

QUEL CONTRÔLE EXERCENT LES ÉLÈVES LORS DE LA RÉOLUTION D'UN PROBLÈME DE COMPARAISON DE FRACTIONS ?

Mireille SABOYA

Université du Québec à Montréal

Stéphanie RHÉAUME

Université Laval

Résumé. S'engager de façon réfléchie dans une activité, être en mesure de discerner une procédure gagnante et d'en écarter d'autres sont quelques-unes des attitudes en mathématiques qui sont à privilégier chez les élèves de tous les niveaux. Ces attitudes font partie de ce que nous avons appelé le *contrôle*. C'est sous ce regard que nous rapportons une analyse de productions d'élèves du Québec qui sont dans la première année du secondaire (12-13 ans) autour d'un problème de comparaison de cinq fractions. L'analyse rapporte des moments de blocage, des changements de procédure, l'utilisation de procédures efficaces, d'une combinaison de procédures qui mettent en lumière le contrôle exercé par les élèves et qui vont au-delà de ce que nous avons anticipé. Ces résultats ouvrent la porte à des pistes intéressantes pour l'enseignement.

Mots-clés. Contrôle, choix éclairé, engagement réfléchi, contrôle sémantique, comparaison de fractions, résolution de problèmes.

Abstract. Being engaged in a reasoned way in an activity, being able to discern an efficient procedure and discard others are some of the mathematical attitudes that should be privileged by students from all grade levels. These attitudes are part of what we have called control. It is through this lens that we report on some students' productions (12-13 years of age, in Quebec schools) about a problem where five fractions were compared. The analysis outlines freezing moments, moments of changes in procedures, of using efficient procedures, of combining procedures; all of these shedding some light on aspects of control enacted by students and that go beyond what we had expected. These results open the way to some fruitful teaching options.

Keywords. Control, educated choice, reasoned engagement, semantic control, comparison of fractions, problem solving.

Introduction

Quels que soient le contenu et le niveau scolaire, l'élève devrait être en mesure d'exercer une action contrôlée sur son activité mathématique. Dans le sens commun, le *contrôle* signifie maîtriser quelque chose et/ou exercer une surveillance attentive. En mathématiques, cet état de vigilance qui incarne bien le contrôle s'exprime à travers plusieurs composantes (Saboya, 2010). À titre d'exemples, nous pouvons citer la capacité de vérifier le résultat obtenu, de valider des énoncés, de justifier une démarche,

de s'engager de façon réfléchie dans une tâche, de percevoir ses erreurs, ... S'attarder sur le *contrôle* exercé par les élèves apparaît comme un enjeu clé dans l'apprentissage des mathématiques. Les recherches¹ se sont intéressées au contrôle essentiellement sous l'angle de la validation et de la vérification en algèbre (Coppé 1993 ; Margolinas 1989 ; Chevallard 1989 ; Cortés et Kavafian 1999 ; Lee et Wheeler 1989 ; Saboya 2010) et de la vérification dans la résolution de problèmes en arithmétique (Richard 1998 ; Delorme 1985 ; Cipra 1985 ; Dib 2000-2001 ; Polya 1965 ; Vivier 1988). Ces deux composantes du contrôle sont les plus documentées dans les recherches. Dans ce texte, nous nous attarderons à éclairer quatre autres composantes, l'*engagement réfléchi*, le *choix éclairé* de procédures, le *contrôle sémantique* et le *contrôle syntaxique*. Ces composantes ont été surtout étudiées en algèbre (voir section 2). Notre étude s'inscrit dans la visée de mieux circonscrire l'action contrôlée manifestée par les élèves en arithmétique et plus particulièrement dans la résolution d'un problème portant sur la comparaison de fractions.

Depuis les années 90, de nombreux chercheurs de différents pays se sont intéressés aux fractions à travers ses divers sens, les raisonnements sollicités, les représentations discrètes et continues, les habiletés requises, les erreurs et difficultés des élèves; de plus, des séquences d'enseignement et des activités ont été proposées et ce, à divers niveaux d'enseignement. Les chercheurs ont également retracé l'histoire des fractions, le potentiel de la calculatrice en lien avec les fractions et rapporté des analyses de manuels scolaires. Sans chercher à être exhaustifs, nous pouvons citer les études menées par Brousseau (1981), Behr et al. (1983), Hasemann (1986), Rouche (1998), Kieren (1988), Krikorian (1996), Rosar et al. (2001), Blouin et Lemoyne (2002); Mercier et Deblois (2004), Charamboulous et Pitta-Pantezi (2007), Weiss et Floris (2008), Van de Walle et Lovin (2008),.... Nous proposons dans ce texte de poser un regard *nouveau* sur les fractions à travers une analyse de productions d'élèves guidée par le repérage de *manifestations* d'actions *contrôlées*.

Dans la section qui suit, nous revenons sur le concept de *contrôle* à travers les quatre composantes ciblées. Dans la section 2 nous décrivons plus précisément le contexte de l'étude. La section 3 présente les résultats de l'analyse d'un problème de comparaison de fractions soumis aux élèves avant toute intervention. Ces résultats font preuve de diverses manifestations de contrôle qui, d'une part, précisent et illustrent les quatre composantes ciblées et d'autre part, apportent un éclairage nouveau sur ce que recouvre l'activité de contrôle, dépassant ce que nous avons anticipé dans l'analyse préalable du problème. Finalement, dans la section 4, nous reviendrons sur la conceptualisation du contrôle qui émerge des résultats et ouvrirons la discussion sur quelques pistes pour l'enseignement.

1. Le concept de contrôle

Le contrôle peut prendre place tout au long de la résolution d'un problème. En amont de la réalisation, il permet une anticipation, les élèves posent *a priori* une condition de validité du résultat avant de le connaître. Il assure une mobilisation des connaissances

¹ Nous tenons à préciser que tous les chercheurs n'utilisent pas le terme *contrôle*.

en jeu, il se manifeste par une relation entre les données et le but à atteindre. Il se traduit par un temps d'arrêt, un esprit critique, une évaluation des stratégies possibles, par une recherche de sens, par le choix d'une interprétation possible parmi plusieurs interprétations. En aval de la réalisation, le contrôle assure un travail rétrospectif, une vérification du résultat pour dépasser le doute et acquérir une certitude. Si nécessaire, il permet un retour sur la tâche, sur la question et contribue à une évaluation de la méthode utilisée, de la démarche, du choix de la méthode et/ou du résultat. Le contrôle passe également par la perception des erreurs, une sensibilité et/ou un dépassement à la contradiction. En début ou en cours de processus, le contrôle se manifeste par des prises de décision sur la direction à prendre, la procédure la plus efficace, la moins coûteuse en temps et par des évaluations périodiques tout au long de la résolution. Sont ainsi relevées certaines composantes du contrôle comme l'*anticipation*, la *vérification*, la *perception des erreurs*. D'autres composantes, que nous détaillons ci-après, traduisent aussi un contrôle.

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à la distinction entre le *contrôle syntaxique* et le *contrôle sémantique* dans le domaine de l'algèbre (Schmidt 1994 ; Bednarz et Saboya 2007 ; Kouki 2007 ; Saboya, Bednarz et Hitt 2015)². Au Québec, les travaux de Schmidt (1994) en résolution de problèmes en algèbre et plus particulièrement ceux portant sur la transition arithmétique algèbre, pointent certaines difficultés chez les étudiants dans le passage à l'algèbre, dont l'origine est à retracer dans la nature du contrôle qu'ils exerçaient en arithmétique et qu'ils doivent maintenant exercer. La résolution arithmétique avançait en prenant appui sur des grandeurs connues et des significations contextuelles, alors que la résolution algébrique doit prendre appui sur des critères autres pour juger de la validité des raisonnements mis en place. Pour Bednarz et Saboya (2007), ces deux contrôles sont sollicités au moment du processus d'écriture de l'équation. La mise en équation requiert un contrôle sémantique s'articulant sur une signification contextuelle des grandeurs en présence, des relations et des transformations. Au moment de la résolution, le passage vers un autre type de contrôle est nécessaire, un contrôle syntaxique. L'élève doit dans ce cas quitter le contexte pour pouvoir opérer et résoudre. La résolution s'appuie sur un travail sur des expressions algébriques, qui a une certaine signification mais dans un autre registre (Duval 1993), des transformations sur des quantités sont ici effectuées de manière à conserver l'égalité.

L'engagement réfléchi s'appuie sur une prise de distance, un arrêt devant le problème avant, en cours et/ou à la fin de la résolution (Kargiotakis 1996). Ce contrôle est lié à une réflexion sur l'action, des fois avant même de s'engager dans la résolution par une appropriation du problème en donnant du sens en contexte ou par un retour aux fondements (concepts, conventions). Bednarz et Janvier (1992) ont observé un manque d'engagement réfléchi des élèves au secondaire en contexte de résolution d'un certain type d'équations. Ainsi, face à la résolution de l'équation, plusieurs élèves s'engagent en s'appuyant sur des manipulations algébriques alors qu'un regard sur l'équation permet de conclure que 6 est solution de cette équation, ce qui montre une prise de distance sur

2 Brousseau (1986) l'introduit dans la théorie des ensembles : « Pour éviter les erreurs, il ne suffit pas d'appliquer les axiomes, il faut savoir de quoi on parle et connaître les paradoxes attachés à certains usages pour les éviter. Ce contrôle [sémantique] diffère assez du contrôle mathématique habituel, plus « syntaxique ». (p.43).

la tâche. De plus, Saboya (2010) souligne que l'engagement réfléchi repose sur le sens accordé à l'égalité. C'est le cas par exemple dans l'interprétation d'égalités où il n'y a pas de solution ou une infinité de solutions. $0 \cdot x = 0$ doit être interprété comme « on cherche un nombre qui multiplié par zéro donne zéro, n'importe quel nombre vérifie cet énoncé, il y a donc une infinité de solutions, l'égalité étant toujours vraie ».

