TROIS APPRÉHENSIONS DU PARALLÉLISME : UN EXEMPLE DE SÉQUENCE POUR LE CYCLE 3

Carine REYDY
ESPE d'Aquitaine, université de Bordeaux, laboratoire Lab-E3D

Introduction

Dans les nouveaux programmes pour l'école primaire entrés en vigueur à la rentrée 2016 (MEN 2015), le cycle 3 ou « cycle de consolidation » fait le lien entre école et collège en réunissant au sein d'un même cycle les années de CM1, CM2 et 6e. L'enseignement de la géométrie y est perçu comme un terrain propice à cette transition car il permet d'aller progressivement d'une géométrie basée sur le recours aux instruments à des raisonnements déductifs et argumentatifs qui conduiront ultérieurement à des démonstrations. Entre autres, on y trouve également une incitation à faire appréhender de plusieurs façons un même objet ou une même propriété géométrique aux élèves.

L'objet de cet article est, dans un premier temps, d'apporter un éclairage sur ces préconisations dans le cas du parallélisme : pourquoi enseigner plusieurs procédés de tracés de deux droites parallèles ? Dans quel ordre les aborder ? Comment justifier leur apprentissage auprès des élèves ? Dans un second temps, je présente l'adaptation d'une séquence issue d'une ressource existante qui permet d'illustrer trois appréhensions de la notion de droites parallèles. Elle peut être proposée en CM1, en CM2 ou en 6e. La validité des procédés de tracé exhibés y est toujours justifiée par les propriétés géométriques connues des élèves sur lesquelles ils reposent. La séquence se termine par une séance de résolution de problème lors de laquelle on motive l'étude de plusieurs procédés de tracé par les contraintes inhérentes à la situation[1].

Une notion multiple

Préambule

On a retrouvé une vieille étagère (*cf.* figure 1) en pièces détachées que l'on souhaite assembler, mais on a égaré la notice de montage. Pour ce faire, on dispose de toutes sortes d'éléments de fixation : équerres, vis, chevilles, croisillons, *etc*. Comment faire en sorte que les deux montants soient parallèles ?

[1] Cette séquence a été expérimentée dans une classe de CM1 et dans une classe de CM2. L'analyse de ces expérimentations fera l'objet d'un travail ultérieur commun axé sur le langage. Ici, il s'agit de décrire la séquence et les raisons qui ont guidé les choix opérés pour sa conception afin de la rendre disponible.

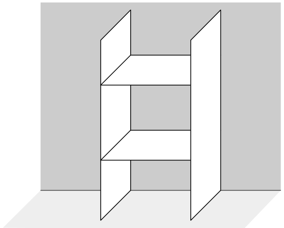


Figure 1 : L'étagère montée.

Une première solution consiste à commencer par fixer une étagère aux deux montants avec une équerre à chaque extrémité (*cf.* figure 2). Une deuxième est de fixer deux étagères à l'un des montants avec des équerres, puis de fixer l'autre montant avec des vis (*cf.* figure 3). On peut aussi fixer une étagère aux deux montants avec une équerre pour régler l'écartement et mettre un croisillon (dont les deux axes sont de même mesure ou se coupent en leurs milieux) pour assurer le parallélisme (*cf.* figure 4). On peut encore fixer les deux montants au mur avec un fil à plomb, et rajouter les étagères dans un second temps (*cf.* figure 5).

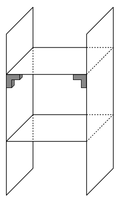
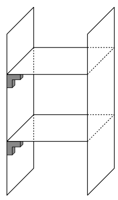
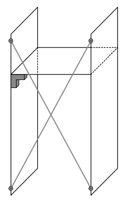
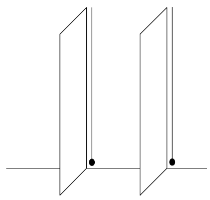
			

Figure 2	**Figure 3**	**Figure 4**	**Figure 5**

Plusieurs appréhensions de deux droites parallèles

En proposant plusieurs solutions au problème du montage de l'étagère, nous avons mobilisé différentes caractérisations de deux droites parallèles. En effet, on a tour à tour utilisé le fait que ce sont deux droites perpendiculaires à une même troisième (première solution), deux droites ayant un écartement constant (deuxième solution), deux droites portant les côtés opposés d'un quadrilatère ayant un angle droit et dont les diagonales ont même longueur et même milieu, c'est à dire un rectangle (troisième solution) et deux droites ayant la même direction (direction donnée par le fil à plomb dans la quatrième solution[2]). Au quotidien, le fait de disposer de ces différentes caractérisations nous permet de nous adapter au contexte dans lequel on évolue, aux instruments dont on dispose, au contrat qui nous est assigné en adoptant la solution idoine. Notons que deux droites parallèles peuvent encore être caractérisées de bien d'autres manières : ce sont aussi deux droites portées par deux côtés opposés d'un parallélogramme, deux droites dans un triangle, l'une portée par un côté et la deuxième passant par les milieux des deux autres côtés, deux droites ayant la même pente dans un réseau quadrillé, *etc*. Pour plus d'exemples, on renvoie à Reymonet (2004) qui propose une liste détaillée de définitions de deux droites parallèles permettant de faire émerger des techniques ou des outils graphiques de construction et de contrôle du parallélisme. Mathématiquement, la notion de parallélisme est donc multiple. Comme le notent de manière similaire Bulf, Mathé et Mithalal (2014) pour le cas du cercle :

> *Ces différentes appréhensions […] ont des domaines de validité distincts, et relèvent de pratiques sociales différentes. Un même individu peut mobiliser l'une ou l'autre de ces appréhensions, selon le contexte (et le contrat) dans lequel il se place — et notamment la communauté discursive[3] dans laquelle il s'inscrit —, le*

[2] En réalité, les directions des deux montants ne sont pas les mêmes (la Terre n'étant pas plate), mais on estime que la différence est négligeable à l'échelle de l'étagère.

[3] Une communauté discursive est une communauté qui a pour but, par les discussions et échanges entre ses

problème à résoudre, les instruments à disposition. (Bulf et al., 2014, p. 37).

C'est en amenant les élèves à raisonner en convoquant ces différentes idées qu'on les aide à construire ce concept qui leur servira dans la vie de tous les jours, pour certains métiers mais aussi en préparation à la géométrie déductive qui sera abordée au collège.

Le parallélisme dans les ressources pour l'enseignant

La géométrie de l'école au collège

Selon Charnay (1997, 1998), il y a essentiellement trois temps dans l'appréhension des objets géométriques par les élèves de l'école au collège. Le temps de la géométrie perceptive se déroule au cycle 1 et pendant une partie du cycle 2 : les objets géométriques sont alors reconnus à l'œil et ce critère tient lieu de vérité. À la fin du cycle 2 et au cycle 3 vient le temps de la géométrie instrumentée : pour identifier un objet géométrique ou une propriété, les élèves doivent avoir recours aux instruments. Enfin au collège, on passe au temps de la géométrie mathématisée : c'est par déduction que l'on détermine la nature d'un objet géométrique ou que l'on énonce une propriété. Certains élèves peuvent avoir du mal à comprendre cette modification des attentes, voire à l'accepter. En effet, ils sont conduits à résoudre des problèmes parfois identiques mais avec des procédés et des outils différents, problèmes qu'ils arrivaient préalablement à résoudre mais face auxquels ils sont en difficulté compte tenu du changement de contrat qui leur est imposé. Les instructions officielles mettent l'accent sur l'importance de cette évolution des moyens de preuve depuis de nombreuses années. En effet, dans les documents d'application des programmes de 2002 pour le cycle 3, on pouvait lire :

> *L'objectif principal est de permettre aux élèves […] de passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par un recours à des instruments et par la connaissance de certaines propriétés. (MEN, 2002, p. 30).*

Les programmes de 2008 précisaient quant à eux :

> *L'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure. (MEN, 2008, p. 23).*

L'arrivée de nouveaux programmes applicables à la rentrée 2016 est également marquée par une modification des cycles. Le nouveau cycle 3, cycle de consolidation qui comprend le CM1, le CM2 et la 6^{e}, fait désormais le lien entre l'école et le collège. Les préconisations qui figurent dans ces programmes reprennent aussi la typologie proposée par Charnay :

> *À l'articulation de l'école primaire et du collège, le cycle 3 constitue une étape importante dans l'approche des concepts géométriques. Prolongeant le travail amorcé au cycle 2, les activités permettent aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets (le carré, la droite, le cube, etc.) et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par le recours à des instruments, par l'explicitation de propriétés pour aller ensuite vers une géométrie dont la validation ne s'appuie que sur le raisonnement et l'argumentation. (MEN, 2015, p. 210).*

Cette entrée dans une géométrie logico-déductive sous-tend l'imbrication des séances dans la séquence qui est proposée ici : les différentes caractérisations de deux droites parallèles sont exhibées de telle sorte qu'elles peuvent être déduites de propriétés supposées connues des élèves.

