \in$ **A** **A** =]b ; c[\{a} $\Rightarrow$ $a \in$ **A**	Traces : (ε, δ) seulement pour la notion de limite de suite

Tableau 3. *Topologie de R pour la notion de limite de fonction dans les manuels vietnamiens*

On trouve, dans les définitions de la notion de limite de suite des manuels vietnamiens, des traces de la topologie de **R** : on parle (1990-1999) de voisinage pour les boules ayant comme rayons δ et ε (intervalles symétriques). Pourtant, par rapport à la sphère savante et les manuels français, les boules ouvertes de rayons (10^{-n} ;10^{-p}) n'apparaissent à aucune période. Or, une définition en terme des boules de rayons (10^{-n} ;10^{-p}) permet d'introduire le point de vue approximation décimale de la notion de limite.

2.3. Deux problèmes fondamentaux de l'approximation

L'analyse des travaux de référence concernant la notion de limite nous conduit à retenir « l'horreur de l'infini » comme obstacle épistémologique principal à la construction de la notion de limite et à distinguer deux points de vue sur la notion de limite : algébrique et approximation.

Vis-à-vis de l'approximation, le découpage opéré par les noosphériens du XIX^e siècle (Birebent 2001) dans les pratiques de calcul, amènent à formuler deux problèmes « fondamentaux » de l'approximation, chacun relié à une problématique d'approximation de la notion de limite que nous nommons « *approximation x »* pour le premier, « a*pproximation f(x)* » pour le second. Girard et Lentin (1964) énoncent comme suit ces deux problèmes dans leur manuel d'Arithmétique.

> On peut envisager, dans les questions d'approximation, deux problèmes principaux.
>
> 1°) Les erreurs commises sur les données étant bornées supérieurement par des nombres connus, on veut connaître une borne supérieure de l'erreur commise sur le résultat.
>
> 2°) On désire avoir un résultat avec une erreur qui ne dépasse pas une borne fixée à l'avance. On se propose d'évaluer les données avec une approximation suffisante pour qu'il en soit ainsi. (Op. cité, p. 46)

L' « approximation x » (premier problème) donne à l'approximation de la variable x un rôle prédominant pour approcher $f(x)$; pour l' « approximation $f(x)$ », le degré

d'approximation de $f(x)$ que l'on veut, fixe le degré d'approximation pour x.
En nous appuyant sur ce qui précède, nous énonçons un *problème fondamental d'approximation f (x)*.

Calculer [**tous/ *n***] couples (x ; $f(x)$) tel que $f(x) \in B(l\ ; \boldsymbol{\varepsilon})$

Nous plaçons ainsi le problème du calcul de limite dans une problématique d'« approximation $f(x)$ », la topologie de **R** sous-jacente étant générée par une base de voisinage constituée des boules $B(l\ ; \varepsilon)$, $\varepsilon \in R^+$.

3. Choix macro didactiques pour une ingénierie didactique

Les choix macro didactiques, c'est-à-dire les choix fixés pour l'ensemble de l'ingénierie, concernent essentiellement les conditions du calcul, la fonction et la limite L. Nous présentons ci-après les raisons de ces choix.

3.1. Conditions du calcul : présence de la calculatrice

La calculatrice CASIO fx-570MS est autorisée sans aucune restriction sur les touches et les fonctions disponibles.

- La calculatrice est associée institutionnellement au calcul approché et affiche le plus souvent les nombres calculés sous leur forme décimale. Elle permet donc de poser le problème de la décimalisation des nombres.
- L'autorisation, sans aucune restriction, des touches et des fonctions disponibles permet d'observer la cohabitation de la calculatrice et du travail algébrique dans l'EMS du Viêt Nam, puisque le calcul à la main n'est pas interdit.

3.2. Choix de la fonction *f*

Nous avons choisi la fonction f : $x \rightarrow f(x) = \dfrac{2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21}{x^2 + 0{,}7x - 0{,}3}$ pour les raisons suivantes.

– La fonction f est présentée dans le registre algébrique (contre le registre graphique), conformément à l'usage dans l'EMS du Viêt Nam. Ce choix permet le calcul instrumenté et à la main et de recourir à des critères de validation algébrique.
– La fonction f est rationnelle selon la dénomination de EMS, c'est-à-dire définie par $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)$ et $v(x)$ sont des polynômes du premier ou du second degré.

Ce choix s'est fait contre celui de fonctions irrationnelle / trigonométrique / logarithme / exponentielle pour favoriser le travail algébrique nécessaire à l'ingénierie.
Nous avons choisi $u(x)$ et $v(x)$ du second degré et factorisables en produit de polynômes du premier degré. Ce choix permet donc des transformations algébriques sur l'expression $f(x)$ institutionnellement familières : factorisation et simplification.
– Les coefficients de l'expression algébrique « initiale » de f sont des nombres décimaux appartenant à Di[12], i = 0, 1, 2 :

• *contre des coefficients tous entiers*, pour masquer une factorisation évidente et donc empêcher une simplification immédiate ; provoquer l'usage de la calculatrice dans le calcul (approché), et favoriser la décimalisation des nombres. Ce choix ne bloque pas le calcul exact.