L'élève exerce également une action contrôlée lorsqu'il manifeste un *discernement/choix éclairé* au regard de différentes stratégies de résolution possibles. Schoenfeld (1985) insiste ici sur l'importance de lier les caractéristiques d'un problème et la stratégie privilégiée. Ainsi, quand l'élève travaille sur un problème, il peut posséder plusieurs stratégies de résolution, mais toutes ces stratégies ne sont pas nécessairement efficaces. Si l'élève choisit une stratégie peu appropriée et qu'il poursuit avec celle-ci en excluant les autres, alors soit il échouera dans la résolution du problème, soit il arrivera à sa résolution mais avec des stratégies difficiles et coûteuses en temps. Ce choix peut donc affecter le processus de résolution d'un problème. Le contrôle se manifeste ainsi par la capacité de voir différentes stratégies pour résoudre le problème et par la capacité de faire un choix pertinent d'une stratégie appropriée, efficace, peu coûteuse en temps en ayant préalablement écarté les stratégies qui sont inappropriées (Schoenfeld 1985 ; Krutetskii 1976). Dans le problème,

Émilien avait 18 ans quand il a commencé à placer son argent à un taux annuel de 10% par an. Combien d'argent va-t-il avoir quand il aura pris sa retraite? Et s'il meurt à 98 ans et qu'il cotise jusque-là, quel héritage va-t-il laisser à ses enfants?

le calcul du 10% du montant année après année amène de longs calculs par rapport à une généralisation qui permet de multiplier par 1,1 le montant initial autant de fois qu'il y a d'années écoulées (Saboya 2010).

2. Contexte de l'étude

Cette étude provient d'une recherche plus large, une recherche collaborative (dans le sens de Desgagné 1998 et 2001 ; Bednarz 2013 ; Barry et Saboya 2015) qui a été menée avec trois enseignants de première année du secondaire (élèves de 12-13 ans) d'une école publique située dans la banlieue de Montréal au Québec. Nous étions intéressés à circonscrire la manière dont prend place et/ou se développe une possible activité de *contrôle* chez les élèves à travers la construction conjointe de situations et d'interventions. Dans le système québécois, la première année du secondaire correspond en France à la deuxième année du collège (niveau cinquième). Le problème de comparaison de fractions dont nous rapportons l'analyse fait partie d'un questionnaire comportant sept questions sur les fractions qui requièrent une activité de *contrôle* sous ses diverses composantes. L'analyse de ce problème montre une richesse dans la mise en place d'actions *contrôlées* mobilisées par les élèves et ce, avant toute intervention. En tout, 271 élèves ont rempli le questionnaire dans le courant du premier mois de la rentrée scolaire (à la fin septembre). Ces élèves proviennent d'un bassin de cinq écoles primaires situées dans la même région que l'école secondaire qu'ils fréquentent.

2.1 Place des fractions dans le contexte scolaire québécois

Dans leur scolarité au primaire, les élèves acquièrent graduellement le concept de fraction. Visant le développement du sens et l'écriture des nombres, le programme de formation de l'école québécoise (MELS 2001) axe principalement sur les divers sens (partage, division, rapport) à travers l'étude des fractions à partir d'un tout et/ou d'une collection d'objets. Cet apprentissage s'appuie sur des représentations variées (concrètes ou imagées) qui amènent l'élève à lire et à écrire des fractions. C'est au troisième cycle³ et à l'aide de matériel concret et de schémas que les élèves travaillent les opérations avec les fractions. Pour l'addition et la soustraction, un des dénominateurs est multiple des autres et pour la multiplication, on se restreint à la multiplication d'une fraction par un nombre naturel.

La comparaison de fractions est à l'étude dès le deuxième cycle du primaire. Le programme spécifie que la comparaison s'établit par rapport à 0, $\frac{1}{2}$ et 1 (MELS 2001, 2^{ième} cycle primaire, p. 134). De plus, la progression des apprentissages⁴ (MELS 2013) indique qu'à la fin du 3^e cycle, l'élève doit être capable d'ordonner trois types de fractions, celles ayant un même dénominateur, celles dont le dénominateur de l'une est un multiple de l'autre (ou des autres)⁵ et celles présentant un même numérateur. Est également visé un travail sur les fractions équivalentes, la réduction de fractions, l'habileté à situer des fractions sur un axe de nombres (droite numérique), d'associer un nombre décimal ou un pourcentage à une fraction. Même s'ils ne sont pas identifiés comme tels dans le programme, ces éléments peuvent être réinvestis pour comparer des fractions.

À ce stade, quelques questions émergent. Quelles procédures les élèves mobilisent afin de comparer des fractions et quel contrôle exercent-ils dans la mobilisation de ces procédures? Le choix de la situation est important, celle-ci devant favoriser une action *contrôlée* chez les élèves⁶ (Lee et Wheeler 1989 ; Perkins et Simmons 1988 ; Cipra 1985 ; Piaget 1974 ; Kargiotakis 1996 ; Schmidt 1994 ; Schoenfeld 1985). Notre intention était d'élaborer une situation permettant à l'élève de procéder à un *choix éclairé* entre diverses procédures possibles, pour discerner celle qui est la plus efficace, celle qui mène vers la solution le plus rapidement, sans trop de risques d'erreurs.

3 Au Québec, le primaire s'étale sur 6 ans. Il se divise en trois cycles. Le premier cycle comprend la première et deuxième années (élèves de 6 à 8 ans), le deuxième cycle englobe la troisième et quatrième années (8 à 10 ans), la cinquième et sixième années constituent le troisième cycle (10 à 12 ans).

4 Ce document présente, sous forme de tableau, l'évolution de l'apprentissage des savoirs essentiels durant les six années du primaire. Sont identifiées l'année où l'élève apprend avec l'intervention de l'enseignant(e), la ou les année(s) où l'élève le fait par lui-même à la fin de l'année scolaire et la ou les année(s) où l'élève réutilise cette connaissance.

5 Dans ce cas-ci il s'agit de reconnaître le plus petit commun multiple (PPCM) dans les dénominateurs présentés.

6 Nous soulignons que les chercheurs n'utilisent pas tous le terme « contrôle » dans leurs études.

2.2 Construction d'un problème favorisant la sollicitation de quatre composantes du contrôle et analyse préalable

Le problème « les Olympiques » (voir figure 1) a été conçu afin de favoriser le recours aux quatre composantes du contrôle identifiées dans la deuxième section. Dans ce problème, l'élève est désigné comme la personne responsable du classement d'athlètes participant à des Olympiques au sein de son école. Cette mise en contexte peut nécessiter que l'élève connaisse quelque peu la nature et le déroulement de cette discipline. Elle requiert également qu'il puisse associer la plus grande fraction à la plus grande distance parcourue, donc à la médaille d'or. C'est l'élève qui détermine qu'une comparaison entre les fractions est nécessaire.

Lors des Olympiques scolaires de ton école, tu es responsable du classement des athlètes. Les résultats représentent, en fraction, la distance parcourue par l'athlète. À partir des résultats du saut en longueur, complète le tableau de la remise des médailles. Celui qui parcourt la plus grande distance gagne.

Luc: $\frac{3}{5}$ Paolo: $\frac{2}{7}$ Julien: $\frac{1}{2}$ Alex: $\frac{3}{8}$ Yvan: $\frac{6}{7}$

1 ^{ère} place (Or)	2 ^e place (Argent)	3 ^e place (Bronze)	4 ^e place	5 ^e place

Note: Étant donné la grande responsabilité de cette tâche, tu dois expliquer aux juges comment tu as fait. Laisse des traces ta démarche.

Figure 1. Problème des Olympiques portant sur la comparaison de fractions

Afin que la situation ouvre vers un large choix de procédures, nous avons pris en considération différents aspects comme la valeur du *Tout* qui n'est pas donnée, le nombre de fractions à comparer et la taille des fractions. Ainsi, le problème des Olympiques ne suggère pas d'emblée de le résoudre à l'aide de calculs basés sur un tout connu mais plutôt de trouver d'autres moyens pour comparer les fractions entre elles. De plus, les manuels scolaires⁷ mis à la disposition des élèves du 3^e cycle⁸ du primaire du Québec nous ont permis de constater que les exercices et problèmes comportent au plus trois fractions à comparer. Le problème des Olympiques propose cinq fractions, ce qui n'est donc pas une tâche habituelle pour les élèves de ce niveau. Le choix des fractions n'est pas anodin. Les cinq fractions ont quatre dénominateurs différents. Les manuels québécois proposent surtout de comparer des fractions avec des dénominateurs qui sont des facteurs d'au moins un des dénominateurs donné. Dans le problème des

7 Nous tenons à préciser que l'analyse des manuels scolaires effectuée pour cette étude porte sur les manuels scolaires respectant le programme de formation québécoise (2001) et qui étaient disponibles pour les élèves du 3^e cycle avant l'automne 2012, moment de la collecte de données. À partir de l'automne 2012, une nouvelle vague de manuels scolaires a fait son entrée dans les classes du Québec.

8 Tel que précisé précédemment, au Québec, le 3^e cycle du primaire regroupe les élèves de 5^e année (10-11 ans) et 6^e année (11-12 ans). Ces niveaux scolaires correspondent respectivement en France au CM2 au primaire et au collège à la 6^e.

Olympiques, seul un des cinq dénominateurs (2) est le facteur d'un autre dénominateur (8). L'élève n'étant donc pas en présence d'un dénominateur multiple des autres, doit se tourner vers d'autres procédures de comparaison. De plus, dans le problème des Olympiques, le plus petit commun multiple est 280. La recherche d'un dénominateur commun en énumérant les différents multiples pour chacun des dénominateurs (ex : 8-16-24-32-40-48-56-...) jusqu'à trouver un multiple commun s'avère longue et ardue, et le risque de faire des erreurs n'est pas négligeable. En proposant ces fractions, notre intention était de favoriser chez l'élève un temps d'arrêt devant les fractions à l'étude pour qu'il soit amené à évaluer et à choisir une procédure ou une combinaison de procédures permettant la comparaison.

Ainsi, dans le problème des Olympiques, l'élève se retrouve face à ce que Kargiotakis (1996) nomme une situation de choix. C'est une situation dans laquelle on peut faire des choix, prendre des décisions, ce qui implique que l'élève se trouve devant plusieurs choix possibles au moment de la résolution. Kargiotakis parle alors d'un « contrôle en situation de choix » quand l'élève décide entre la décision qu'il vient de prendre et l'issue possible de l'action, il prend alors une distance par rapport à l'action. Cette prise de distance est signe d'un *engagement réfléchi* qui peut mener vers un *choix éclairé* d'une procédure permettant de comparer les fractions à l'étude et ce, en limitant le risque d'erreurs. Le problème des Olympiques offre la possibilité aux élèves d'aller puiser dans un bagage de connaissances et de les mettre en action dans cette situation. Nous pouvons prévoir six procédures différentes, certaines amenant à une impasse, d'autres requérant un contrôle.