Le parallélisme dans les programmes

Il y a dans les programmes de 2015 une incitation à faire appréhender de plusieurs façons un

membres, d'élaborer des connaissances. Dans l'approche discursive, l'apprentissage des mathématiques est vu comme une activité discursive et située qui implique la participation à une communauté de pratiques avec ses objectifs et intérêts particuliers, le développement de normes socio-mathématiques scolaires, et le recours à des ressources matérielles et langagières spécifiques.

même objet ou une même propriété géométrique aux élèves :

> *Différentes caractérisations d'un même objet ou d'une même notion s'enrichissant mutuellement permettent aux élèves de passer du regard ordinaire porté sur un dessin au regard géométrique porté sur une figure. (MEN, 2015, p. 210).*

Les projets de programmes produits par le Conseil Supérieur des Programmes accompagnaient cette recommandation d'exemples concrets parmi lesquels on trouvait :

> *les droites parallèles : d'abord décrites comme des droites non sécantes, comme des droites perpendiculaires à une même droite ou dont la distance d'un point de l'une à l'autre est toujours la même (quel que soit le point considéré). (CSP, 2015, annexe p. 5).*

Dans le descriptif de la compétence « Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques », il est précisé concernant le parallélisme : « construction de droites parallèles, lien avec la propriété reliant droites parallèles et perpendiculaires » (MEN, 2015, p. 212). Les instructions officielles vont donc dans le sens d'une approche multiple de la notion de parallélisme de deux droites et citent en particulier la caractérisation par double-perpendicularité.

Cette préconisation et celle décrite au paragraphe précédent (accompagner les élèves dans le passage d'une géométrie perceptive à une géométrie instrumentée puis déductive) révèlent une volonté affirmée de garantir une continuité dans les apprentissages, les notions géométriques abordées pouvant alors évoluer au fil du cycle, des cycles ou des degrés d'acquisition des élèves.

Le parallélisme dans les manuels

Au cycle 3, les activités proposées aux élèves concernant le parallélisme relèvent essentiellement de deux types de tâches :

- contrôler le parallélisme de deux droites,
- tracer deux droites parallèles, la distance entre ces deux droites étant donnée, ou tracer une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné.

À la question « Que sont deux droites parallèles ? », les élèves répondent la plupart du temps « Deux droites qui ne se coupent jamais ». C'est aussi la première définition qui est spontanément donnée aux élèves par une grande majorité d'enseignants (Reymonet, 2004, p. 35). Mais elle n'est pas toujours opératoire au regard des tâches proposées en cycle 3 : par exemple dans l'espace graphique, si elle permet de contrôler le non-parallélisme de deux droites sécantes dans l'espace visible (c'est à dire dans la feuille de papier), elle conduit immanquablement un bon nombre d'élèves à considérer que deux droites qui ne se coupent pas dans l'espace visible sont forcément parallèles. En outre, elle ne fournit pas de procédé pour tracer deux droites parallèles. Notons enfin qu'au quotidien, elle ne permet pas non plus d'assembler correctement les étagères évoquées dans le préambule.

Manuels de CM1 et de CM2

Dans les manuels de mathématiques pour l'école primaire, la notion de parallélisme est en général étudiée lors de l'année de CM1 et reprise au CM2. Deux droites parallèles sont définies comme étant deux droites « qui ne se coupent pas », mais pour les raisons évoquées ci-dessus, cette définition est toujours complétée par une ou plusieurs caractérisations qui fournissent des techniques de construction effectives. Deux d'entre-elles sont très répandues, elles seront nommées ici « procédure par écartement constant » et « procédure par double-perpendicularité » et sont décrites ci-après. On peut noter une continuité dans les attentes concernant la notion de parallélisme entre les manuels édités avant et après la mise en place des nouveaux programmes.

La **procédure par écartement constant** est trouvée de manière systématique dans les ressources pour le CM1 et le CM2 : deux droites sont parallèles si et seulement si l'écartement entre ces deux droites est constant. Cette caractérisation suppose que la notion de distance d'un point à une droite est connue (bien qu'elle soit très rarement travaillée dans les classes). Les élèves doivent aussi prendre conscience du fait qu'il est suffisant de vérifier que l'écartement entre les deux droites est le même en deux lieux distincts. Pour tracer deux droites parallèles distantes d'un écartement donné, on trace alors deux segments perpendiculaires à la première droite et dont la longueur est l'écartement voulu, puis on relie les autres extrémités des deux segments et on prolonge le tracé pour obtenir la deuxième droite. Voici un extrait du manuel *Opération maths CM1* (Peltier et *al.*, 2016) illustrant ce procédé :

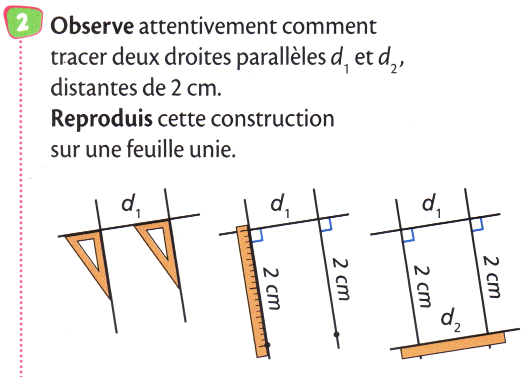


Figure 6

La procédure par double-perpendicularité est quant à elle fréquemment retrouvée dans les manuels de CM1 ou CM2 mais elle n'est pas omniprésente. Elle repose sur la proposition suivante : deux droites sont parallèles si et seulement si elles sont perpendiculaires à une même troisième. Pour vérifier le parallélisme de deux droites, on trace une perpendiculaire à la première et on vérifie qu'elle coupe l'autre perpendiculairement. Pour tracer deux droites parallèles distantes d'un écartement donné, on trace un segment perpendiculaire à la première, dont la longueur est l'écartement donné, puis on trace la perpendiculaire à ce segment passant par son autre extrémité. La figure 7 illustre ce procédé dans un autre extrait de *Opération maths CM1* (Peltier et *al.*, 2016).

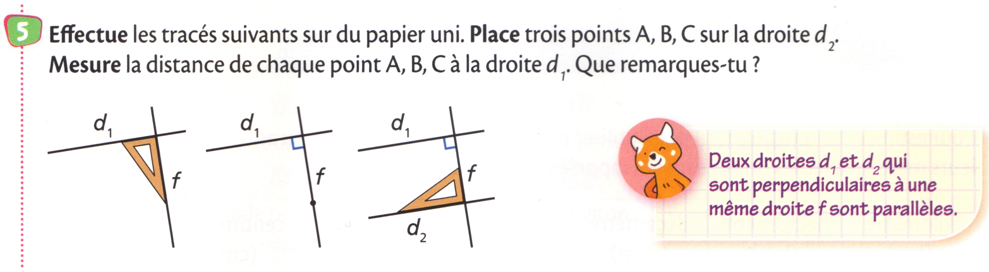


Figure 7

Manuels de 6e

Dans les manuels de mathématiques pour la classe de 6e précédant et respectant les programmes de 2015, le chapitre dans lequel est abordée la notion de parallélisme débute par la définition de droites sécantes, à la suite de quoi deux droites parallèles sont définies comme étant deux droites non sécantes. On retrouve donc la même caractérisation première qu'à l'école primaire (« Deux droites parallèles sont deux droites qui ne se coupent pas ») à ceci près qu'une nouvelle terminologie (« droites sécantes ») est introduite et mise en fonctionnement. Différentes propositions sont alors énoncées et admises, dont en particulier la propriété *« Si deux droites* *sont parallèles, alors toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre »* et la propriété *« Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors ces deux droites sont parallèles »*. De ces deux propriétés découle la procédure par double-perpendicularité pour vérifier le parallélisme de deux droites et pour construire une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné. La plupart du temps, la procédure par écartement constant est aussi proposée pour vérifier le parallélisme de deux droites, mais rarement pour construire une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné. Le parallélogramme est alors défini comme *« un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles »* et un procédé de construction de parallélogrammes reposant sur le procédé de tracé de droites parallèles préalablement étudié est exhibé et exercé.