12 Di : ensemble des nombres décimaux ayant i chiffres après la virgule.

• *contre des coefficients dans Di* tels que $i>2$, pour pouvoir revenir aisément dans un domaine de validité algébrique.

– Le domaine de définition de la fonction f est, conformément à l'usage dans EMS, confondu avec le domaine de continuité de la fonction, les nombres réels hors de ce domaine étant les points de discontinuité de la fonction. Ils sont, dans le respect du contrat institutionnel de EMS, en nombres finis. La fonction f est discontinue en deux points –1 et 0,3. Elle est prolongeable par continuité en 0,3 et non prolongeable en –1.
L'image de tout intervalle inclus dans le domaine de définition par f est aussi un intervalle, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. L'exploration de la fonction continue sur son domaine de définition revient donc à l'exploration numérique de deux intervalles de **R**, départ et image. Or tout intervalle de **R** a la puissance du continu, c'est-à-dire un ordre non dénombrable, donc dense (non discret[13]). Dans l'exploration décimale des intervalles de définition (favorisée par le calcul instrumenté et les valeurs des coefficients de $f(x)$), ce choix permet donc de poser le problème de l'ordre *dense* de **D** puis de **R** comme construit implicitement par des suites décimales dans EMS.

– Le choix d'une fonction strictement monotone (contre non monotone) revient au choix d'une fonction injective qui, sur chacun des intervalles du domaine de définition, est bijective. La fonction f conserve aussi l'ouverture ou la fermeture de l'intervalle. Ce choix conforte l'idée que l'intervalle de départ est de même nature que l'intervalle image. Les deux intervalles peuvent découler de l'étude des variations de la fonction f mis en place dans EMS en classe 10, puis reprise en classe 12 après l'enseignement de la dérivée d'une fonction.

– Graphe de f sur $]-1\,;+\infty[\ \setminus \{0,3\}$ (figure 1)

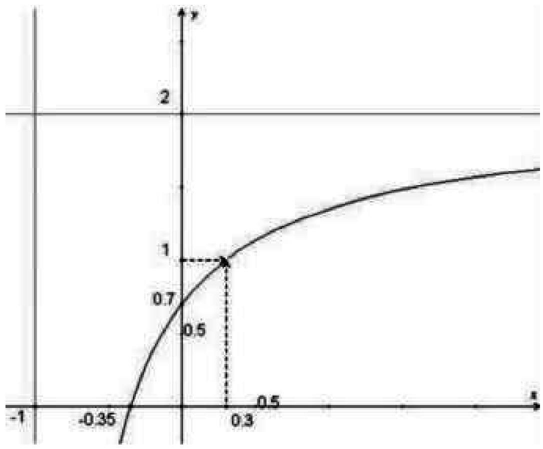


Figure 1. *Graphe de la fonction f*

13 Si G est non discret, entre deux éléments distincts dans G, il en existe toujours au moins un autre (et par conséquent, une infinité). […] (Arnaudiès – Fraysse 1989, p. 5)

3.3. Choix de la limite *L*

Le choix de limite pour la fonction *f* est le suivant : $\lim_{x \to 0,3} f(x) = 1$. Il n'existe aucune valeur de *x* telle que $f(x)$ soit égale à 1. Mais peut-on l'approcher d'aussi près que l'on veut ? Les raisons du choix du couple (0,3 ; 1) seront au cœur de ce qui suit.

4. Organisation des situations et conditions de l'observation

4.1. Organisation des situations de l'ingénierie

L'ingénierie comporte quatre situations :

- la situation 1 a pour objectif l'enseignement de touches, de la calculatrice CASIO fx-570MS (en vigueur dans EMS), hors du programme de EMS au Viêt Nam. Nous n'en parlerons pas dans cet article.
- les situations 2, 3 et 4 sont générées par le problème fondamental.

Nous schématisons notre ingénierie dans la figure 2, en représentant en grisé les variables didactiques dont les valeurs changent pour générer les problèmes particuliers posés dans chacune des situations.

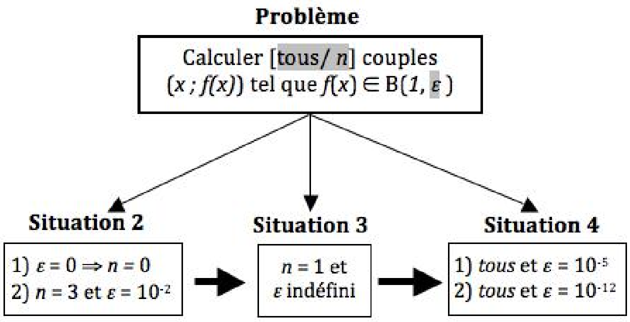


Figure 2. *Schéma de l'ingénierie didactique*

• L'enjeu de la situation 2 est le fonctionnement de stratégies algébriques institutionnellement fortes.
• L'enjeu de la situation 3 est de faire émerger des problématiques d'approximation en réponse au problème fondamental en particulier de faire apparaître la problématique d'« approximation $f(x)$ » comme alternative optimale à celle d'« approximation *x* ».
• L'enjeu de la situation 4 est de mettre en place une formalisation topologique de la notion de limite s'appuyant sur un raisonnement par condition suffisante. Nous ne présenterons pas dans le cadre de cet article d'analyse de la situation 4.