Procédure 1 : Recherche d'un dénominateur commun. Nous pensons que c'est la procédure la plus naturelle aux élèves dans un contexte de comparaison de fractions parce qu'elle est la plus utilisée dans les manuels scolaires. Toutefois, étant donné le choix des dénominateurs, l'élève devra exercer un *regard réflexif* sur ces différents dénominateurs pour repérer que $5 \times 7 \times 8$ est le plus petit commun multiple. En procédant ainsi, il mobilise ce que nous appellerons dans ce contexte numérique un contrôle sur les calculs afin de mener à bout cette multiplication et par la suite procéder aux opérations nécessaires afin de trouver les fractions équivalentes à celles proposées et dont le dénominateur est 280.

Procédure 2 : Comparer des fractions ayant le même numérateur et/ou dénominateur. Un *contrôle sémantique* se met en place lorsque l'élève repère certaines caractéristiques pour les cinq fractions à l'étude $\frac{2}{7}$ et $\frac{6}{7}$ ont le même dénominateur, on peut comparer le nombre de parties parcourues pour un sectionnement de la piste en des parties de la même longueur. Les fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{3}{8}$ ont le même numérateur, le raisonnement repose sur la longueur des parties dont a été sectionnée la piste, le nombre de parties parcourues étant le même. On peut ainsi en déduire que $\frac{2}{7}$ est plus petite que $\frac{6}{7}$ et que $\frac{3}{8}$ est plus petite que $\frac{3}{5}$. Ce qui n'est toutefois pas suffisant pour comparer les cinq fractions.

Procédure 3 : Comparer par rapport à $\frac{1}{2}$ et raisonner sur la taille des morceaux. La fraction $\frac{1}{2}$ favorise la procédure de comparaison des quatre autres fractions par rapport à la moitié. On se retrouve ainsi avec deux fractions plus petites ($\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{8}$) et deux fractions plus grandes ($\frac{6}{7}$ et $\frac{3}{5}$) qu'une demie. L'application d'une autre procédure est alors nécessaire pour comparer entre elles ces deux paires de fractions. Plusieurs choix sont ici possibles. Un *contrôle sémantique* permettrait de conclure que la fraction $\frac{2}{7}$ est plus petite que la fraction $\frac{3}{8}$ car la distance qui sépare $\frac{2}{7}$ de la moitié est plus grande que la distance qui sépare $\frac{3}{8}$ de la moitié. En effet, $\frac{2}{7}$ est à 1,5 morceaux de un septième de la moitié alors que $\frac{3}{8}$ est à un morceau de un huitième de la moitié et les huitièmes sont des morceaux plus petits que les septièmes donc la distance entre $\frac{2}{7}$ et $\frac{1}{2}$ est plus grande que la distance qui sépare $\frac{3}{8}$ à $\frac{1}{2}$. Un raisonnement similaire permettrait de comparer $\frac{6}{7}$ et $\frac{3}{5}$, cette fois-ci en regardant la partie manquante pour compléter le *Tout*. Nous pouvons remarquer que ce raisonnement est assez ardu puisqu'il requiert de prendre en considération simultanément la taille, le nombre des morceaux et la taille qui manque pour atteindre une fraction repère.

Procédure 4 : Comparer par rapport à $\frac{1}{2}$ et recours à un dénominateur commun sur chacune des deux paires de fractions. Une autre procédure pour comparer les deux paires de fractions ($\frac{2}{7}$ et $\frac{3}{8}$) et ($\frac{6}{7}$ et $\frac{3}{5}$) serait d'avoir recours pour chacune d'elles à un dénominateur commun. Comme les nombres 7 et 8 ainsi que 5 et 7 sont premiers entre eux, le plus petit commun multiple sera le produit de ces nombres. Le recours à une combinaison de procédures pour comparer les fractions à l'étude démontre un *engagement réfléchi* et un *choix éclairé* de deux procédures séquentielles pour mener jusqu'au bout la comparaison et ce, sans avoir réalisé de *gros* calculs.

Procédure 5 : Transformer les fractions en pourcentage et/ou en nombres décimaux. Un *contrôle sur les calculs* se manifeste lorsque l'élève transforme les fractions en pourcentage ou en nombres décimaux. Ce contrôle se traduit par une maîtrise des algorithmes de division et de multiplication. La division des numérateurs par les dénominateurs amène à réaliser des divisions où le dividende est plus petit que le diviseur. De plus, certaines divisions ont une partie décimale périodique de 6 chiffres, c'est le cas par exemple de $\frac{2}{7}$ dont la période est 285714 et $\frac{6}{7}$ de période 857142.

Procédure 6 : Recours à une représentation dessinée. L'élève pourrait avoir recours à des représentations dessinées pour représenter chacune de ces fractions. Représenter les fractions par une représentation visuelle requiert un *contrôle sémantique* reposant sur la considération d'un même *Tout* de référence pour toutes les fractions et sur un

partitionnement adapté à chacune des fractions en parties de même taille ainsi que sur l'habileté à les représenter visuellement.

Le partitionnement doit être assez exact pour permettre de comparer dans ce problème les fractions $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{5}$ (voir exemple 9 à l'annexe 1).

3. Manifestations d'une action contrôlée dans un problème de comparaison de fractions

Le questionnaire écrit soumis aux 271 élèves des enseignants participant à la recherche collaborative avait comme objectif de relever des traces d'une action contrôlée ou de difficultés de contrôle avant toute intervention. Le problème des Olympiques présente une analyse riche en ce sens⁹. Par la suite, ces traces ont permis d'alimenter les discussions entre chercheurs et enseignants lors des rencontres réflexives de co-construction d'interventions visant le développement d'un contrôle chez les élèves.

Le taux de réussite pour le problème des Olympiques est de 34,7%. La grande majorité des élèves (93%) se sont engagés dans la résolution après avoir reconnu la tâche de comparaison de fractions. Voici une synthèse des procédures ressorties :

- Plus de la moitié des élèves (55%) se tournent vers la recherche d'un dénominateur commun (procédure 1, voir exemples 10 et 11 à l'annexe 2). Toutefois seulement 6 de ces 149 élèves y arrivent¹⁰ (voir en annexe les difficultés rencontrées par les élèves quand ils s'engagent dans cette procédure).
- 38 élèves (14%) transforment les fractions données en pourcentage et/ou en nombres décimaux (procédure 5). Parmi ces 38 élèves, 16 comparent convenablement les cinq fractions.
- 32 élèves (11,8%) utilisent une représentation dessinée (procédure 6) et à peu près la moitié d'entre eux réussissent le problème.
- 9 élèves (3,3%) utilisent un raisonnement qualitatif pour comparer mais pas aussi *sophistiqué* que celui décrit dans la procédure 3. Nous reviendrons plus loin sur ce type de procédure et ce qu'elle suppose du point de vue du contrôle.
- 11 élèves (4%) résolvent en utilisant une procédure proche de la procédure 4. Certains d'entre eux au lieu de trouver un dénominateur commun pour chacune des deux paires de fractions tel qu'expliqué à la section précédente, utilisent une représentation dessinée pour comparer chacune de ces deux paires.
- Nous n'avons pas repéré de résolution reposant sur la comparaison des fractions ayant les mêmes numérateurs et les mêmes dénominateurs (procédure 2) qui débouche sur une impasse.

⁹ Toutefois, nous sommes conscients que l'analyse des traces écrites présente des limites quant à leur interprétation. Des entrevues auraient permis de mieux comprendre certaines actions posées et/ou pensées par les élèves lors de la résolution du problème. Plusieurs élèves ont été interviewés mais sur d'autres tâches que celles présentées dans le questionnaire.

¹⁰ Les multiples trouvés sont 280 (PPCM), 560, 5600 et 1120.

Dans ce qui suit, nous présentons l'analyse de huit productions d'élèves illustrant des manifestations de contrôle à travers des traces écrites. Cette analyse permet de mieux circonscrire et de conceptualiser le concept de contrôle au-delà de la tâche de comparaison de fractions. Comme nous le verrons, les copies sélectionnées ne sont pas forcément celles dont la fréquence d'apparition de la procédure utilisée est la plus grande. Ainsi ce n'est pas la réussite qui est en avant plan dans notre étude mais plutôt le processus de *contrôle* mis en place par certains élèves pour résoudre le problème des Olympiques. Un élève peut échouer dans la tâche de comparaison des cinq fractions et manifester une activité de *contrôle* à un certain moment dans sa résolution.

3.1 Un engagement réfléchi qui se manifeste après une impasse

La grande majorité des élèves qui sont à la recherche d'un dénominateur commun pour les cinq fractions proposées sont confrontés à une impasse et s'arrêtent ne sachant comment poursuivre la comparaison. Après un premier essai infructueux, plusieurs élèves sont bloqués et abandonnent la résolution. Il est intéressant de remarquer que certains élèves, face à une impasse, dépassent ce sentiment de blocage en changeant de procédure (voir les trois exemples dans le tableau 1 ci-après).

Luc : $\frac{3}{5}$ Paolo : $\frac{2}{7}$ Julien : $\frac{1}{2}$ Alex : $\frac{3}{8}$ Yvan : $\frac{6}{7}$ = 25,71

1 ^{ère} place (Or)	2 ^e place (Argent)	3 ^e place (Bronze)	4 ^e place	5 ^e place
Yvan	Luc	Julien	Alex	Paolo

Note : Étant donné la grande responsabilité de cette tâche, tu dois expliquer aux juges comment tu as fait. Laisse des traces ta démarche.

5 { (5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 80, 90, 100)

7 { (7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84)

2 { (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32)

8 { (8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, 88, 96)

100% Pourcentage

$\frac{3}{5} = \frac{60}{100}$ $\frac{2}{7} = \frac{28,57}{100}$ $\frac{1}{2} = \frac{50}{100}$ $\frac{3}{8} = \frac{37,5}{100}$ $\frac{6}{7} = \frac{85,71}{100}$

$\frac{60}{100} = 60\%$ $\frac{28,57}{100} = 28,57\%$ $\frac{50}{100} = 50\%$ $\frac{37,5}{100} = 37,5\%$ $\frac{85,71}{100} = 85,71\%$

60, 28,57, 50, 37,5, 85,71

600,7
501,28,57
350
400,71

Exemple 1

1 ^{ère} place (Or)	2 ^e place (Argent)	3 ^e place (Bronze)	4 ^e place	5 ^e place
Yvan	Luc	Julien	Alex	Paolo

Note : Étant donné la grande responsabilité de cette tâche, tu dois expliquer aux juges comment tu as fait. Laisse des traces ta démarche.