Exceptionnellement, certaines ressources peuvent proposer une autre procédure de construction de droites parallèles, comme c'est le cas par exemple dans l'introduction du chapitre traitant du parallélisme de *Domino maths 6e* (Hache et *al.*, 2005) avec la fausse équerre du menuisier (voir figure 8). Cette procédure repose sur le fait que deux droites parallèles sont deux droites formant le même angle avec une troisième droite. C'est d'ailleurs elle qui est implicitement utilisée avec l'emploi du fil à plomb dans le préambule (quatrième solution, figure 5 : les deux montants ont la même direction, ils forment le même angle avec le sol). Cette procédure n'est pas exploitée dans la suite du chapitre, elle est simplement proposée comme exemple introductif.

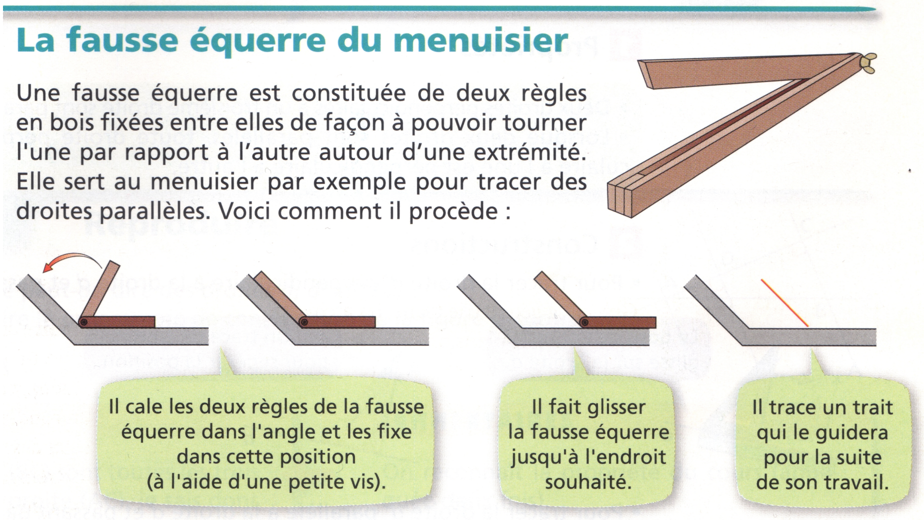


Figure 8 : extrait de *Domino maths 6e*, p. 139

Justification des procédés

Il est à noter qu'une justification de la validité de ces procédures n'est que très rarement entreprise auprès des élèves, que ce soit dans les manuels de CM1, de CM2 ou de 6e, ce qui peut occasionner chez eux des difficultés dans la compréhension du concept. Fénichel et *al.* notent en effet que :

> *la procédure reposant sur l'utilisation de la règle et de l'équerre [...] apparaît très complexe pour les élèves puisqu'elle repose sur une propriété rarement explicitée. [...] Des concepts sous jacents au parallélisme apparaissent donc comme non-explicités à l'école élémentaire, alors que les procédures attendues des élèves reposent sur certains d'entre eux. Ce problème est peut-être à l'origine de nombreuses difficultés rencontrées par les élèves à propos de la notion de parallélisme. (Fénichel et al., 2004, pp. 164-165).*

Une autre procédure

Voici, pour terminer ce paragraphe, une autre procédure permettant de vérifier le parallélisme de deux droites ou de tracer deux droites parallèles qui repose sur des propriétés des figures usuelles inscrites au curriculum du cycle 3 et qui n'est, à ma connaissance, pas présente dans les ressources en mathématiques pour le cycle 3. Elle est utilisée dans la séquence décrite ci-après et est nommée ici **procédure par les diagonales du parallélogramme**. Elle repose sur le fait que le parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles (ainsi, tracer deux côtés opposés d'un parallélogramme permet de tracer deux droites parallèles et vérifier qu'un parallélogramme peut « s'inscrire » entre deux droites permet de vérifier leur parallélisme) et qu'il est caractérisé par des diagonales sécantes en leur milieu. Pour vérifier le parallélisme de deux droites, on trace un segment qui va d'un point de la première droite à un point de la deuxième et on place le milieu de ce segment. On trace un autre segment qui relie un point de la première droite à un point de la deuxième et qui passe par le milieu du premier segment. On regarde alors s'il est aussi le milieu du deuxième segment. Pour tracer une droite parallèle à une droite (d) donnée passant par un point D donné, on choisit un point B sur (d), on trace alors le segment [BD]. On place le milieu I de [BD]. On choisit un deuxième point C sur (d) et on trace la demi-droite [CI). On reporte la longueur CI depuis I et on obtient le point A. On relie les deux points A et D pour tracer la seconde droite.

Origine du questionnement

Un problème rencontré en classe

C'est à la suite de l'observation d'une séquence de classe lors de laquelle une professeur des écoles stagiaire exhibe avec ses élèves de CM2 les procédures par écartement constant et par double-perpendicularité que le questionnement qui a motivé cet article a émergé. Au cours de l'une des séances, un élève remarque que pour réaliser la construction qui repose sur la double-perpendicularité, il a tracé deux angles droits et pris une mesure, alors que pour celle qui utilise l'écartement constant, il a tracé deux angles droits et pris deux mesures. Dans son esprit, puisque ces deux constructions aboutissent au même résultat, c'est qu'on a fait une mesure pour rien dans la procédure par écartement constant ! Cette idée diffuse rapidement dans la classe et met l'enseignante dans une situation délicate à gérer.

Offre et *al.* définissent l'économie gestuelle comme la *« limitation des gestes à accomplir pour un tracé ou la vérification de propriétés »* et l'économie conceptuelle comme la *« limitation des connaissances à mettre en œuvre pour réussir la tâche entreprise »* (Offre et *al.*, 2006, p. 9). De manière générale, les élèves sont à la recherche d'une économie gestuelle. Ils le manifestent en préférant user de procédures qui nécessitent d'utiliser peu d'instruments consécutivement. Toutefois, les auteurs nous mettent en garde :

> *Utiliser un seul instrument au lieu de deux peut représenter une économie gestuelle nécessitant des connaissances mais peut correspondre aussi à l'amalgame de deux notions ou à la confusion entre propriétés nécessaires et propriétés suffisantes. (ibid., p. 9).*

Pour l'enseignement du parallélisme au cycle 3, deux procédures sont traditionnellement proposées aux élèves pour tracer deux droites parallèles à une distance donnée l'une de l'autre, mais l'une des deux est gestuellement plus économique que l'autre. On comprend alors de quelle façon ce constat peut conduire les élèves à favoriser exclusivement la procédure la plus économique ou à supprimer l'une des étapes supposée inutile de la procédure la plus coûteuse. Cela montre bien la nécessité d'expliciter les propriétés des figures en jeu dans les procédés enseigné, le lien entre ces propriétés et les instruments convoqués dans les tracés et le fait que les procédures étudiées aboutissent au même résultat mais ont des coûts différents.

Pourquoi la procédure par double-perpendicularité est-elle plus économique que la procédure par écartement constant ?

Dans la procédure par double-perpendicularité, on débute le tracé d'un quadrilatère $ABCD$ ayant deux angles droits consécutifs en A et D, c'est à dire un trapèze rectangle. Puis on s'appuie sur le fait que cette figure comporte deux côtés opposés $[CD]$ et $[BA]$ parallèles qui sont justement les côtés sur lesquels reposent d_1 et d_1 .

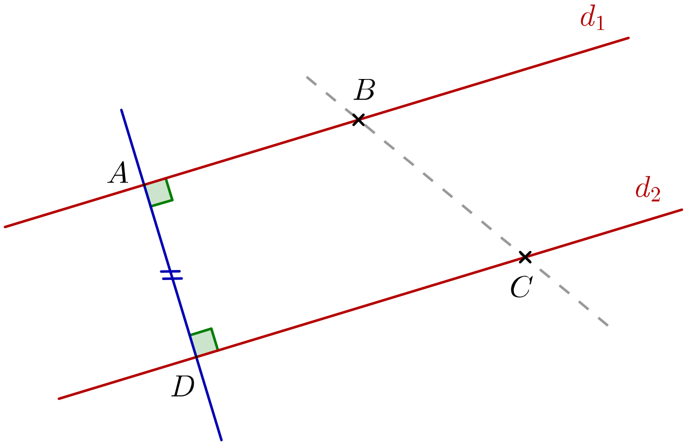


Figure 9 : Procédure par double-perpendicularité définissant un trapèze rectangle

La procédure par écartement constant, quant à elle, définit un rectangle : en effet, on trace un quadrilatère $ABCD$ comportant deux angles droits consécutifs en C et D (trapèze rectangle) et deux côtés opposés $[AD]$ et $[BC]$ de même longueur (rectangle). On s'appuie alors sur le fait que les deux côtés opposés $[CD]$ et $[BA]$ portant d_1 et d_1 sont parallèles.