4.2. Conditions de l'observation de l'ingénierie

Nous avons expérimenté cette ingénierie didactique dans une classe 12 (Terminale) du Lycée de l'Université de Pédagogie d'Ho Chi Minh Ville, comportant 38 élèves, pendant trois séances. L'enseignement de la notion de limite a déjà eu lieu dans cette classe. L'ingénierie représente donc une nouvelle rencontre avec cette notion.
Nous présentons dans le tableau 4 ci-après la durée de chacune des séances et le jour de leur réalisation.

Séance 1	Séance 2	Séance3
10 octobre 2006	12 octobre 2006	13 octobre 2006
20 minutes	1 heure 30	1 heure

***Tableau 4.** Durée et date de chacune des trois séances de l'ingénierie*

Lors de l'expérimentation, chacun des 38 élèves de la classe disposait d'une calculatrice CASIO fx-570MS.

Le tableau 5 présente le découpage en situations didactiques des trois séances[14].

Séance 1	Séance 2	Séance 3
Situation 1	Situations 2 et 3	Situation 4

***Tableau 5.** Découpage en situations didactiques des trois séances de l'ingénierie*

Les analyses *a posteriori* s'appuient sur les données suivantes :
– dans toutes les séances : les fiches de réponses des élèves et leurs brouillons[15]
– dans les séances 2 et 3 : les enregistrements audio et vidéo des élèves et les enregistrements vidéo de l'enseignant[16], en particulier de ce qu'il écrit au tableau.

5. Situation 2 : mise à l'épreuve de stratégies algébriques institutionnellement fortes

5.1. Déroulement possible de la situation 2

• Au début de la séance 2, l'expression donnant la fonction f est écrite au tableau et s'y maintient durant toute la séance : soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{2x^2+0{,}1x-0{,}21}{x^2+0{,}7x-0{,}3}$

• La feuille « Question 1 » (format A4) est distribuée aux élèves :

Question 1. Résoudre l'équation $f(x) = 1$	Brouillon

• Les élèves travaillent individuellement. Au bout de sept minutes les réponses sont ramassées.
• L'enseignant conclut avec les élèves la phase 1 en écrivant au tableau :
Df = R \{ –1 ; 0,3}. Il n'existe aucune valeur de x telle que $f(x)$ soit égale à 1.
• La feuille « Question 2 » (format A4) est distribuée aux élèves :

Question 2. Donner trois valeurs de x telles que f(x) appartienne à [0,99 ; 1,01].	Brouillon

• Les élèves travaillent individuellement. Au bout de quinze minutes les réponses sont ramassées.
• L'enseignant organise une synthèse des réponses qu'il écrit au tableau.

14 Nous remercions ici messieurs Nguyen Thai Hoa – enseignant de mathématique, Nguyen Huu Tam – enseignant de physique, madame Ho Thi My Van – enseignante d'anglais de la classe 12 A1 et leurs élèves de nous avoir accueillis.
15 Nous remercions Le Thi Nga et Tang Minh Dung qui ont distribué et ramassé les nombreuses fiches des trois séances et qui ont eu à gérer les enregistrements audio.
16 Nous remercions Vu Nhu Thu Huong qui a filmé l'enseignant durant les séances 2 et 3.

5.2. Principaux résultats obtenus dans une classe de terminale au Viêt Nam

Nous présentons deux phénomènes issus de la confrontation des analyses *a priori* et *a posteriori* de la deuxième situation[17].

– Comment cohabitent calculatrice et algèbre

Pour les questions 1 et 2 de la situation 2, la calculatrice est constamment utilisée non seulement dans l'exploration numérique, mais aussi dans les stratégies algébriques. La calculatrice cohabite avec le travail algébrique pour renforcer le contrat institutionnel de l'algèbre au travers du programme « EQN-1 Degré 2 pour le calcul des racines et des touches ab/c et d/c qui rendent ou non acceptables les solutions trouvées : 32 (sur 38) élèves ramènent l'équation $\frac{2x^2+0,1x-0,21}{x^2+0,7x-0,3}=1$ à celle du second degré $x^2–0,6x+0,09=0$ et à $x = 0,3$ en ayant utilisé le programme « EQN – 1 Degré 2 » de la calculatrice CASIO fx-570MS. Par exemple, l'affichage 0,3000001 n'est pas acceptable du fait de l'impossibilité du passage à une forme fractionnaire par appui de ces touches. Les solutions acceptables d'une équation du second degré sont donc des rationnels, un critère de validité étant que quand on appuie sur les touches ab/c ou d/c après l'affichage décimal du calcul on obtient bien une fraction.

– Résistance des stratégies algébriques à la problématique de l'approximation

La question 2 « *Donner trois valeurs de x telles que f (x) appartienne à [0,99 ; 1,01]* » recouvre un problème d'approximation.

Cependant, les élèves n'ont pas les moyens de la reconnaître comme telle. En revanche, ils peuvent aisément ramener celle-ci à des tâches algébriques apparemment classiques, cette interprétation étant renforcée par le contrat institutionnel fortement algébrisé dans l'enseignement secondaire vietnamien et actualisée par la question 1 « Résoudre l'équation $f(x) = 1$ ».