① Plus petit multiple commun

5: 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, (...) 50, 55, 60
 7: 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70
 2: (...) 10, 12 (...), 50, 52, 54, (...)
 8: 16, 24, 32, 40, 48, 56

suite

5: 65, 70 trop long...
 7: 77
 2: 66
 8: 71

② $5 \times 7 = 35$, $2 \times 8 = 16$, $35 \times 16 = 560$

③

VERSUS

315, 217 1/2, 318, 617. 250

$\frac{3}{5} \times 20 = \frac{60}{100}$, $\frac{1}{2} = \frac{50}{100}$

315 | 217 | 1/2 | 318 | 617

60% | 28,57% | 50% | 37,50% | 85,71%

2 217 de 100. $2 \times 100 = 200$
 $200 - 7 = 28,57 \rightarrow$
 $28,57 / 100 = 28,57\%$

318 de 100 $3 \times 100 = 300$
 $300 - 8 = 37,50 \rightarrow$
 $37,50\%$

617 de 100 $6 \times 100 = 600$
 $600 - 7 = 85,71 \rightarrow$
 $85,71\%$

Exemple 2

démarche

① mettre sur le même dénominateur.

Luc -
 Paolo -
 Julien -
 Alex -
 Yvan -

② comparer les distances

Luc	P	J	A	Y
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{7}$
$\frac{36}{42}$	$\frac{21}{42}$	$\frac{21}{42}$	$\frac{24}{42}$	$\frac{36}{42}$

Exemple 3

Tableau 1. Traces d'engagement réfléchi qui se traduit par un changement de procédure

Dans l'exemple 1, l'élève s'engage dans la recherche d'un dénominateur commun en énumérant les différents multiples (procédure 1). Il barre par la suite sa démarche et choisit alors une autre procédure, un changement de registre (Duval, 1993) vers les pourcentages (procédure 5). Ce changement illustre un engagement réfléchi en cours de résolution menant à un choix éclairé d'une procédure. Après la mise en échec de la première tentative de résolution, l'élève est amené à reconnaître les limites de la procédure et à se tourner vers une autre procédure qui lui permettra de comparer les fractions. Le passage des fractions en pourcentages requiert un contrôle sur les calculs. Nous pouvons observer dans sa copie que l'élève effectue des divisions jusqu'aux centièmes, démontrant une maîtrise dans l'algorithme de division.

Dans l'exemple 2 (tableau 1), l'élève procède à deux changements de procédure. Après avoir établi les premiers multiples de chacun des dénominateurs, l'élève abandonne cette procédure qualifiée de « trop long » (procédure 1). Toutefois, il est toujours animé par le désir de trouver un dénominateur commun. Il simplifie cette recherche en ayant recours à une autre méthode pour trouver un dénominateur commun : multiplier entre eux tous les dénominateurs des fractions données et obtient le dénominateur commun 560 (procédure 1). Un contrôle est ainsi mobilisé par le recours à une résolution de la même procédure par deux méthodes différentes. Nous supposons que la taille du dénominateur (560) devient une autre limite pour l'élève qui fait en sorte qu'il ne s'engage pas plus loin dans les calculs. L'élève choisit finalement de transformer les fractions en pourcentages (procédure 5) démontrant un *contrôle sur les calculs*. Dans ce passage vers les fractions, nous pouvons remarquer que le traitement effectué pour les fractions $\frac{3}{5}$ et $\frac{1}{2}$ n'est pas le même que pour les fractions $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{8}$ et $\frac{6}{7}$. L'élève repère

que les dénominateurs 2 et 5 sont des diviseurs de 100 et qu'on peut obtenir la fraction équivalente sur 100 en multipliant le numérateur et le dénominateur par un entier naturel. Ce qui n'est pas le cas des trois autres fractions pour lesquelles il cherche, par exemple, les « $\frac{2}{7}$ de 100 » et produit des divisions faisant preuve d'un contrôle sur les

calculs. Il y a ainsi un regard préalable sur les fractions par l'élève, le traitement qu'il fait subir à la fraction pour trouver son équivalent sur 100 s'adapte aux caractéristiques du dénominateur. C'est une *nouvelle* manifestation d'une activité de contrôle.

Dans l'exemple 3 (tableau 1), un fait retient notre attention, cet élève se tourne, comme les précédents, vers la recherche d'un dénominateur commun, procédure qu'il décrit comme « mettre sur le même dénominateur » (procédure 1). Toutefois, et ceci est intéressant, l'élève ne se lance pas dans les calculs, il barre cette première procédure et choisit de représenter les fractions par une représentation visuelle rectangulaire. Nous avons « peut-être » ici un exemple d'une *évaluation par anticipation* de la procédure du dénominateur commun qui ne sera pas retenue¹¹. L'élève prend conscience *avant toute résolution* des limites de cette procédure et change de procédure en cours de route. Cet élève résout avec succès le problème en utilisant une représentation dessinée rectangulaire¹².

11 D'autres élèves procèdent certainement ainsi mais ne l'écrivent pas dans leur copie. Ce processus est mental, ce qui montre les limites d'un questionnaire écrit. Il aurait été intéressant d'interroger cet élève pour en savoir plus sur son processus de résolution.

12 Presque tous les élèves utilisent une représentation rectangulaire, seulement deux choisissent une représentation circulaire.

En résumé, un changement de procédure implique que, à la suite d'un premier essai non concluant, les élèves marquent un temps d'arrêt, une prise de distance qui leur permet de choisir une autre procédure pour comparer les fractions à l'étude, prenant ainsi conscience des limites de la première procédure mobilisée. Ce changement de procédure requiert un retour au problème, un regard sur les fractions à comparer. Ces élèves exercent alors un contrôle qui se traduit par un engagement réfléchi en cours de résolution et mobilisent leur capacité à voir différentes procédures pour résoudre ce problème de comparaison de fractions. Pour certains élèves, ce changement de procédure amène à un choix judicieux de procédure qui leur permet de mener la comparaison des cinq fractions.

Dans la sous-section suivante, nous présentons des élèves qui exercent également un choix éclairé d'une procédure de résolution dans le sens de Schoenfeld (1985). Ces procédures sont efficaces en temps de résolution et limitent les risques de calcul. De plus, elles présentent une autre caractéristique, celle de transformer le problème initial en un problème moins complexe avant de le résoudre. Ceci est nouveau dans la conceptualisation du contrôle sous la composante choix éclairé.

3.2 Un choix éclairé de procédure qui amène à transformer le problème initial en un problème plus simple

Certains élèves marquent un arrêt devant les fractions à comparer et procèdent à une réflexion quant à la procédure à appliquer, et ce, avant toute résolution (tableau 2). Ils font preuve d'un engagement réfléchi en analysant les fractions à l'étude. Cette réflexion mène à un choix éclairé parmi diverses procédures de comparaison. Tel que l'explique Schoenfeld (1985), les élèves lient ainsi les caractéristiques des fractions du problème des Olympiques à une procédure privilégiée par son temps d'exécution. De plus, elle limite les risques d'erreurs de calculs ou de gestion de représentations visuelles.

1 ^{re} place (Or)	2 ^e place (Argent)	3 ^e place (Bronze)	4 ^e place	5 ^e place
Yvan	Luc	Julien	Alex	Paolo

Note : Étant donné la grande responsabilité de cette tâche, tu dois expliquer aux juges comment tu as fait. Laisse des traces ta démarche.

Y Luc J - Paolo Alex
 $\frac{6}{7}$ $\frac{3}{5}$ + $\frac{6}{12}$ - $\frac{2}{7}$ $\frac{3}{8}$

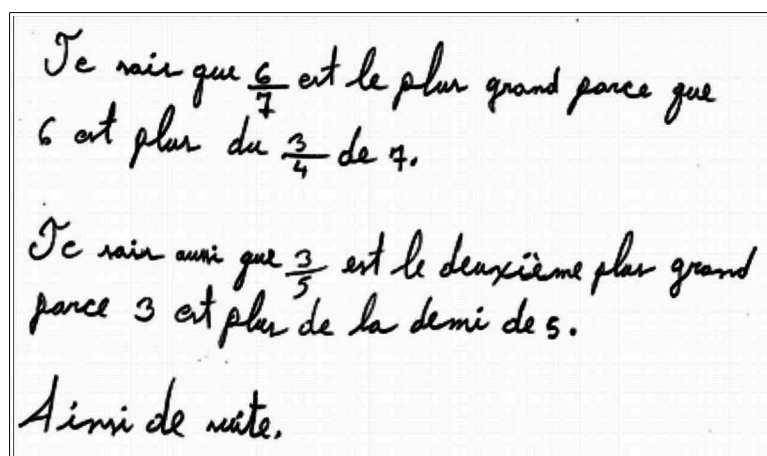
$7 \times 5 = 35$
 $6 \times 5 = 30$
 $5 \times 7 = 35$
 $3 \times 7 = 21$
 $2 \sqrt{30}$

$7 \times 8 = 56$
 $2 \times 8 = 16$
 $8 \times 7 = 56$
 $3 \times 7 = 21$
 $1 \sqrt{21}$

Exemple 4

$$\begin{array}{cccccc}
 \times 2 \frac{6}{10} & \times 3 \frac{6}{21} & \times 4 \frac{6}{12} & \times 6 \frac{6}{16} & \times 1 \frac{6}{7} \\
 \frac{3}{5} & \frac{2}{7} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{6}{7}
 \end{array}$$

Exemple 5



Je sais que $\frac{6}{7}$ est le plus grand parce que 6 est plus du $\frac{3}{4}$ de 7.

Je sais aussi que $\frac{3}{5}$ est le deuxième plus grand parce 3 est plus de la demi de 5.

Ainsi de suite.

Exemple 6

Tableau 2. Des exemples d'engagement réfléchi et de choix éclairé au sens de Schoenfeld (1985).