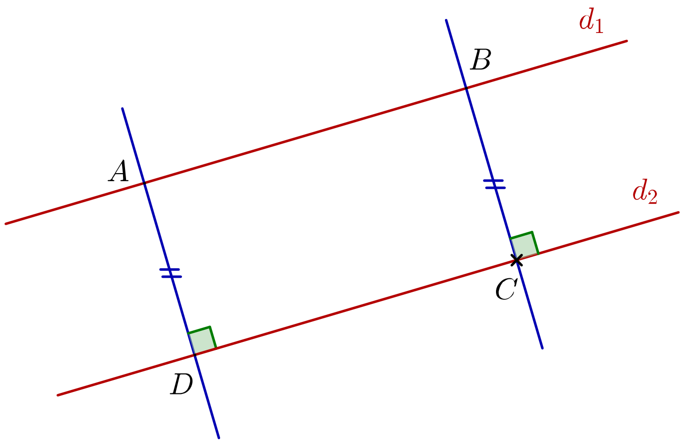


Figure 10 : Procédure par écartement constant définissant un rectangle

Dans la procédure par double-perpendicularité, on utilise une propriété du trapèze rectangle, alors que dans la procédure par écartement constant, on utilise une des propriétés du rectangle, qui est un trapèze rectangle particulier et qui par conséquent est plus contraignant à tracer. De plus, dans la procédure par double-perpendicularité, on se contente de tracer trois côtés du trapèze rectangle, alors que dans la procédure par écartement constant, le rectangle est entièrement tracé.

Notons toutefois que pour réaliser la procédure par double-perpendicularité, les élèves peuvent être tentés de construire le trapèze rectangle en entier pour « voir » la figure dont on utilise les propriétés, ce qui rend alors cette procédure plus coûteuse que la procédure par écartement constant !

Une proposition de séquence

Des critères qui guident les choix opérés

En écho aux éléments qui ont été pointés précédemment, je souhaite exhiber, à partir des ressources existantes et d'éventuels aménagements et compléments, une séquence d'enseignement pour le cycle 3 qui contribue à l'acquisition de la compétence *« Reconnaître et utiliser la relation de parallélisme »* en répondant à différents critères :

1. elle peut être mise en place à tous les niveaux du nouveau cycle 3 (CM1, CM2 ou 6ᵉ) avec différents degrés d'expertise et d'approfondissement ;

2. plusieurs procédés de tracé de deux droites parallèles ou de vérification du parallélisme de deux droites y sont exhibés ;

3. ces procédés s'appuient sur des propriétés connues des élèves, qui en expliquent la validité ;

4. l'étude de plusieurs procédés est justifiée, lors d'une situation problème, par le fait qu'on utilise l'un ou l'autre en fonction du contexte, des instruments, des contraintes, *etc.*, même si l'un des procédés se révèle gestuellement plus économique qu'un autre.

Le critère n° 1 répond avant tout pour nous à un objectif de formation initiale et continue des enseignants : en effet, le nouveau cycle 3 fournit une opportunité de créer des liens plus forts entre les enseignants du primaire et ceux du secondaire, liens qui ne s'établiront que par le biais d'échanges, de mutualisation et d'harmonisation des pratiques. Dans cette optique, il nous semble intéressant de se doter de supports de travail communs aux enseignants de CM1, de CM2 et de 6ᵉ, sur lesquels on pourra s'appuyer lors d'une animation pédagogique réunissant des professeurs des trois niveaux du cycle 3.

Les raisons qui justifient les critères n° 2, 3 et 4 ont été explicitées dans les paragraphes précédents. Ces critères répondent à des recommandations présentes dans les programmes pour le cycle 3 ou émanent de travaux de recherches en didactique des mathématiques. En effet, le critère n° 2 fait écho au fait que :

> *Différentes caractérisations d'un même objet ou d'une même notion s'enrichissant mutuellement permettent aux élèves de passer du regard ordinaire porté sur un dessin au regard géométrique porté sur une figure, (MEN, 2015, p. 210),*

et le critère n° 3 au fait que l'articulation école-collège est marquée par un changement de contrat vis-à-vis des moyens de preuve :

> *les activités permettent aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets et leurs propriétés sont contrôlés par la perception à une géométrie où ils le sont par le recours à des instruments, par l'explicitation de propriétés pour aller ensuite vers une géométrie dont la validation ne s'appuie que sur le raisonnement et l'argumentation. (ibid., p. 210).*

Enfin, le critère n° 4 se réfère aux travaux de Fénichel et *al.* (2004) et Offre et *al.* (2006) cités précédemment.

Éléments d'analyse a priori de la séquence

Une réponse aux critères fixés

La séquence détaillée figure en annexe 1 et le matériel qui l'accompagne en annexe 2. Après des recherches dans les manuels et fichiers de mathématiques pour le cycle 3, j'ai porté mon choix sur la proposition de la collection *Cap Maths CM1* (Charnay et *al.*, 2010, guide de l'enseignant, pp. 112-117, Manuel pp. 54-55, cahier GM pp. 27-30) qui semblait d'emblée répondre à plusieurs des critères énoncés précédemment : deux procédés de construction de droites parallèles ou de vérification du parallélisme sont mis à l'étude (critère n° 2) et la validité de ces procédés est justifiée par les propriétés des figures en présence (critère n° 3). J'ai procédé à quelques modifications de mise en œuvre que je préciserai au fil de la description. Afin d'enrichir le répertoire des procédés étudiés et de pouvoir insister auprès des élèves sur la nécessité de disposer de plusieurs appréhensions d'une même notion, j'ai également agrémenté cette séquence de l'étude d'un troisième procédé (critère n° 2). Ce dernier, s'il est approfondi, présente un intérêt particulier pour la classe de 6^e qui sera détaillé dans un paragraphe suivant, ce qui répond en particulier au critère n° 1. Enfin, pour parachever la séquence, j'ai proposé en séance 4 un problème de synthèse qui permet de justifier l'étude de trois procédés différents et de mettre l'accent sur le fait que c'est le contexte qui guide le choix du procédé utilisé (critère n° 4).

Description rapide

La séquence est composée de quatre séances. Dans la première séance, la **procédure par écartement constant** est exhibée puis utilisée pour contrôler le parallélisme de deux droites, reproduire deux droites parallèles et construire deux droites parallèles distantes d'un écartement donné. La deuxième séance vise à faire émerger la **procédure par double-perpendicularité** lors de la résolution d'un problème dans lequel seule l'équerre est disponible et en s'appuyant sur des propriétés connues des figures usuelles. Cette procédure est alors mise en fonctionnement pour vérifier le parallélisme de deux droites et tracer deux droites parallèles ayant un écartement donné. Dans la troisième séance, on étudie la **procédure par les diagonales du parallélogramme** que l'on exerce ensuite dans une série d'activités de vérification ou de construction de droites parallèles. Enfin, dans une quatrième séance, un **problème de synthèse** permettant de mobiliser ces trois procédures est proposé aux élèves. Il permet en particulier d'illustrer le fait que ce sont les contraintes matérielles de la situation qui conduiront à favoriser l'une ou l'autre de ces procédures.

Prérequis

Pour aborder cette séquence, les élèves doivent :

- connaître la notion de droites perpendiculaires ;
- savoir utiliser le double-décimètre pour tracer des segments et mesurer la longueur de segments ;
- savoir utiliser l'équerre pour tracer des segments perpendiculaires ou vérifier que deux segments sont perpendiculaires ;
- connaître les propriétés des quadrilatères usuels ;
- *« savoir déterminer le plus court chemin entre deux droites parallèles (en lien avec la perpendicularité) »* (MEN 2015, p. 212) et connaître la notion d'écartement entre deux droites ;
- savoir déterminer le milieu d'un segment à l'aide du double-décimètre.

Focus sur la séance 1

Dans cette séance, on propose aux élèves de trier les droites parallèles parmi un lot de représentations graphiques de paires de droites affichées au tableau. C'est la **procédure par écartement constant** qui est visée. Elle est proposée en premier lieu car elle est un corollaire de la conception initiale qu'ont les élèves du parallélisme de deux droites. En effet, deux droites parallèles sont pour eux deux droites *« qui ne se croisent jamais »*. On va ici les conduire à une caractérisation plus opérationnelle qui consiste à dire que deux droites parallèles sont deux droites qui ni ne se rapprochent, ni ne s'éloignent, et qui gardent donc un écartement constant.