La question 2 cherche à déstabiliser les stratégies algébriques par leur coût et le risque d'erreur pour faire émerger une stratégie d'essais instrumentée par la calculatrice (appelée Dx.Calculatrice ou Exploration d'un domaine numérique de x avec la calculatrice). Tous les élèves (sauf 4) recourent à une stratégie algébrique (Tableau 6).

Les phénomènes décrits ci-dessus vont contre une idée commune qui serait que la calculatrice fait entrer dans un contrat de calcul approché. De plus, nous avons montré qu'il y a une volonté institutionnelle au Viêt Nam d'associer calculatrice et calcul approché (non exact). Les observés de l'ingénierie attestent que non seulement l'usage de la calculatrice ne met pas les élèves dans un contrat de calcul approché et encore moins dans une problématique d'approximation, mais au contraire qu'elle renforce le contrat algébrique en prenant en charge certains calculs numériques liés aux algorithmes algébriques (programme « EQN-1 Degré 2 » et touches ab/c et d/c)).

Algèbre des inéquations (*Inq*)	22
Algèbre des équations (*Eq*)	13
Exploration d'un domaine numérique de x avec la calculatrice (*Dx.Calculatrice*)	**4**
Total	38

Tableau 6. *Stratégies algébriques et non algébriques observées*

17 Nous nous appuyons pour cette partie sur l'article Bessot, Comiti (2013).

Deux remarques sur le tableau 6.

1. Algèbre des inéquations : pour répondre à la question « Donner trois valeurs de x telles que $f(x)$ appartienne à [0,99 ;1,01] », 21 (sur 38) élèves résolvent algébriquement deux inégalités $\begin{cases} f(x) \geq 0{,}99 \\ f(x) \leq 1{,}01 \end{cases}$ bien que cette stratégie soit très coûteuse.
2. À propos de l'exploration avec la calculatrice : cette stratégie peut s'appuyer sur la question 1, avec la règle d'action « approximation x » suivante : *pour que f(x) soit proche de 1, x doit être proche de 0,3*. Rappelons que 0,3 est une valeur interdite (question 1).

La situation 2 se clôt sur une synthèse écrite au tableau par l'enseignant (Figure 3)

Soit f la fonction définie par Question 1 : Résolvez l'équation $f(x) = 1$ Condition : $x \neq 1$ et $x \neq 0{,}3$ $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1 ; 0{,}3\}$ Il n'existe aucune valeur de x telle que $f(x)$ soit égale à 1. Question 2 : Donnez trois valeurs de x telles que $f(x)$ appartienne à [0,99 ; 1,01] 1. $f(x) = 0{,}99$; $f(x) = 1{,}01$; $f(x) = 1{,}001$ 2. $x_1, x_2, x_3 \Rightarrow f(x_1), f(x_2)$ et $f(x_3) \in [0{,}99 ; 1{,}01]$? 3. $0{,}99 \leq f(x) \leq 1{,}01$

Figure 3. *Synthèse de la situation 2 par l'enseignant*

6. Situation 3 : Jeu « À la recherche de meilleur couple (x ; $f(x)$) »

6.1. Déroulement possible de la situation 3

Durant toute la situation 3, la synthèse de la situation 2 (figure 3) reste écrite au tableau.
La classe est partagée en binômes A et B occupant une même table.
L'enseignant distribue à chaque binôme trois fiches (format A4) : deux fiches personnelles et une fiche pour le binôme (figure 4).

Fiche personnelle pour $x < 0{,}3$ de **A** : ……………… …… Équipe : ………………..		
x	$f(x)$	**Brouillon**
0	0,7	

Fiche personnelle pour $x > 0{,}3$ de **B** : ……………… Équipe : ………………..		
x	$f(x)$	**Brouillon**
1	1,35	

Feuille binôme

« meilleur » couple de A : couple entouré sur la fiche personnelle de A	
« meilleur » couple de B couple entouré sur la fiche personnelle de B	
« meilleur » couple de l'équipe **à proposer à la classe**	
Justifier la décision **Pour le meilleur couple de l'équipe**	

Figure 4. *Fiches individuelles A et B et fiche du binôme A - B*

Chaque élève A et B d'un binôme travaille individuellement pendant 15 minutes. Pour amorcer ce travail individuel, un premier couple est imposé : (0 ; 0,7) pour A et (1 ; 1,35) pour B. L'enseignant demande aux élèves de noter soigneusement sur sa fiche personnelle les couples successifs proposés et d'entourer le couple qu'il juge le meilleur (c'est-à-dire tel que $f(x)$ soit le plus proche de 1).
A la fin de ce travail individuel, les élèves A et B se réunissent pour écrire les couples entourés sur la feuille du binôme et doivent décider entre eux du couple « le meilleur » à proposer à la classe.
L'enseignant ramasse les fiches personnelles et les feuilles de chaque binôme puis écrit une synthèse au tableau. Il organise alors un travail collectif sur ces couples. Ce travail vise à faire débattre de la validité des couples « les meilleurs » proposés et de leurs justifications *sans conclure sur l'existence ou non d'un meilleur couple*.
Enfin rappelons que l'enjeu de la situation 3 est de faire émerger la problématique d'« approximation *f (x)* » comme alternative optimale à la problématique d' « approximation *x* » : *on peut toujours trouver un couple (x ; f (x)) telle que f (x) soit aussi proche que l'on veut de 1.*

6.2. Principaux résultats obtenus dans une classe de terminale au Viêt Nam

Le jeu « À la recherche de meilleur couple $(x\,;\,f(x))$ » tel que $f(x)$ soit le plus proche possible de la valeur interdite 1 ($f(x)=1$ n'a pas de solution) est la situation centrale de notre ingénierie : 1 est aussi, de façon cachée, la limite de f quand x tend vers 0,3.
Que s'est-il passé ?