Dans l'exemple 4, l'élève utilise la procédure 4 que nous avons décrite dans la section précédente. Il compare d'abord les fractions à la fraction repère $\frac{1}{2}$. Cette procédure lui permet d'obtenir deux fractions inférieures à $\frac{1}{2}$ et deux autres fractions situées entre $\frac{1}{2}$ et 1. Il utilise alors la procédure du dénominateur commun pour ces deux paires de fractions, se ramenant ainsi à une comparaison entre deux fractions. L'élève a ainsi transformé son problème en un problème moins complexe en limitant substantiellement les risques d'erreurs de calcul.

L'exemple 5 présente une procédure tout à fait originale. L'élève se ramène à un numérateur pour comparer soit à un même nombre de parties parcourues. Il repère une particularité parmi les numérateurs des fractions à l'étude, 6 est le multiple des numérateurs 1, 2, 3 et 6. Cette procédure permet de faire peu de calculs et des calculs *simples* (des multiplications par 2, 3 et 6), limitant ainsi les risques d'erreurs. Seulement 2 élèves procèdent ainsi. La comparaison de fractions ayant un même numérateur est présente dans les manuels scolaires. Ces derniers présentent des fractions sur un même numérateur et demandent ensuite de les comparer. L'engagement de l'élève est ici différent puisque c'est lui qui choisit de transformer les fractions données en des fractions ayant le même numérateur, se ramenant ainsi à un problème plus simple. Nous n'avons pas anticipé cette procédure.

Un *contrôle sémantique* est à la base du raisonnement de l'élève illustré dans l'exemple 6 que nous pouvons considérer comme un raisonnement qualitatif au même titre que celui utilisé dans la troisième procédure (voir section précédente). Il met en jeu le sens de la fraction sans faire appel à une représentation visuelle. L'élève compare les fractions en utilisant une comparaison qualitative du numérateur de chaque fraction par rapport au dénominateur. Il évalue si le numérateur est plus grand ou plus petit que la demi ou les trois quarts du dénominateur. Il compare ainsi convenablement les fractions mais n'explique pas comment il procède pour les fractions $\frac{3}{8}$ et $\frac{2}{7}$. Cette procédure de comparaison requiert un regard sur les fractions pour en déduire un ordre

de grandeur lié au nombre et à la taille des morceaux. La procédure n'est pas basée sur des calculs et est efficace en temps d'exécution puisqu'elle est bien maîtrisée. Cet élève exerce ainsi un engagement réfléchi dans le problème, un choix éclairé d'une procédure efficace en temps de résolution et limitant les risques de calcul. Toutefois, cet élève ne transforme pas le problème initial en un problème plus simple comme c'est le cas dans les exemples 4 et 5. Nous avons répertorié cinq autres élèves qui utilisent un raisonnement qualitatif, certains d'entre eux s'appuient sur une droite numérique. Ils n'arrivent toutefois pas tous à comparer les cinq fractions, ce qui montre la complexité de ce type de raisonnement qui s'appuie sur le sens de la fraction.

L'*engagement réfléchi et le choix éclairé* dans ce problème reposent, entre autres, sur une lecture attentive des fractions. Dans cette dernière sous-section sont présentées des actions *contrôlées* que nous n'avions pas prévues et qui enrichissent la conceptualisation du contrôle sous la composante *engagement réfléchi*.

3.3 Un engagement réfléchi à l'intérieur même d'une procédure de comparaison

Certains élèves (voir tableau 3) exercent un engagement réfléchi qui se manifeste pendant qu'ils sont engagés dans une procédure de résolution. C'est dans leur manière de mettre en action cette procédure qu'un contrôle s'exerce.

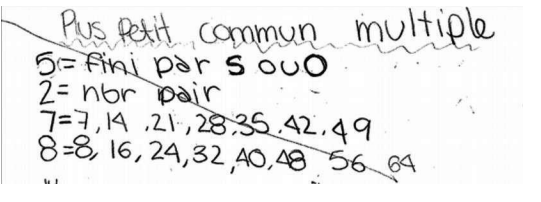
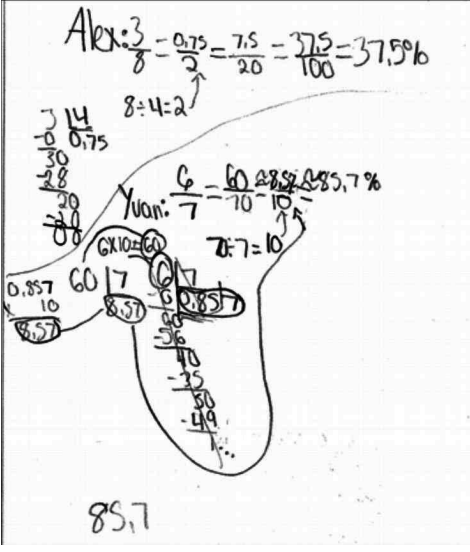
Exemple 7	 <p>Plus petit commun multiple 5 = fini par 5 ou 0 2 = nbr pair 7 = 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49 8 = 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64</p>
Exemple 8	 <p>Alex: $\frac{3}{8} = \frac{0.75}{2} = \frac{7.5}{20} = \frac{37.5}{100} = 37.5\%$ $8 \div 4 = 2$ Yuon: $\frac{6}{7} = \frac{60}{70} = \frac{85.7}{100} = 85.7\%$ $7 \div 7 = 10$ 0.857 10 85.7 85.7</p>

Tableau 3. Deux exemples d'engagement réfléchi qui s'exerce à l'intérieur d'une procédure de résolution et qui repose sur des propriétés sur les nombres.

Dans l'exemple 7 (tableau 3, un exemple de procédure 1), l'élève s'appuie sur les critères de divisibilité de 2 et de 5 pour constituer la liste des multiples. Sachant que tous les nombres pairs sont des multiples de 2 et que les nombres finissant par 0 et 5 sont des multiples de 5, l'élève n'a plus besoin d'écrire les différents multiples pour ces deux nombres. Pour trouver un dénominateur commun pour les nombres 2, 5, 7 et 8, il suffit de trouver un multiple commun de 7 et 8 qui sera pair et dont le chiffre des unités est soit 0 soit 5. L'élève se ramène ainsi à une tâche moins complexe. Il mobilise un contrôle à l'intérieur d'une procédure de résolution, un engagement réfléchi qui s'appuie sur les propriétés des nombres et dans ce cas-ci sur les critères de divisibilité.

Dans l'exemple 8, l'élève procède au passage des fractions en pourcentages (procédure 5), il procède pour cela d'une façon tout à fait originale. L'objectif de l'élève est d'obtenir des fractions intermédiaires équivalentes avec un dénominateur qui soit un diviseur de 100 et avec lequel il peut travailler moyennant des rapports entiers. Cette manière de faire lui permet un travail sur les fractions loin de l'algorithme de division. Il passe donc de la fraction de départ à une fraction sur 100, par des fractions intermédiaires. Par exemple, pour transformer $\frac{3}{8}$ en pourcentage, l'élève remarque qu'il est aisé de se ramener à une fraction dont le dénominateur est 2. Pourquoi 2 ? Parce que 2 est un diviseur de 100. Il trouve alors la fraction équivalente à $\frac{3}{8}$ dont le

dénominateur est 2 (il fait $3 \div 4$). Il pourrait ici directement multiplier par 50 pour trouver la fraction équivalente sur 100 mais l'élève le fait en deux étapes, il trouve d'abord la fraction intermédiaire équivalente sur 20 puis sur 100. Avec le dénominateur 7 de la fraction $\frac{6}{7}$, une façon d'obtenir un diviseur de 100 est de se ramener au dénominateur

10. Comment faire ? Il suffit de multiplier 7 par 10, ce qui donne 70 et en divisant par 7 on obtient 10 qui est un diviseur de 100 et le tour est joué ! La recherche de fractions équivalentes amène l'élève à effectuer des multiplications et des divisions avec les numérateurs pour lesquelles il manifeste un contrôle sur les calculs. Un engagement réfléchi se met en place ici autour d'un regard sur le dénominateur qui détermine les transformations qui vont permettre d'obtenir un diviseur de 100 et qui reposent, comme dans l'exemple précédent, sur l'application de propriétés liées à la divisibilité.

4. Discussion

4.1 Un retour sur l'activité de contrôle manifestée par les élèves dans le problème les Olympiques

L'activité de *contrôle* a été essentiellement étudiée dans le domaine de l'algèbre. L'analyse du problème des Olympiques permet d'ouvrir vers une conceptualisation du contrôle en arithmétique autour de quatre de ses composantes, l'engagement réfléchi, le choix éclairé de procédures, le contrôle sémantique et le contrôle sur les calculs. Comme le précise Kargiotakis (1996), l'engagement réfléchi qui se traduit par une prise de distance par rapport à l'action peut se manifester avant ou en cours de résolution. Ainsi, avant toute résolution, les traces écrites des élèves permettent de relever que ceux-ci prennent un temps d'arrêt devant les fractions à comparer (voir exemple 3). Ces élèves passent en revue les procédures de comparaison, les évaluent *a priori*, en

éliminent certaines et se tournent vers une procédure qui leur permet de comparer les cinq fractions. Nous avons accès à cette activité qui est le plus souvent mentale par des traces d'élèves qui écrivent le nom de la procédure qu'ils ont considérée avant de la barrer. L'activité de *contrôle* se manifeste ainsi par un changement de procédure suite à une évaluation de l'action.

De plus, un engagement réfléchi peut se manifester après un blocage (voir exemples 1 et 2). Dans le problème des Olympiques, la majorité des élèves se tournent, après avoir reconnu la tâche de comparaison de fractions vers des procédures qui reposent sur la recherche d'un dénominateur commun ce qui les amène pour la plupart à une impasse. Un engagement réfléchi se met en place alors chez plusieurs de ces élèves qui retournent au problème et plus particulièrement aux fractions données. Ainsi, un changement de procédure n'est pas un phénomène anodin. Il met en jeu une activité intellectuelle de manipulation d'information revisitée. En procédant ainsi, ces élèves montrent qu'ils puisent dans un bagage de procédures pour la comparaison de fractions. Certains élèves essaient jusqu'à trois procédures de comparaison (voir exemple 2).