Dans cette première activité qui est uniquement basée sur la discrimination visuelle, les paires de droites qui sont sécantes dans la feuille de papier ne devraient pas poser problème. En revanche, il est à prévoir que celles qui ne sont pas parallèles mais qui se coupent en dehors de la feuille seront classées par plusieurs élèves dans la catégorie des droites parallèles, la représentation initiale *« deux droites parallèles sont deux droites que je ne vois pas se croiser »* étant assez résistante. Lors de la mise en commun, le débat doit permettre d'éliminer ces cas de figures, quitte à prolonger les tracés des droites concernées pour faire apparaître leurs intersections.

Dans les deux activités qui suivent (contrôler le parallélisme de deux droites à l'aide des instruments et reproduire deux droites parallèles à l'aide des instruments), d'autres difficultés sont prévisibles, comme en particulier celles liées à l'utilisation correcte du double-décimètre et de l'équerre, qui devra certainement faire l'objet de rappels et d'un étayage de l'enseignant pour les élèves les plus en difficulté. On peut aussi supposer que le procédé qui permet de déterminer la distance entre un point et une droite, même s'il a fait l'objet d'une séquence antérieure, devra être revu collectivement.

Focus sur la séance 2

En deuxième lieu, c'est la **procédure par double-perpendicularité** qui est étudiée. Sa validité peut être comprise par les élèves grâce à leurs connaissances antérieures sur les quadrilatères. Les auteurs de *Cap Maths CM1* proposent la tâche suivante aux élèves pour leur faire découvrir cette procédure : il faut tracer une droite parallèle à une droite donnée avec une contrainte de position et pour seul instrument disponible l'équerre. La procédure exhibée à la séance précédente, à savoir tracer deux segments de la longueur voulue et perpendiculaires à la droite donnée qui garantissent un écartement constant, est mise en défaut puisque les élèves ne disposent d'aucun instrument permettant de mesurer ou de reporter des longueurs. On peut lire dans le guide de l'enseignant :

> *Si, après un certain temps de recherche, aucun élève n'a utilisé la double perpendicularité, demander quel quadrilatère connu apparaît dans la figure de la question 3 restée au tableau. Les propriétés de ce quadrilatère sont contrôlées avec les instruments pour conclure que c'est un rectangle. Relancer alors la recherche car, après avoir reconnu un rectangle sur la figure, le problème consiste maintenant à déterminer comment, connaissant le support d'un côté et un sommet du côté opposé de ce rectangle, tracer ce côté opposé avec l'équerre seule. (Charnay, 2010, GDE pp. 116-117).*

Dans la tâche prescrite ici, les élèves pourraient être conduits à effectuer trop de mesures ou de tracés d'angles : en effet, en cherchant à faire apparaître le côté opposé du rectangle cité dans la consigne, il est probable que certains élèves souhaitent « voir » ce rectangle. La construction exhibée deviendrait alors aussi coûteuse que celle de l'écartement constant (trois angles droits contre deux angles droits et un report de longueur). C'est pourquoi nous avons procédé à un léger aménagement de la proposition de la ressource (annexe 1, séance 2, phase 2) : c'est le tracé du trapèze rectangle qui est mis en avant car il est plus économique pour réaliser la tâche. On remarque également qu'il est inutile de tracer le quatrième côté du trapèze pour obtenir deux parallèles. Notons enfin que les phases 2 et 3 de cette séance fournissent une occasion de revoir collectivement les propriétés des quadrilatères usuels et de constituer une affiche récapitulative.

Focus sur la séance 3

Dans la troisième séance, on propose la **procédure par les diagonales du parallélogramme**. Dans le descriptif de la séquence, à partir de la phase 2, on trouve deux alternatives de mise en œuvre pour utiliser cette procédure, l'une n'utilisant que le double-décimètre et l'autre prenant appui sur l'utilisation d'une « machine à diagonales ».

Le principe de cette « machine à diagonales » a été emprunté à J.-F. Grelier (2001, pp. 51-54) : elle est constituée de deux bandelettes de bristol percées puis assemblées en leur milieu par une attache parisienne. Ces deux bandelettes sont également percées à leurs extrémités pour permettre de tracer quatre points qui correspondent aux sommets d'un parallélogramme, la « machine » représentant les diagonales, qui caractérisent le parallélogramme puisqu'elles sont sécantes en leur milieu. Ici, l'élève obtient un quadrilatère en plaçant ses sommets, procédé peu habituel à l'école primaire où l'on construit en général les figures en traçant leurs côtés. Or plusieurs auteurs (Duval & Godin, 2005 ; Keskessa et *al.*, 2007 ; Barrier et *al.*, 2014) ont souligné le fait que si, au cycle 1 et pendant une partie du cycle 2, les élèves perçoivent spontanément les figures rencontrées dans les problèmes géométriques comme des surfaces juxtaposées ou superposées, il est nécessaire de faire évoluer le regard qu'ils portent sur ces figures car les tâches rencontrées aux cycles 3 et 4 nécessitent essentiellement de repérer des relations entre des lignes et/ou des points. Ainsi, d'une figure complexe initialement perçue comme un assemblage de surfaces, c'est à dire d'objets de dimension 2, ils devront pouvoir dégager des lignes (objets de dimension 1) et des points (objets de dimension 0). C'est ce que Duval et Godin (2005) nomment la déconstruction dimensionnelle. En ce sens, l'utilisation de la « machine à diagonales », qui conduit les élèves à construire un parallélogramme par le tracé de points (les sommets du parallélogramme) que l'on relie, nous semble intéressante.

L'étude du parallélogramme figure explicitement au programme de 6^e. Il y est précisé qu'elle est *« notamment l'occasion d'un retour sur la notion de parallélisme »* (MEN, 2015, p. 212). Un examen approfondi de la procédure par les diagonales du parallélogramme paraît donc particulièrement adapté à la classe de 6^e car il permet une analyse fine des propriétés du parallélogramme (quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles et aussi quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu). La séance 3 peut être mise en œuvre avec la « machine à diagonales » en classe de CM1 ou CM2, alors que la variante n'utilisant que le double-décimètre sera réservée aux élèves de 6^e. On peut toutefois proposer aux élèves de CM1 ou CM2 les plus avancés de chercher un procédé utilisant uniquement le double-décimètre qui se substitue à la « machine à diagonales ».

Enfin, il est à noter que, pour faire fonctionner cette procédure dans la variante n'utilisant que le double-décimètre, l'élève doit être capable de trouver le milieu d'un segment à l'aide du double-décimètre ; cela suppose de savoir déterminer la moitié d'une longueur qui n'est peut-être pas un nombre entier de centimètres. Une stratégie astucieuse consiste à choisir un segment dont la mesure de la longueur en centimètres est entière (voire paire) pour faciliter la détermination de la position du milieu. Cette remarque peut être soulignée collectivement.

Focus sur la séance 4

Lors de la séance 2, l'attention des élèves a été attirée sur le fait que la procédure par double-perpendicularité se révélait plus économique que celle par écartement constant. Comment, alors, justifier l'apprentissage des deux ? Pourquoi ne pas se contenter de la plus rentable ? Pourquoi en avoir même étudié une troisième (la procédure par les diagonales du parallélogramme) ? La séance 4, qui propose un problème de synthèse permettant de confronter les trois procédures, vise à montrer que ce sont les contraintes matérielles de la situation (les instruments à disposition dans le cas qui nous intéresse) qui guideront le choix du procédé à employer. En évoquant par exemple les deux montants des étagères, on invite l'enseignant à illustrer le fait que dans la vie de tous les jours, on peut être conduit à positionner parallèlement deux objets avec différents outils, dans différents cas de figure dans lesquels il sera plus intéressant de mobiliser l'un ou l'autre des procédés étudiés, et qu'il en existe d'autres qui n'ont pas été étudiés dans cette séquence.

Quelques commentaires *a posteriori*

Cette séquence a été mise en place dans une classe de CM1 et dans une classe de CM2. Si une analyse *a posteriori* centrée sur le langage fera l'objet d'un travail ultérieur, voici toutefois quelques éléments relevés lors de ces expérimentations.