- Croyance partagée en l'existence d'un meilleur couple ($x\,;\,f(x)$), c'est-à-dire d'un prédécesseur et d'un successeur d'un élément de R

Deux types de stratégies, celles issues des stratégies *Dx.Calculatrice* et *Eq* de la situation 2 sont prévisibles et en concurrence, la stratégie *Inq* étant improbable du fait de son coût élevé et de la non donnée d'un intervalle.
Toutes les réponses relèvent de Dx.calculatrice (dans le travail individuel, puis en binôme). On ne trouve qu'une seule tentative de résoudre une équation (*Eq*) dans le brouillon d'un élève. Ceci atteste que dans un premier temps la majorité des élèves croient à l'existence d'un meilleur couple $(x\,;\,f(x))$ tel que $f(x)$ soit le plus proche de 1, c'est-à-dire à l'existence d'un premier ou d'un dernier élément dans une partie de **D** (ordre discret).

Nous donnons (figure 5) l'exemple de feuille du binôme II.1[18] qui décide de proposer comme meilleurs couples des EDI en écriture *infini-fini* comme 0,3(0)1.

Cặp số « tốt nhất » của A : được khoanh tròn trong phiếu cá nhân của A	0,2(9) ; 0,(9)
Cặp số « tốt nhất » của B : được khoanh tròn trong phiếu cá nhân của B	0,3(0)1 ; 1,(0)1
Cặp số « tốt nhất » của nhóm đề cử trước lớp	0,2(9) ; 0,(9)
Giải thích tại sao lại quyết định chọn cặp số này làm cặp số tốt nhất của nhóm	$\lim_{x\to 0,3} f(x) = 1$

« meilleur » couple de A [...]	0,2(9) ; 0,(9)
« meilleur » couple de B [...]	0,3(0)1 ; 1,(0)1
« meilleur » couple de l'équipe [...]	0,2(9) ; 0,(9)
Justifier ... couple de l'équipe	$\lim_{x\to 0,3} f(x) = 1$

Figure 5. *Fiche du binôme II.1*

Que signifie la justification par la limite ?
Examinons la fiche individuelle de l'élève A du binôme II.1 (figure 6).

Phiếu cá nhân với x < 0,3 của học sinh A : ......13........ Nhóm : 1 ...		
x	f(x)	Nháp ở đây !
0 0,299 0,29999 0,299999 $\boxed{0,2(9)}$	0,7 0,9994 0,99999 1 0,(9)	

Fiche personnelle avec x < 0,3 de A :13 Binôme II.1		
X	*f*(*x*)	Brouillon
0 0,299 0,29999 0,299999 $\boxed{0,2(9)}$	**0,7** 0,9992 0,99999 1 0,(9)	

Figure 6. *Fiche individuelle de l'élève A binôme II.1*

Cet examen montre une association entre une problématique d' « approximation de *x* » et l'écriture $\lim_{x\to 0,3} f(x)=1$: la notion de limite s'accommode très bien de l'ordre discret de **R** !

– Distance, un premier critère de déstabilisation de l'ordre discret

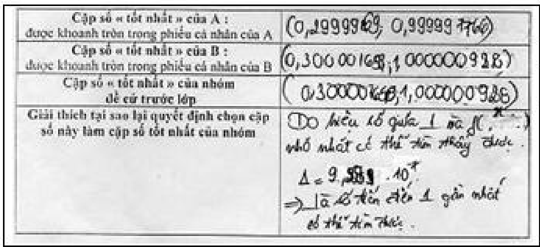
Les procédures des élèves de la classe de terminale où a eu lieu l'expérimentation montrent la prédominance de l'ordre discret dans **R :** pour une très grande majorité ce meilleur couple existe : dans **R** un nombre a un prédécesseur et un successeur. Mais ce jeu rend opératoire pour tous les élèves le concept de distance dans **R** comme critère de décision du meilleur couple : ce critère permet une première déstabilisation de l'ordre discret en mettant en évidence l'existence de couples (x, *f(x)*) tels que la distance de *f*(*x*) à 1 puisse devenir aussi petite que l'on veut.

Le travail coopératif en binôme enrichit le premier milieu didactique des nombres écrits présents dans chacune des fiches individuelles. Le calcul de la distance à 1 devient peu à peu le critère prédominant de décision dans la tâche de comparaison des nombres produits par chacun. En effet :

- l'élaboration d'un tel critère de distance est présente plus ou moins explicitement chez 12 binômes *Dx.Calculatrice* sur 19.

18 Nous donnons à gauche le texte des originaux et à droite leur traduction en français (toutes les traductions sont de l'auteur).