Nous avons également relevé, et ceci est nouveau, un engagement réfléchi qui se manifeste à l'intérieur d'une procédure de résolution. Ces élèves exercent un regard réflexif sur la procédure. C'est le cas de l'élève qui, conscient des critères de divisibilité, utilise ces propriétés et n'écrit pas certains multiples puisqu'il garde en tête les caractéristiques du multiple à trouver (voir exemple 7). C'est le cas également de l'élève (voir exemple 8) qui est mû par la volonté de passer par des fractions intermédiaires dont le dénominateur est un diviseur de 100. Cet *engagement réfléchi* repose sur les propriétés des nombres que les élèves non seulement connaissent mais *utilisent à bon escient*, de leur propre chef.

Certaines procédures de comparaison reposent, nous l'avons vu, sur un *contrôle sur les calculs* (voir exemples 1 et 2). Un élève qui ne possède pas ce type de contrôle bloque lorsqu'il s'engage dans la recherche d'un dénominateur commun ou dans le passage vers des décimaux ou des pourcentages (voir exemple 11, annexe 2). À ce niveau scolaire, nous avons pu remarquer que les algorithmes de division sont encore fragiles chez plusieurs élèves. En ce qui a trait au *contrôle sémantique*, nous avons noté qu'il est de deux types. Soit il repose sur l'habileté de l'élève à représenter visuellement les fractions (considérer le même *Tout* de référence et partitionner en parties congrues, voir exemple 3) ce qui n'est pas, comme le montre l'analyse du problème des Olympiques, une tâche facile pour les élèves de ce niveau (voir exemple 9, annexe 1). Soit il repose sur un ordre de grandeur des fractions en combinant les informations sur le nombre et la taille des morceaux qui est un raisonnement complexe pour plusieurs élèves, exigeant une maîtrise sur ce que représentent les fractions (voir exemple 6). Plusieurs chercheurs (Hasemann 1986 ; Krikorian 1996 ; Van de Walle et Lovin 2008) soulignent des difficultés des élèves qui sont d'ordre *sémantique* dans des tâches de comparaison de fractions. Ils précisent qu'au début de l'apprentissage, la comparaison devrait reposer avant tout sur le sens du nombre et non sur la capacité à appliquer un algorithme. Ils mettent ainsi de l'avant l'importance de développer chez les élèves un *contrôle sémantique* quand les élèves en sont à leurs premières armes avec les fractions.

Que nous apprend l'analyse du problème des Olympiques sur le *choix éclairé* d'une procédure de résolution? Nous pouvons remarquer une différence entre les diverses

procédures mobilisées par les élèves. Certaines procédures vont « toujours marcher » quelles que soient les fractions à l'étude comme c'est le cas de la recherche d'un dénominateur commun, du passage vers les pourcentages ou les décimaux et/ou l'utilisation de représentations dessinées. Elles requièrent toutefois un *contrôle sur les calculs* et/ou un *contrôle sémantique*. D'autres procédures ont été répertoriées qui prennent en considération les caractéristiques des fractions à l'étude (voir exemples 4 et 5). Il y a ainsi un lien entre les fractions à comparer et la procédure choisie. Nous rejoignons ici les propos de Schoenfeld (1985). Ces procédures sont efficaces, elles limitent les risques d'erreurs de calcul et sont rapides en temps d'exécution. De plus, dans le problème des Olympiques, ces procédures ont la caractéristique de transformer le problème initial en un problème plus simple.

La figure 2 schématise l'action *contrôlée* telle que rapportée dans les 8 exemples illustrés dans la section 4. Elle met en évidence l'aspect dynamique d'une activité de contrôle. Toutefois, ce schéma n'est pas représentatif des 271 copies analysées.

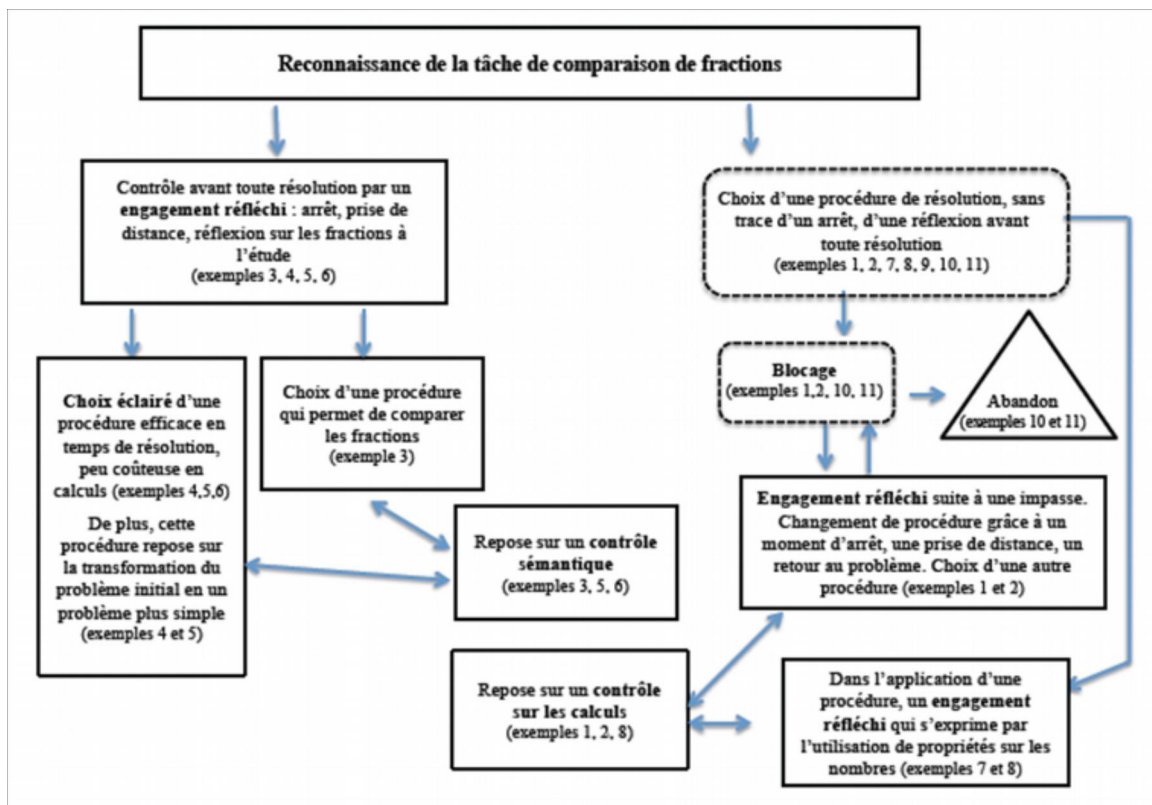


Figure 2. Schéma synthèse des diverses manifestations de contrôle illustrées dans les copies sélectionnées dans la section 4 autour du problème les Olympiques

L'analyse des copies d'élèves en termes de contrôle nous a permis de relever un engagement réfléchi qui prend place à deux moments différents, soit après une impasse soit lors de l'exécution d'une procédure de résolution. D'autres liens ressortent comme des élèves qui choisissent une procédure au tout début et qui manifestent soit un contrôle sur les calculs soit un contrôle sémantique. D'ailleurs, ces derniers semblent venir appuyer l'opérationnalisation de certaines procédures. Dans la figure 2, les

doubles flèches montrent l'aspect imbriqué des composantes du contrôle à l'étude. Ainsi le choix éclairé ou l'engagement réfléchi reposent sur un contrôle sur les calculs et/ou sémantique. L'expression de l'un s'appuie à certaines reprises sur l'expression de l'autre.

Force est de constater que le problème des Olympiques est un problème qui favorise l'émergence d'une activité contrôlée chez les élèves sous l'angle d'un engagement réfléchi, d'un choix éclairé, d'un contrôle sur les calculs et d'un contrôle sémantique. Ainsi, le choix d'un problème ou d'un exercice mathématique n'est pas anodin quand nous poursuivons l'intention de développer une action contrôlée chez les élèves. Vers quelles autres pistes pour l'enseignement les résultats du problème des Olympiques ouvrent-ils?

4.2 Des pistes pour l'enseignement : développer une action contrôlée chez les élèves grâce à une phase de bilan

Comme nous l'avons précisé, une analyse des productions d'élèves sous l'angle de l'action contrôlée qu'ils exercent requiert un regard nouveau sur le travail des élèves. L'attention n'est pas accaparée par la réussite ou l'échec de la résolution mais plutôt motivée par la découverte d'indicateurs d'une pensée réflexive chez les élèves lorsqu'ils manipulent les fractions.

Nombreux sont les élèves qui bloquent après avoir choisi une procédure pour comparer les fractions et qui abandonnent la résolution. Plusieurs hypothèses peuvent expliquer cet abandon. Soit les élèves n'ont été confrontés dans leur scolarité qu'à la recherche d'un dénominateur commun pour comparer des fractions ou qu'à la mémorisation de techniques à mettre spécifiquement en jeu parce qu'elles sont identifiées comme la façon de faire pour une notion mathématique (Oliveira 2008). Cela vient restreindre, à notre avis, les chances chez les élèves de s'engager de manière réfléchie dans la résolution. Soit ils sont dans la situation décrite par De Corte et Verschaffel (2008) : « il peut arriver que des étudiants possèdent des connaissances et des habiletés, mais qu'ils ne peuvent y accéder ou les mobiliser alors que c'est requis pour résoudre un problème donné » (p.28).

Alors comment développer chez les élèves une action contrôlée permettant de prendre une distance, un recul, de retourner au problème, de porter un regard réflexif sur les nombres, sur le problème ou l'activité mathématique afin de mobiliser les habiletés et les connaissances requises pour la comparaison de fractions?

D'abord, il nous semble essentiel d'accorder une place en classe à une panoplie de procédures de comparaison, élaborées par les élèves, qui permettent de multiplier les angles d'entrée pour comparer les fractions, comme le montrent plusieurs des exemples rapportés dans ce texte. Les procédures que nous pouvons considérer comme marginales parce qu'utilisées par peu d'élèves sont particulièrement intéressantes du point de vue du contrôle. Nous pensons ici à la comparaison qui s'appuie i) sur un raisonnement qualitatif, ii) sur une combinaison de procédures et iii) sur un même numérateur. Par ailleurs, imaginez la portée sur le développement d'une action contrôlée lorsqu'un élève explicite à la classe ses façons de faire. Ce faisant, il illustre, il exemplifie aux autres élèves sa manière de s'engager de manière réfléchie par une lecture attentive des fractions ouvrant à plusieurs possibilités ou à un choix éclairé, à un contrôle sémantique

ou sur les calculs. Nous créons ainsi les conditions propices à un travail de découverte en mathématiques que l'élève partage à ses pairs, les uns apprenant ainsi des autres.