Dans la phase 2 de la séance 1, les élèves doivent vérifier le parallélisme de plusieurs paires de droites en utilisant la procédure par écartement constant. Dans chacune des deux classes, les enseignantes et moi-même avons pu noter lors de la phase de recherche que plusieurs élèves utilisaient leur double-décimètre comme *« macro-outil »* (Offre et *al.*, 2006, p. 26) pour déterminer la distance entre deux droites : ils positionnaient le double-décimètre de telle façon qu'une des deux droites soit placée le long de la graduation « 0 », puis mesuraient l'écartement entre les deux droites en regardant par transparence sous quelle graduation se trouvait l'autre droite. Les graduations du double-décimètre étant alignées sur une droite perpendiculaire au bord, elles se substituent à l'équerre, permettant, en n'utilisant qu'un seul instrument et sans faire de tracé, de prendre une mesure qui aurait dû nécessiter deux instruments et un tracé (tracer un segment perpendiculaire à la première droite avec l'équerre, puis mesurer la longueur de ce segment avec le double-décimètre). Les deux enseignantes ont écarté ce procédé pendant des temps de mise en commun en arguant qu'il manquait de précision et que seule l'équerre permettait de tracer un angle droit ou de vérifier qu'un angle était droit. En effet, lorsqu'un élève procède avec le double-décimètre seul, rien ne garantit qu'il relie les gestes effectués et les informations prises aux propriétés géométriques sous-jacentes, en particulier qu'il ait conscience de la nécessité de prendre une mesure sur un segment perpendiculaire à l'une des droites. En revanche, s'il utilise son équerre, l'enseignante a la certitude qu'il veut tracer un angle droit, aussi imprécis soit-il au final.

> *L'utilisation d'un instrument est ainsi pensée comme la manifestation d'une connaissance qu'on peut contrôler par cet usage même. Dans cette perspective, il est nécessaire que l'usage institutionnel de l'instrument corresponde le plus possible à la manifestation de cette connaissance et d'elle seule, ce qui suppose un usage codifié des instruments, lié à la (aux) propriété(s) qu'ils sont censés matérialiser. (Offre et al. 2006, p. 27).*

Nous avons été confrontées à un problème récurrent tout au long de la séquence : l'imprécision des tracés et des mesures compromettait les résultats des trois procédures exhibées. En particulier, lors de la séance 4, la « machine à diagonales » s'est révélée très approximative. Lors de cette même séance, il est même arrivé que des élèves voulant appliquer la procédure par écartement constant parviennent à identifier que deux droites n'étaient pas parallèles en se servant du procédé erroné qui utilise seulement le double-décimètre que nous avons décrit ci-dessus, alors que paradoxalement, d'autres les ont cru à tort parallèles en utilisant les instruments adéquats (équerre et double-décimètre). Dans ces circonstances, il peut s'avérer délicat pour l'enseignant de justifier ses exigences quant à l'usage des instruments. Offre et *al.* précisent que :

> *cela soulève la question de l'ambiguïté des objectifs des tracés aux instruments dans l'enseignement de la géométrie à l'école primaire et encore au début du collège. S'il s'agissait d'obtenir les tracés les plus satisfaisants possible sur le plan du dessin, on privilégierait des instruments performants qui limitent les déplacements et les tracés auxiliaires, sources d'imprécision, et permettent de respecter le plus de propriétés à la fois tout en gardant un caractère aussi universel que possible. (Offre et al., 2006, p. 27).*

Or les instruments utilisés à l'école et au collège sont sources de multiples imprécisions. L'objectif principal de l'enseignement de la géométrie au cycle 3 n'est pas d'apprendre aux élèves à réaliser les meilleurs tracés à l'aide des instruments à leur disposition, mais de leur faire acquérir des connaissances géométriques. Voici un argument qu'un enseignant peut donner aux élèves pour expliquer ses exigences en terme d'utilisation des instruments : de nos jours, lorsqu'on souhaite obtenir des tracés précis, on ne procède plus à la main. On les fait la plupart du temps réaliser à une machine. Il faut alors savoir lui dicter ce qu'elle doit faire, et pour cela, peu importe que l'on soit habile ou non pour tracer des figures, ce sont des connaissances géométriques qu'il faut être capable de mobiliser. Cet argument peut être illustré en classe en faisant utiliser aux élèves un logiciel de géométrie dynamique comme le préconisent les nouveaux programmes :

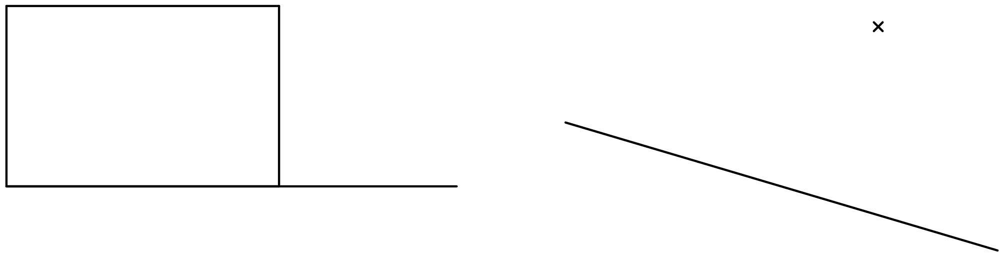
> *[Les activités spatiales et géométriques] constituent des moments privilégiés pour une première initiation à la programmation notamment à travers la programmation de déplacements ou de construction de figure. […] Exemples de matériels : […] logiciels de géométrie dynamique. (MEN 2015, pp. 210-211).*

Enfin, dans la tâche de reproduction de deux droites parallèles de la séance 1 (phase 3), certains élèves ont utilisé la position des deux droites par rapport aux bords de la feuille : puisque le support du modèle et le support dédié à la reproduction étaient constitués de deux feuilles A5 identiques, ces élèves ont repéré la position des points d'intersection des droites avec les bords de la feuille en mesurant la distance qui les séparait des sommets de la feuille, puis ont reproduit ces quatre points sur la feuille support de reproduction. Il ne leur restait plus qu'à relier les points deux à deux pour obtenir la reproduction souhaitée. Si cette stratégie leur a permis d'aboutir à un résultat correct, elle ne les a pas conduits à mobiliser la procédure par écartement constant qui était visée dans cette séance. Pour pallier ce phénomène, on peut, pour la reproduction, fournir un support différent de celui du modèle et ne pas tracer les droites jusqu'aux bords de la feuille sur le modèle. On pourrait aussi proposer sur une même feuille le modèle (deux droites parallèles) et une amorce de la reproduction (une droite déjà tracée selon une orientation différente de son modèle). La tâche consisterait alors à compléter l'amorce par la deuxième droite, ce qui correspond à une activité de restauration de figure comme nous l'évoquerons dans la conclusion.

Conclusion

Les programmes pour l'école primaire préconisent d'enseigner au cycle 3 *« une géométrie où [les objets et leurs propriétés] sont contrôlés par le recours à des instruments, par l'explicitation de propriétés »* pour aller ensuite vers *« une géométrie dont la validation ne s'appuie que sur le raisonnement et l'argumentation. »* (MEN, 2015, p. 210). Afin d'aider les élèves à passer du regard ordinaire porté sur un dessin au regard géométrique porté sur une figure, ils encouragent également les enseignants à faire appréhender de plusieurs façons un même objet ou une même propriété géométrique. Dans cet article, j'ai tenté d'apporter des éclairages mathématiques et didactiques et de proposer une séquence qui répond à ces injonctions dans le cas du parallélisme : on y aborde trois caractérisations de la notion de parallélisme en proposant une justification de chacun des procédés exhibés qui s'appuie sur des propriétés déjà connues des élèves. Enfin, dans une ultime séance de résolution de problème, les élèves peuvent comprendre l'intérêt d'apprendre trois procédés différents au lieu de se contenter du plus économique.

Pour finir, il nous semble que les activités de restauration de figure (Duval & Godin, 2005 ; Barrier et *al.*, 2014) avec un barème attribué aux instruments à disposition constituent une source intéressante de problèmes permettant de justifier l'apprentissage de plusieurs procédés de tracés pour une même notion. Dans le cas qui nous intéresse, en fonction du coût alloué à l'utilisation de l'équerre, du double-décimètre, du compas, *etc.*, on peut imaginer des figures à restaurer dans lesquelles il faut tracer une parallèle à une droite donnée passant par un point donné et où les différents procédés de construction que l'on souhaite approcher seront tour à tour valorisés. Voici un exemple qui illustre notre propos.



modèle **amorce**

Barème B_1	
Instrument	**Coût**
Équerre	5 €
Règle graduée	1 €
Compas	1 €
Règle non graduée	3 €
Gomme	0 €

Barème B_2	
Instrument	**Coût**
Équerre	1 €
Règle graduée	5 €
Compas	5 €
Règle non graduée	2 €
Gomme	0 €

Barème B_3	
Instrument	**Coût**
Équerre	5 €
Règle graduée	2 €
Compas	2 €
Règle non graduée	1 €
Gomme	0 €

Figure 11 : Un exemple de restauration de figure, avec coût des instruments.