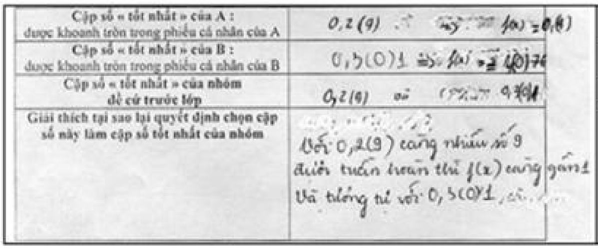
Ci-après par exemple (figure 7) la justification du binôme II.3 :



…couple de A …	(0,2999969 ; 0,999997766)
…couple de B…	(0,300001658 ; 1,000000928)
…couple de l'équipe…	(0,300001658 ; 1,000000928)
Justifier … de l'équipe	Car la différence entre 1 et $f(x)$ plus petit est $\Delta = 9{,}28.10^{-7}$ $\Rightarrow$ ce nombre est le plus proche de 1 que nous pouvons trouver.

Figure 7. *Fiche du binôme II.3*

- pour les 7 autres binômes, ce critère permet une déstabilisation de la stratégie *Dx.calculatrice* pour envisager l'existence de couples (x, $f(x)$) tels que la distance de $f(x)$ à 1 puisse devenir infiniment petite. Ces 7 binômes expriment plus ou moins explicitement une problématique d' « approximation x » basée sur l'ordre dense dans **D** et mentionnent la notion de limite. Ci-après (figure 8) la réponse du binôme III.4 :



…couple de A…	0,2(9) $\Rightarrow f(x) = 0{,}(9)$
…couple de B …	0,3(0)1 $\Rightarrow f(x) = 1{,}(0)76$
…couple de l'équipe…	0,2(9) et 0,3(0)1
Justifier … couple de l'équipe	Dans 0,2(9), plus le chiffre 9 se répète périodiquement, plus $f(x)$ s'approche 1. De même pour 0,3(0)1.

Figure 8. *Fiche du binôme III.4*

– Le rôle central du milieu pour le passage à l'ordre dense (non discret) dans D et D∞ et à l'approximation $f(x)$ de la limite

Le milieu algébrique lié aux objets algébriques (équation, inéquation, …) a été enrichi des éléments d'un milieu « calculatrice » liés à l'affichage des calculs à l'écran de la calculatrice officielle, CASIO fx-570MS, présente tout au long de l'ingénierie didactique.

Tous les élèves de la classe observée ont acquis aisément les connaissances instrumentales que nous leur avons enseignées (situation 1) : mémoires mathématiques (Nguyen 2005), édition et rectification d'une expression (touches Copy et Insert). Ce sont ces connaissances qui ont permis l'organisation d'un milieu « calculatrice » dans notre ingénierie.

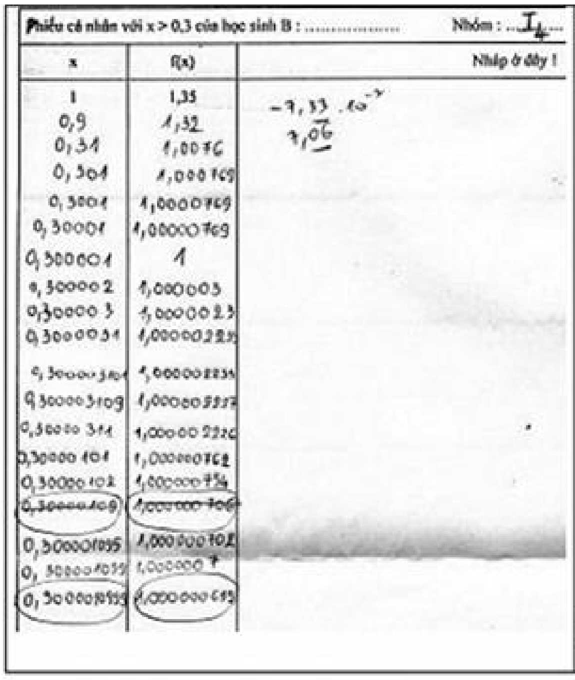
Dans le jeu « À la recherche de meilleur couple (**x ;** $f(x)$) », les principaux éléments du milieu dans le calcul instrumenté de $f(x)$ (*Dx.calculatrice*) pour des valeurs approchées de 0,3 sont les suivants :

- affichage de 1 pour des valeurs décimales approchées de 0,3 à 10^{-6} près (par exemple)
- recopie de l'affichage de la succession de valeurs
- affichage quasi stable de valeurs pour le calcul $f(x)$.

Les élèves rencontrent donc l'affichage 1 de la calculatrice, valeur officiellement interdite pour $f(x)$ (situation 2) *dès que l'intervalle décimal autour de 1 est « petit »*.