C'est notamment à ce moment, lorsque les procédures mises en œuvre par les élèves sont portées à la classe toute entière, que le rôle de l'enseignant s'avère crucial. Les recherches de Margolinas (1989, 1991), Mary (1999) et Saboya (2010) apportent des éléments de réponse pour la pratique en classe. Ces chercheuses montrent l'importance du rôle de l'enseignant en lien avec le développement d'un contrôle chez les élèves. Quand celui-ci crée un espace pour mener avec les élèves une réflexion sur les procédures de résolution possibles, il ouvre une discussion en classe sur la validité des procédures. Dans un retour en grand groupe, l'enseignant, tel un médiateur, peut insister sur l'attention à porter aux procédures non habituelles et aux choix faits par divers élèves. Ce qui permet aux élèves de décider par eux-mêmes de la validité de leur procédure et d'ouvrir vers une argumentation auprès de leurs camarades. L'élève est amené à justifier son travail, à vérifier sa démarche et le résultat obtenu; nous sommes alors dans une phase de bilan (au sens défini dans Margolinas 1991, p. 136) :

Un des rôles de la phase de bilan est de permettre la formulation publique des méthodes de résolution par les élèves qui sont envoyés au tableau, où ces élèves doivent formuler leurs stratégies.

La phase de bilan, rendant publiques les diverses procédures devant la classe, est intéressante du point de vue du rôle de l'enseignant qui peut alors reformuler, renvoyer des questions au reste de la classe pour que les élèves statuent sur les avantages, les limites, l'efficacité des diverses procédures ressorties. Cette façon de procéder a fait ses preuves comme le montre Saboya (2010) dans une intervention menée auprès d'élèves de 15-16 ans autour d'un travail sur les puissances de nombres. À notre avis, c'est quand l'élève est responsable de ses actions qu'une activité de contrôle risque de se développer.

Conclusion

Comme nous l'avons vu au début de ce texte, l'activité de contrôle est souvent reliée à la vérification et à la validation en algèbre et à la vérification dans les problèmes arithmétiques. D'autres composantes du contrôle comme l'*engagement réfléchi*, le *choix éclairé de procédures* et les *contrôles sémantique et syntaxique* prennent appui essentiellement dans des tâches algébriques. Nous avons cherché à travers l'analyse du problème des Olympiques à élargir cette conceptualisation qui a été discutée dans la section 4.1. Les résultats obtenus permettent de mettre en lumière une caractéristique importante, le *côté dynamique* du contrôle. En rejoignant les observations de Saboya, Bednarz et Hitt (2015) autour de la résolution de problèmes en algèbre, nous avons ainsi observé, à travers des copies d'élèves, des aller-retour entre les composantes, celles-ci ne sont pas isolées mais interagissent les unes avec les autres au fur et à mesure que l'élève avance dans sa résolution (voir figure 2).

Par ailleurs, notre travail se base sur une interprétation des productions écrites des élèves. Au moment de la passation du questionnaire, nous avons demandé aux élèves de ne pas effacer mais de barrer la démarche qu'ils ne considéraient plus comme valable, de préciser ce qu'ils avaient fait, comment ils avaient procédé, d'expliciter la raison de leur blocage ou leur possible malaise face à une tâche, ... Malgré toutes ces précautions,

nous n'avons pas directement accès aux processus de pensée de l'élève derrière à la mise en œuvre des procédures. Puisque le contrôle s'effectue principalement en pensée, il aurait été intéressant de mener des entrevues individuelles avec certains élèves pour mieux comprendre leur action contrôlée. S'appuient-ils sur certaines propriétés mathématiques lors de leur résolution comme nous l'avons supposé (voir exemple 8)? Les traces écrites que nous avons reliées à une évaluation par anticipation d'une procédure reflètent-elles bien le processus de pensée de l'élève (exemple 3) ?

Amener l'élève à être en mesure d'exercer une action contrôlée figurait parmi les objectifs de cette recherche collaborative. Le questionnaire sur les fractions dont fait partie le problème des Olympiques a servi de levier auprès des enseignants au moment des rencontres réflexives. Curieusement, les différentes manifestations de contrôle dans le problème de comparaison de fractions n'ont pas soulevé les débats et prises de conscience espérés. Les résultats présentés les ont amenés à soutenir leur position quant à l'enseignement et à l'apprentissage de la comparaison de fractions, à savoir l'utilisation des procédures du dénominateur commun et le passage vers des pourcentages et/ou des décimaux. Ils ont plutôt délaissé les traces qui nous semblent illustrer des enjeux clés liés à l'apprentissage de la fraction et qui suggèrent une action contrôlée exercée par les élèves, celles reposant sur un raisonnement qualitatif, celles où l'élève transforme le problème donné en un problème plus simple et celles reposant sur une représentation dessinée. Leur position prend appui sur l'un des objectifs (implicite) dans les premières années du secondaire, rendre les élèves (le plus) *efficaces* (possible) lors de la comparaison de fractions, ce qui se traduit par l'utilisation de procédures s'appuyant sur un contrôle sur les calculs. Les fractions devenant, les années subséquentes, un outil et non plus un objet d'apprentissage, il faut apprendre aux élèves « à tourner la manivelle ».

Références

- BARRY, S. et SABOYA, M. (2015). Un éclairage sur l'étape de co-situation de la recherche collaborative à travers une analyse comparative de deux études en didactique des mathématiques. *Revue Recherches qualitatives*, **34 (1)**, 49–73. La recherche qualitative aujourd'hui : réflexions et pratiques. Disponible au lien : http://www.recherche-qualitative.qc.ca/revue/edition_reguliere/numeros_parus.html
- BEDNARZ, N., SABOYA, M. (2007). Questions didactiques soulevées par l'enseignement de l'algèbre auprès d'une élève en difficulté au secondaire. Dans J. Giroux, D. Gauthier (dirs.), *Difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. Hommage à Gisèle Lemoyne* (pp. 139-166). Montréal : Éditions Bande Didactique.
- BEDNARZ, N. (2013). *Recherche collaborative et pratique enseignante : regarder ensemble autrement*. Paris : Éditions l'Harmattan.
- BEHR, M.J., LESH, R., POST, T.R., SILVER, E.A. (1983). Rational-Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press., pp. 92-144
- BLOUIN, P., LEMOYNE, G. (2002). L'enseignement des nombres rationnels à des élèves en difficulté d'apprentissage : une approche didactique de la rééducation et ses effets. *Petit x*, **58**, 7-23. IREM de Grenoble.

- BROUSSEAU, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **2/1**, 39–127.
- BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques*, **7/2**, 33–115.
- CHARALAMBOUS, C. et PITTA-PANTAZI, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students' understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, **64**, 293–316.
- CHEVALLARD, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège (2^e partie). *Petit x*, **19**, 43–72. IREM de Grenoble.
- CIPRA, B. (1985). *Erreurs... et comment les trouver avant le prof...* ». Ed. InterEditions, Paris.
- COPPÉ, S. (1993) *Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé*. Thèse de doctorat inédite. Université de Lyon.
- CORTÉS, A. et KAVAFIAN, N. (1998-1999). Les principes qui guident la pensée dans la résolution des équations. *Petit x*, **51**, 47–73. IREM de Grenoble.
- DE CORTE, E., et VERSCHAFFEL, L. (2008). Apprendre et enseigner les mathématiques : un cadre conceptuel pour concevoir des environnements d'enseignement-apprentissage stimulants. Dans M. Crahay, L. Verschaffel, E. De Corte & J. Grégoire (Eds.), *Enseignement et apprentissage des mathématiques. Que disent les recherches psychopédagogiques?* Bruxelles : De Boeck.
- DELORME, J. (1985). *Étude de la compréhension de problèmes additifs chez des enfants de difficulté en mathématiques*. Mémoire de DEA, Université de Paris VIII.
- DIB, M. (2000-01). Validation dans l'environnement papier crayon. *Grand N*, **68**, 41–60. IREM de Grenoble.
- DESGAGNÉ, S. (1998). La position du chercheur en recherche collaborative : illustration d'une démarche de médiation entre culture universitaire et culture scolaire. *Recherches qualitatives*, **18**, 77–105.
- DESGAGNÉ, S. (2001). La recherche collaborative : nouvelle dynamique de recherche. Dans M. Anadon et M. L'Hostie (Dir.), *Nouvelles dynamiques de recherche en éducation*, (p.51-76). Les Presses de l'Université Laval, Québec, Canada.
- DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* **5**, 37–65.
- HADAMARD, J. (1945/1975). *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*. Paris : Gauthier-Villars.
- HASEMANN, K. (1986). Analyse of fraction errors by model of cognitive science. *European Journal of Psychology of Education*, **1**, 57–66.
- KARGIOTAKIS, G. (1996). *Contribution à l'étude de processus de contrôle en environnement informatique : le cas des associations droites-équations*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques inédite. Université Paris VII–Denis Diderot.
- KIEREN, T. E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. In Hiebert, J., Behr, M. (eds). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum Ass. 162–181.