Seuls les instruments cités dans le tableau des barèmes peuvent être utilisés. Chaque tracé effectué sur l'amorce avec un des instruments cités coûte le montant indiqué dans le tableau. En revanche, toute information prise sur le modèle à l'aide des instruments cités dans le tableau est gratuite. Le but est de restaurer le modèle à partir de l'amorce en trouvant la procédure la moins coûteuse. Voici trois procédures que l'on peut envisager pour restaurer le modèle. Pour simplifier leur description, on nomme les points du modèle de la façon suivante :

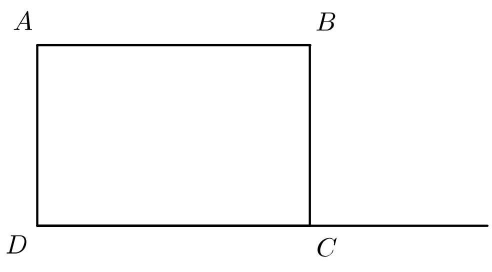


Figure 12

La procédure P_1 utilise l'écartement constant : à l'équerre, on trace une perpendiculaire $[BC]$ à (DC) passant par le point B. Puis, à l'équerre, on trace une perpendiculaire à (DC) passant par le point D. Au compas ou à la règle graduée, on reporte la longueur BC depuis D pour obtenir le point A. Enfin à la règle non graduée, on trace le segment $[AB]$.

La procédure P_2 utilise la double-perpendicularité : à l'équerre, on trace une perpendiculaire $[BC]$ à (DC) passant par le point B. Puis, à l'équerre, on trace une perpendiculaire à (DC) passant par le point *D*. Enfin, à l'équerre on trace une perpendiculaire [*AB*] à [*BC*] passant par le point *B* et on obtient le point *A*.

La procédure P_3 s'appuie sur le tracé des diagonales du rectangle : à la règle non graduée, on trace le segment [*BD*]. Puis à la règle graduée, on trace le milieu *I* du segment [*BD*]. Au compas, on trace le cercle de centre *I* et de rayon *IB*. Il coupe le segment déjà tracé en *C*. À la règle non graduée, on trace et on prolonge le segment [*CI*]. Il coupe le cercle en *A*. À la règle non graduée, on trace les segments [*AB*], [*BC*] et [*AD*].

Les trois exemples de barèmes B_1, B_2 et B_3 permettent de favoriser tour à tour chacune des procédures P_1, P_2 et P_3 : en effet, avec le barème B_1, la procédure P_1 coûte 14 €, la procédure P_2 coûte 15 € et la procédure P_3 coûte 17 €, ce qui valorise la procédure par écartement constant. Avec le barème B_2, la procédure P_1 coûte 9 €, P_2 coûte 3 € et P_3 coûte 20 €, ce qui valorise la procédure par double-perpendicularité. Enfin, avec le barème B_3, la procédure P_1 coûte 13 €, P_2 coûte 15 € et P_3 coûte 9 €, ce qui valorise la procédure par les diagonales du rectangle.

La possibilité de jeu sur certaines variables didactiques offerte par les activités de restauration de figures avec barème permet un réinvestissement des trois procédures de construction d'une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné utilisées dans notre séquence dans un contexte qui illustre le fait que l'efficacité de chacune de ces procédures est fonction des contraintes de la situation.

Références bibliographiques

BARRIER, T., HACHE, C. & MATHE, A.-C. (2014). Droites perpendiculaires au CM2 : restauration de figure et activité des élèves, *Grand N*, 93, 13-37.

BULF, C., MATHÉ, A.-C. & MITHALAL, J. (2014). Apprendre en géométrie, entre adaptation et acculturation. *Spirale - Revue de Recherches en Éducation*, 54, 29-48.

CHARNAY, R. (1997-1998). De l'école au collège : les élèves et les mathématiques, *Grand N*, 62, 35-46.

CHARNAY, R., COMBIER, G., DUSSUC, M.-P. & MADIER, D. (2010). *Cap Maths CM1, guide de l'enseignant, manuel et cahier de géométrie-mesure*. Paris : Hatier.

DUVAL, R. & GODIN, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N*, 76, 7-27.

FÉNICHEL, M., PAUVERT, M. & PFAFF, N. (2004). *Donner du sens aux mathématiques. Tome 1 : espace et géométrie*. Paris : Bordas Pédagogie.

GRELIER, J.-F. (2001). *Apprentissages géométriques aux cycles II et III*. CRDP Midi-Pyrénées.

HACHE, C. (dir.), AUBRIERE, J., BATTON, A., DONAT, V., GOSSET, H., & RAMBAUD, N. (2005). *Domino Math 6e. Programme 2005*. Paris : Nathan.

KESKESSA, B., PERRIN-GLORIAN, M.-J. & DELPLACE, R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3 : une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N*, 79, 33-60.

OFFRE, B., PERRIN-GLORIAN, M.-J. & VERBAERE, O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Grand N*, 77, 7-34.

PELTIER, M.-L. BRIAND, J., NGONO, B. & VERGNES, D. (2016). *Opération maths CM1*. Hatier.

REYMONET, C. (2004). Un cadre expérimental pour l'étude de la géométrie au cycle 3 : le cas du parallélisme. *Grand N*, 73, 33-48.

CSP (2015). *Projet de programme pour le cycle 3 (et annexe)*. Publication du 13 avril 2015.

MEN (2002). *Documents d'application des programmes, Mathématiques, cycle 3*. Scéren CNDP.

MEN (2008). *Horaires et programmes d'enseignement de l'école primaire*. B.O. du 19 juin 2008, 1-39.

MEN (2015). *Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4)*. B.O. spécial n° 11 du 26 novembre 2015, 1-40.

Annexe 1
La séquence

Séance 1 : l'écart constant entre deux droites parallèles

Objectifs :

- donner une définition fonctionnelle du parallélisme de deux droites ;
- exhiber un procédé de contrôle et de tracé de deux droites parallèles : l'écart constant ;
- utiliser ce procédé pour vérifier que deux droites sont parallèles ;
- utiliser ce procédé pour construire ou reproduire deux droites parallèles.

Phase 1 : donner une caractérisation opérationnelle de deux droites parallèles

Plusieurs paires de droites tracées sur des feuilles A4 sont affichées au tableau. Collectivement, l'enseignant demande aux élèves de classer les droites parallèles et les droites non parallèles. Pour chaque exemple, il est possible de conclure sans recours aux instruments, par simple observation.

L'enseignant demande alors aux élèves : *« Que sont deux droites parallèles ? »*.

Réponse attendue : *« Deux droites qui ne se coupent pas »*.

On remarque alors que dans le classement que l'on vient de faire, on a mis dans la colonne des droites non parallèles qui pourtant ne se coupent pas (sur la feuille). La définition qui vient d'être donnée ne permet pas toujours de décider si des droites sont parallèles ou pas car dans la zone que l'on peut observer (la feuille de papier, le tableau), on peut rencontrer des droites qui ne sont pas parallèles et qui ne se coupent pas : elles se rapprochent ou s'éloignent, mais ne sont pas sécantes dans la portion d'espace dans laquelle on opère.

La discussion conduit à compléter la première définition donnée par les élèves : *« Deux droites parallèles sont deux droites qui ne se coupent pas, même si on les prolonge »*, puis à déboucher sur une nouvelle formulation qui sera plus fonctionnelle en situation de résolution de problèmes : *« Deux droites parallèles sont deux droites qui ne s'éloignent pas et ne se rapprochent pas : elles ont toujours le même écart »*.

<u>Remarque :</u> cette première phase pourra être l'occasion de revenir sur le lexique employé. En effet, il est équivalent de dire que *« d et d' sont parallèles »*, *« d est parallèle à d' »* et *« d' est parallèle à d »*.

Phase 2 : exhiber le premier procédé et le faire fonctionner pour contrôler le parallélisme

Par deux, les élèves reçoivent une feuille comportant plusieurs couples de droites. Ils doivent déterminer, en mettant à l'épreuve la nouvelle caractérisation, si ces couples de droites sont parallèles ou non. Cette fois-ci, la perception visuelle ne suffit pas. Les élèves doivent donc trouver un moyen de mesurer l'écartement entre les deux droites, puis de contrôler « plus loin » qu'il est le même.

La mise en commun permet d'exhiber le procédé expert :

- l'écartement entre deux droites est la distance la plus courte pour aller d'une droite à l'autre (la notion de distance d'un point à une droite a été travaillée antérieurement) ;
- il se mesure sur une droite qu'on trace perpendiculaire à l'une des deux droites parallèles ;
- il faut parfois prolonger les tracés pour savoir.