Dans le travail individuel, ces rétroactions du milieu conduisent :

• *28 élèves à effectuer une intercalation décimale systématique* dans de petits intervalles par passage successif d'un $\mathbf{D}_i$ à un $\mathbf{D}_{i+k}$ ($i+k \leq 10$). Ces stratégies d'exploration de **D** sont une condition nécessaire mais non suffisante pour une déstabilisation de l'ordre discret en faveur de l'acquisition de l'ordre dense (non discret) dans **D.**
Ci-après (figure 9) la fiche personnelle de l'élève B du binôme I.4 :

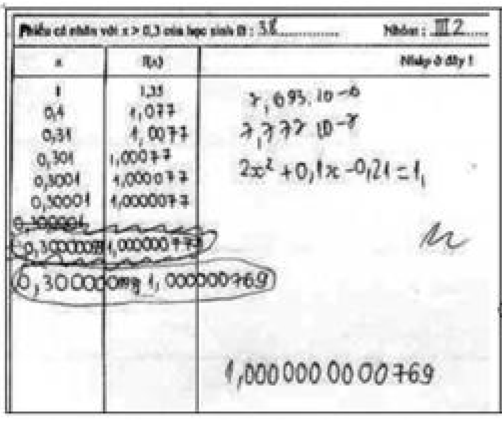


Fiche personnelle avec x > 0,3 de B : ….. Binôme I.4		
x	*f*(*x*)	Brouillon
1	**1,35**	$-7{,}\underline{33}.10^{-7}$
0,9	1,32	$7{,}\underline{06}$
0,31	1,0076	
0,3001	1,000076917	
0,30001	1,000007692	
0,300001	1	
0,300002	1,000003	
0,300003	1,0000023	
0,3000031	1,000002233	
0,300003101	1,000002233	
0,300003109	1,000002227	
0,30000311	1,000002226	
0,30000101	1,000000762	
0,30000102	1,000000754	
~~0,30000109~~	~~1,000000706~~	
0,300001095	1,000000702	
0,300001099	1,0000007	
0,3000010999	1,000000699	

Figure 9. *Fiche individuelle de l'élève B binôme I.4*

et conduisent :

• *10 élèves à faire fonctionner une problématique d'« approximation x »* fondée sur la monotonie théorique de *f.* Parmi ces 10 élèves, un seul élève (élève B du binôme III.2) envisage une problématique d' « approximation *f*(*x*) ».



Fiche personnelle avec x > 0,3 de B : 38 Binôme III.2		
X	*f*(*x*)	Brouillon
1	**1,35**	$7{,}693.10^{-6}$
0,4	1,077	$7{,}777.10^{-7}$
0,31	1,0077	$2x^2 + 0{,}1x - 0{,}21 = 1,$
0,301	1,00077	
0,3001	1,000077	
0,30001	1,0000077	
~~0,300001~~		
0,30000099	1,000000777	
0,3000009999	1,000000769	
		1,0000000000769

Figure 10. *Fiche individuelle de l'élève B binôme III.2*

– Ce qu’a permis le travail coopératif enseignant – élèves

En s’appuyant sur le riche éventail des réponses des binômes, le travail coopératif enseignant – élèves a permis :

- d'institutionnaliser un critère de distance de $f(x)$ à 1,
- de donner aux EDI le statut de limite d’une suite décimale
- de rejeter le prolongement de l’ordre discret de **N** dans **D** et **D∞** (ni de premier ni de dernier élément pour une partie non fermée de **D**).
- d'expliciter la problématique d’« approximation x »,
- d'introduire une problématique d’« approximation $f(x)$ » pour interpréter l’affichage 1 de la calculatrice, et donc rejeter le calcul instrumenté,

La stratégie d’approximation x qui consiste à intercaler systématiquement 0,3 dans de petits intervalles par passages successifs d’un $\mathbf{D}_i$ à un $\mathbf{D}_{i+k}$ pour la recherche d’un couple $(x\,;f(x))$ tel que la distance de $f(x)$ à 1 soit le plus petite possible est donc déstabilisée.
L’affichage 1 de la calculatrice permet de disqualifier publiquement le calcul instrumenté en faveur d’un calcul à la main privilégiant l’approximation $f(x)$ de la limite 1 : ce calcul à la main repose sur la résolution d’équations $f(x)=a$ pour calculer des valeurs approchées de 0,3 suffisantes pour approcher 1 « avec une précision donnée à l’avance » (problème 2 de l’approximation).
La question de l’existence ou non d’un meilleur couple, dans les conditions de la situation 3, a permis finalement la mise en place de l’ordre dense dans **D** et **D∞** chez plus des trois quarts des élèves de la classe observée (29 sur 38).
Cependant, la persistance de l’ordre discret de **N** dans **D** et **D∞** chez 7 élèves sur 38 atteste de la force de l’obstacle épistémologique qu’est la structure de **N**, obstacle mis en évidence par Brousseau (1987).

Conclusion

Le fil conducteur de notre ingénierie didactique, réalisée au Viêt Nam, est la construction simultanée d’une problématique d’approximation de la notion de limite et de l’ordre dense (non discret) dans **D** et **D∞** en approchant un réel par intercalation successive dans des intervalles emboîtés $[dn, d'n]$ à bornes décimales. Le passage de l’ordre discret dans **N** à l’ordre dense dans **D∞** fonde aussi le passage d’une problématique d’« approximation x » à celle d’ « approximation $f(x)$ ».
Les situations didactiques de l’ingénierie sont donc générées par les variables d’un problème fondamental de l’approximation décimale lié à la notion de limite dont notre analyse institutionnelle a montré l’absence dans EMS. Les objets algébriques institutionnellement familiers comme équation, inéquation, expression algébrique et domaine de définition d’une fonction nourrissent le milieu de ces situations. La présence de la calculatrice favorise la décimalisation des résultats des calculs.
L’institutionnalisation d’une problématique d’ « approximation $f(x)$ » et de l’identification analytique du type « 0,999…=1 » (statut de limite d’une suite convergente) permet le rejet officiel de l’ordre discret de **N** pour **D** et **D∞** : il n’existe ni premier ni dernier élément pour une partie non fermée de **D**.
La plupart des élèves de la classe observée disent avoir (re)découvert la notion de limite et associent l’écriture symbolique de la limite à la problématique d’ « approximation $f(x)$ » et à l’ordre dense dans **R.**