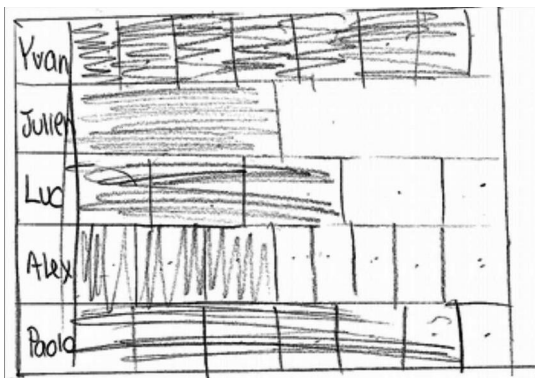
- KOUKI, R. (2007). L'articulation syntaxes/sémantique au Coeur des analyses didactiques au niveau de l'algèbre élémentaire? *Actes du colloque international EMF 2006*. Sherbrooke. Québec.
- KRIKORIAN, N. (1996). *Compétences d'élèves de fin primaire concernant des aspects des fractions considérés essentiels et sur lesquels l'enseignement de secondaire 1 devrait construire son enseignement des nombres rationnels*. Mémoire de maîtrise inédit. Université du Québec à Montréal. Québec, Canada.
- KRUTETSKII, V.A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children* (Translated from Russian by J. Teller, edited by J. Kilpatrick and I. Wirszup). Chicago and London: The University of Chicago Press.
- LEE, L. et WHEELER, D. (1989). The arithmetic connection. *Educational Studies in Mathematic*, **20**, 41-54.
- MARGOLINAS, C. (1989). *Le point de vue de la validation : essai de synthèse et d'analyse en didactique des mathématiques*. Thèse de doctorat inédite. Université Joseph Fourier, Grenoble 1.
- MARGOLINAS, C. (1991). Interrelations between different levels of didactic analysis about elementary algebra. In F. Furinghetti (Ed.). *Proceedings of the 15th International Conference for the Psychology of Mathematics Education (vol. II, 381-388)*. Assisi, Italy : PME Program Committee.
- MARY, C. (1999). *Place et fonctions de la validation chez les futurs enseignants des mathématiques au secondaire*. Thèse de doctorat en éducation inédite. Université de Montréal.
- MELS (2001). Ministère de l'éducation, du Loisir et du Sport, Gouvernement du Québec. *Programme de formation de l'école québécoise : Enseignement primaire*. Québec : Ministère de l'Éducation.
- <http://www1.mels.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/primaire/>
- MELS (2013). Ministère de l'éducation, du Loisir et du Sport. Document : progression des apprentissages. Québec.
- <http://www1.mels.gouv.qc.ca/progressionPrimaire/mathematique/>
- MERCIER, P. et DEBLOIS, L. (2004). Passage primaire-secondaire dans l'enseignement et l'apprentissage des fractions. *Revue Envol*, 127, 17-24. Québec, Canada.
- OLIVEIRA, I (2008). *Exploration de pratiques d'enseignement de la proportionnalité au secondaire en lien avec l'activité mathématique induite chez les élèves dans des problèmes de proportion*. Thèse de doctorat en éducation. Université du Québec à Montréal.
- PERKINS, D.N., et SIMMONS, R. (1988). Patterns of Misunderstanding : An Integrative Model for Science, Math, and Programming. *Review of Educational Research*. **58 (3)**, 303-326.
- PIAGET, J. (1974). Recherches sur la contradiction. Avec la collaboration de A. Blanchet, G. Cellierier, C. Dami. M. Gainotti-Amann, Ch. Giliéron, A. Henriques-Christophides, M. Labarthe, J. De Lannoy, R. Maier, D. Maurice, J. Montangero, O. Mosimann, C. Othenin-Girard, D. Uzan, Th. Vergopoulo. *Les différentes formes de la contradiction*. **Volume 2**. Presses Universitaires de France. Paris.
- POLYA, G. (1945/1965). *Comment poser et résoudre un problème*. Éditions Jacques Gabay.

- RICHARD, J. F. (1998). *Les activités mentales : Comprendre, raisonner, trouver des solutions*. Université de Paris VII.
- ROSAR, D., VAN NIEUWENHOVEN, C., JONNAERT, Ph. (2001). Les fractions, comment mieux comprendre les difficultés rencontrées par les élèves? *Instantanés mathématiques*, **37 (2)**, 4-17.
- SABOYA, M. (2010). *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant, visant le développement d'un contrôle sur l'activité mathématique chez les élèves du secondaire*. Thèse de doctorat en éducation. Université du Québec à Montréal.
- SABOYA, M., BEDNARZ, N. et HITT, F. (2015). Le contrôle exercé en algèbre : conceptualisation et analyses en résolution de problèmes. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **volume 20**, 61-100.
- ROUCHE, N. (1998). *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* Paris : Ellipses.
- SCHMIDT, S. (1994). *Passage de l'arithmétique à l'algèbre et inversement de l'algèbre à l'arithmétique, chez les futurs enseignants dans un contexte de résolution de problèmes*. Thèse de doctorat en éducation. Université du Québec à Montréal.
- SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.
- VAN DE WALLE, J.A et LOVIN, L.H. (2008). *L'enseignement des mathématiques. L'élève au cœur de son apprentissage. Tome 3*. Éditions du Renouveau Pédagogique Inc.
- VIVIER, J. (1988). La tâche de l'élève et l'auto-contrôle. *Revue française de pédagogie*, **82**, 61-64.
- WEISS, L. et FLORIS, R. (2008). Une calculatrice pour simplifier des fractions : des techniques inattendues. *Petit x*, **77**, 49-75. IREM de Grenoble.

Annexe 1

Un exemple de procédure relié à l'utilisation d'une représentation dessinée

Dans l'exemple 9, l'élève considère un même *Tout* de référence pour les cinq fractions mais ne procède pas à un partitionnement en morceaux de la même taille. Les morceaux de la fraction $\frac{3}{8}$ deviennent moins gros au fur et à mesure que l'élève s'aperçoit qu'il ne reste plus beaucoup du *Tout* à subdiviser. Nous pouvons remarquer que cet élève représente pour Yvan $\frac{7}{8}$ au lieu de $\frac{6}{7}$ et illustre pour Paolo $\frac{6}{7}$ au lieu de $\frac{2}{7}$.

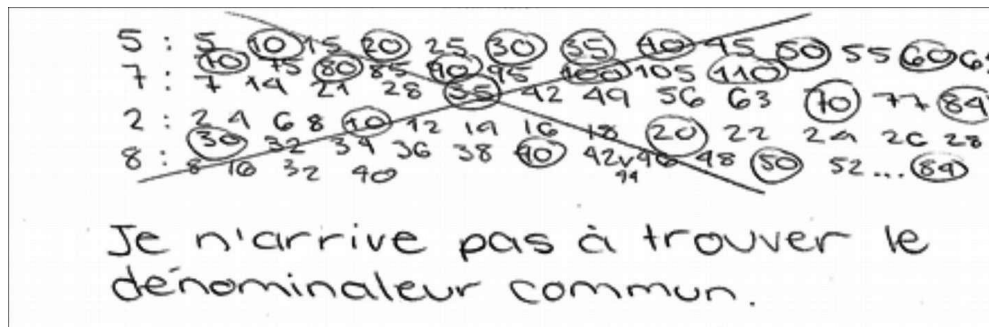


Exemple 9. Des difficultés sémantiques liées à l'habileté à partitionner également les morceaux.

Annexe 2

Des exemples de procédures pour la recherche d'un dénominateur commun

Dans l'exemple 10, l'élève recherche un dénominateur commun en passant par l'énumération des multiples de chacun des dénominateurs.



Exemple 10. Un exemple de procédure de recherche d'un dénominateur commun par l'énumération de multiples qui mène à une impasse (procédure 1).

Tous les élèves qui s'engagent dans cette voie bloquent et abandonnent cette procédure après quelques essais, le plus petit commun multiple étant, rappelons-le, 280. Plusieurs autres élèves sont également à la recherche d'un dénominateur commun qu'ils identifient par divers dénominateurs comme 14, 35, 55, 56, 10, ... qui sont des multiples de quelques-uns des dénominateurs donnés mais pas de tous les dénominateurs¹³. 34 des 149 élèves qui sont à la recherche d'un dénominateur commun font l'erreur additive en trouvant les fractions équivalentes. Par exemple, ils choisissent 8 comme dénominateur commun et trouvent le numérateur de chacune des fractions en ajoutant au numérateur la différence entre 8 et le dénominateur de la fraction $\frac{3}{5} = \frac{6}{8}$; $\frac{2}{7} = \frac{3}{8}$; $\frac{6}{7} = \frac{7}{8}$. Toutefois,

plusieurs élèves ne réservent pas le même traitement à la fraction $\frac{1}{2}$, celle-ci a comme

fraction équivalente $\frac{4}{8}$, cette fraction étant familière aux élèves. Un raisonnement

apparaît toutefois intéressant dans la recherche d'un dénominateur commun. Certains élèves comparent les fractions en trouvant des fractions équivalentes dont les dénominateurs sont très proches, 55 et 56 ($\frac{3}{5} = \frac{33}{55}$; $\frac{2}{7} = \frac{16}{56}$; $\frac{1}{2} = \frac{28}{56}$; $\frac{3}{8} = \frac{21}{56}$; $\frac{6}{7} = \frac{48}{56}$).

Dans l'exemple 11 (page suivante), l'élève opte pour le passage à des fractions équivalentes dont le dénominateur est 35 qui est un multiple des dénominateurs 5 et 7.

¹³ D'autres élèves soulignent qu'ils doivent trouver un dénominateur commun mais qu'ils ne savent comment procéder.

Luc	Paolo	Julien	Alex	Ivan
$\frac{3}{5} = \frac{21}{35}$	$\frac{2}{7} = \frac{10}{35}$	$\frac{1}{2} = \frac{17,5}{35}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{6}{7} = \frac{30}{35}$
			*	
		$1 \times 17,5 = 17,5$ $2 \times 17,5 = 35$		
$3 \times 7 = 21$ $5 \times 7 = 35$	$2 \times 5 = 10$ $7 \times 5 = 35$	$35 \overline{) 2}$ $2 \times 17,5$ $17,5$ $17,5$ $0,0$		$6 \times 5 = 30$ $7 \times 5 = 35$

Exemple 11. Un exemple de procédure de recherche d'un dénominateur commun (35) qui mène à une impasse (procédure 1)

Ce passage se fait ainsi facilement pour Luc, Paolo et Ivan, l'élève applique le facteur multiplicatif externe (voir les écritures en bas de la production). Pour trouver la fraction équivalente à $\frac{1}{2}$ dont le dénominateur est 35, l'élève procède à la division de 35 par 2 et obtient 17,5¹⁴. Face à la fraction $\frac{3}{8}$, l'élève s'arrête et écrit une étoile, signe, d'après

nous, de son incapacité à poursuivre. Nous pouvons supposer que l'élève a été bloqué par la division $35 \div 8$ qui requiert pour obtenir le quotient de poursuivre la division jusqu'aux millièmes. Division que l'élève ne s'aventure pas à effectuer.

¹⁴ Cette écriture ne correspond toutefois pas à la définition d'une fraction mais permet de comparer les fractions à l'étude.