L'un des projets de l'ingénierie était de faire rencontrer l'obstacle « horreur de l'infini » par l'activation d'écritures telles que 3,(0)1, 2,(9) ou 2,9999… pour mettre en place l'ordre dense de **R** en relation avec la notion de limite dans une problématique d'approximation. Or cette rencontre dépend notamment de l'existence d'un ostensif pour *la période de l'écriture décimale d'un rationnel*. Actuellement un tel ostensif est absent en France, ce qui n'était pas le cas dans les années 1980. Cela rend problématique une reprise telle quelle des situations de l'ingénierie dans le système français.

Plus généralement, les différences écologiques entre systèmes d'enseignement, ici vietnamien et français, amènent à réfléchir aux modifications qui pourraient permettre la reproductibilité des problèmes au cœur d'une ingénierie didactique, problèmes attachés aux raisons d'être de la notion de limite

Références

GROUPE AHA (1999) *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse*. Manuel pour l'élève. Bruxelles : De Boeck.

ARNAUDIÈS J. M. et FRAYSSE H. (1989) *Cours de mathématiques 2 : Analyse.* Dunod Université.

BESSOT A., COMITI C. (2013) Apport des recherches comparatives internationales aux recherches en didactique des mathématiques. Le cas de la France et du Viêt Nam. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* **33/1,** 45-77. La Pensée Sauvage : Grenoble.

BIREBENT A. (2001) *Articulation entre la calculatrice et l'approximation décimale dans les calculs numériques de l'enseignement secondaire français: choix des calculs trigonométriques pour une ingénierie didactique en classe de Première scientifique.* Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

BOSCH M., ESPINOZA L. et GASCON J. (2002) El profesor como director de procesos de estudio: analisis de organizaciones didacticas espontaneas. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, **23/1**, 79 –135. La Pensée Sauvage : Grenoble.

BOURBAKI N. (1960) *Livre III Topologie général*. Hermann & Cie, Editeurs.

BROUSSEAU G., BROUSSEAU N. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire.* Publication de l'I.R.E.M. de Bordeaux.

BROUSSEAU G. (1998) *Théorie des situations didactiques.* La Pensée Sauvage : Grenoble.

CAUCHY A. L. (1821) *Cours d'analyse de l'Ecole Royale Polytechnique*. Paris, Gauthiers-Villars et fils, Imprimeurs. Librairie du Bureau des Longitudes de l'Ecole Royale Polytechnique éds (1847).

CORNU B. (1983) *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Thèse, Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

LEBESGUE H. (1931) *La mesure des grandeurs*. Albert Blanchard (réédition 1975).

LE THAI BAO T.T. (2007) *Etude didactique des relations entre notion de limite et décimalisation des nombres réels dans un environnement « calculatrice ». Une étude de cas dans l'enseignement mathématique secondaire au Viêt Nam.* Thèse en cotutelle, Université Joseph Fourier et Université Pédagogique de Ho Chi Minh.

LE THAI BAO T.T. (2012) Notion de limite et décimalisation des nombre réels : le cas d'enseignement secondaire au Viet Nam, *Petit x,* **89**, 33-50. IREM de Grenoble.

MARGOLINAS C. (1985) MARGOLINAS C. (1985) *Un bilan des connaissances sur les nombres après la classe de 4e, le nombre dans tous ses états.* Mémoire de DEA, Université de Bordeaux 1.

MARGOLINAS C. (1988) Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels, *Petit x,* **16**, 51–66. IREM de Grenoble.

NEYRET R. (1995) *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les instituts Universitaire de Formation des Maîtres.* Thèse, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

SIERPINSKA A. (1985) Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **6/1**, 5–67. La Pensée Sauvage : Grenoble.

TROUCHE L. (1996) *A propos de l'apprentissage des limites de fonctions dans « un environnement calculatrice » : Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation.* Thèse, Université Montpellier II.

Manuels scolaires français

Girard G., Lentin A. (1964), Mathématiques élémentaires (deux tomes), Cours Maillard, Editions Hachette.

Collection Queysanne-Revuz du Collège et du Lycée, programme de la Réforme des Mathématiques Modernes (1968/1977).

Collection Dimathème du Lycée (1982), programme de la Contre-Réforme des Mathématiques Modernes.

Manuels et programmes scolaires vietnamiens (édition du Ministère d'Education et de Formation)

Programme de la « réforme de l'éducation » du Lycée (1990 -1999) et ses trois collections de manuels.

Programme en vigueur de la « harmonisation et unification » (à partir des 2000) et sa collection de manuels.