Phase 3 : faire fonctionner le procédé pour reproduire deux droites parallèles

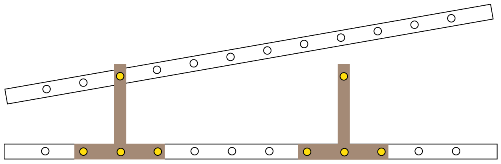
Par deux, les élèves reçoivent une feuille comportant deux droites parallèles qui sont distantes de 5 *cm*. Ils doivent reproduire ces deux droites sur une autre feuille. On valide par superposition avec le modèle.

La mise en commun permet de pointer les faits suivants :

• il faut d'abord déterminer l'écartement entre les deux droites (on introduit l'expression *« distance entre deux droites »*),

• pour reproduire ces deux droites, on trace une première droite, puis deux segments perpendiculaires à cette droite et de longueur 5 *cm*. La seconde droite passe par les autres extrémités des deux segments.

Si des élèves ont tracé plus de deux segments, lors de la mise en commun, le débat doit permettre d'expliquer pourquoi deux segments suffisent. On peut à cet effet prévoir un dispositif articulé du type :



À l'issue de cette activité, on réalise une affiche sur laquelle le procédé exhibé lors de cette séance est expliqué (un exemple est proposé en annexe 2).

Phase 4 : exercices de réinvestissement

Individuellement, les élèves s'entraînent à utiliser ce procédé pour vérifier le parallélisme de deux droites et tracer deux droites parallèles ayant un écartement donné.

Séance 2 : la double-perpendicularité

Objectifs :

• exhiber un deuxième procédé de contrôle et de tracé de deux droites parallèles : la double perpendicularité ;

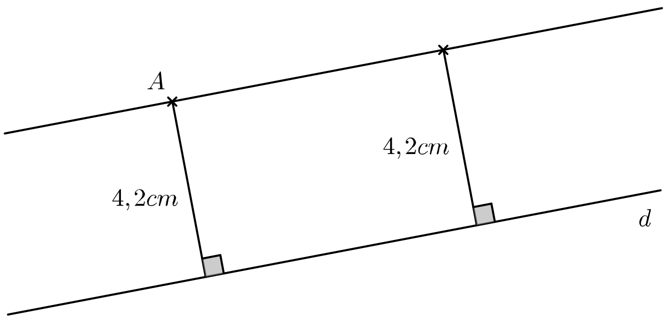
• utiliser ce procédé pour vérifier que deux droites sont parallèles ;

• utiliser ce procédé pour construire ou reproduire deux droites parallèles.

Phase 1 : tracer une parallèle à une droite donnée passant par un point donné

En réinvestissant le procédé vu à la séance 1, les élèves doivent tracer une droite parallèle à une droite *d* déjà tracée et passant par un point *A* déjà placé.

Un modèle agrandi est affiché au tableau. À l'issue de la mise en commun, on obtient l'affichage suivant :

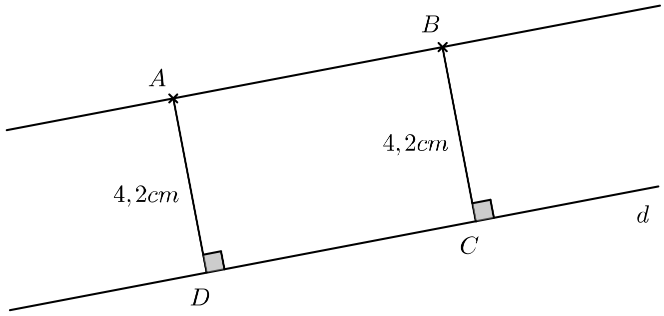


Phase 2 : discussion sur la figure obtenue

Question : *« Quelle figure usuelle a-t-on tracée dans les étapes qui ont servi à tracer la droite parallèle à d passant par A ? »*

Réponse attendue : *« Un rectangle ABCD »*.

L'enseignant nomme les sommets sur l'affiche et le surligne éventuellement pour le faire clairement apparaître.



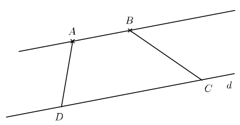
Question : *« Pourquoi le tracé d'un rectangle nous permet-il d'obtenir deux droites parallèles ? »*

Réponse attendue : *« Parce que dans un rectangle, les côtés opposés sont parallèles »*.

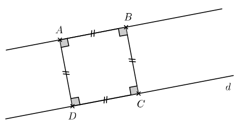
Question : *« Quelles autres figures comportant deux côtés opposés parallèles connaît-on ? »*

Réponse attendue : *« Un trapèze, un trapèze rectangle, un carré, un losange, un parallélogramme »*.

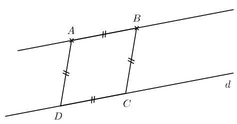
Des schémas illustrant le fait que deux côtés de ces figures auraient aussi pu porter la droite attendue sont affichés au tableau (les affiches sont fournies en annexe 2).



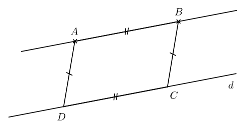
trapèze



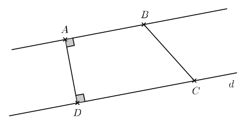
carré



losange



parallélogramme



trapèze rectangle

Phase 3 : exhiber le deuxième procédé de tracé ou de contrôle de parallèles

L'activité de la phase 1 est à nouveau proposée aux élèves, mais avec une contrainte supplémentaire : il faut, cette fois-ci, tracer une droite parallèle à une droite *d* déjà tracée et passant par un point *A* déjà placé en n'utilisant que l'équerre. Cette dernière ne doit être utilisée ni pour effectuer des mesures ni pour reporter des longueurs, mais seulement pour tracer des angles droits ou des traits droits (on peut, si nécessaire, masquer les graduations avec du papier uni sur les équerres des élèves).

On se met collectivement d'accord sur le fait que parmi les figures usuelles que l'on a identifiées dans la phase 2, seuls le rectangle et le trapèze rectangle peuvent être tracés sans mesure de longueurs. Le problème consiste donc maintenant à déterminer comment, connaissant un côté et un sommet du côté opposé, finir de tracer le rectangle ou le trapèze rectangle avec l'équerre seule.

Durant la phase de recherche, l'enseignant vient en aide aux élèves en difficultés : l'étayage peut porter sur l'identification des côtés du rectangle ou du trapèze déjà tracés dans la tâche prescrite, sur la localisation des angles droits (utilisation du codage géométrique) qui renseigne sur ce qui va pouvoir être accompli grâce à l'équerre ou encore sur les principes d'utilisation de l'instrument (localisation de l'angle droit sur l'équerre, positionnement de l'instrument, ...).

Lors de la mise en commun, le procédé de tracé est exhibé. C'est le tracé du trapèze rectangle qui est mis en avant car il est plus économique pour réaliser la tâche. L'affiche commencée lors de la séance 1 est complétée par ce nouveau procédé.

Phase 4 : exercices de réinvestissement

Individuellement, les élèves s'entraînent à utiliser ce nouveau procédé pour :

- vérifier le parallélisme de deux droites,
- tracer deux droites parallèles ayant un écartement donné.

Séance 3 : les diagonales du parallélogramme

Objectifs :

- réactiver la signification du terme « diagonale » ;
- recenser les particularités des diagonales des quadrilatères usuels ;
- exhiber un troisième procédé de contrôle et de tracé de deux droites parallèles utilisant les propriétés des diagonales d'un parallélogramme ;
- utiliser ce procédé pour vérifier que deux droites sont parallèles ;
- utiliser ce procédé pour construire ou reproduire deux droites parallèles.

Phase 1 : diagonales de quadrilatères

Les élèves reçoivent la réduction d'une affiche (elle figure en annexe 2) récapitulant les 6 types de quadrilatères usuels dont deux côtés peuvent porter deux droites parallèles identifiés dans la séance 2. Ils doivent tracer les diagonales de chaque quadrilatère et pour chacun, préciser si ses diagonales ont des propriétés particulières.

À l'issue de la mise en commun, on aboutit aux conclusions suivantes :

- les diagonales du carré sont perpendiculaires, de même longueur et sécantes en leur milieu ;
- les diagonales du rectangle sont de même longueur et sécantes en leur milieu ;
- les diagonales du parallélogramme sont sécantes en leur milieu ;
- les diagonales du losange sont perpendiculaires et sécantes en leur milieu.

On peut éventuellement compléter, à cette occasion, une affiche sur les polygones usuels.

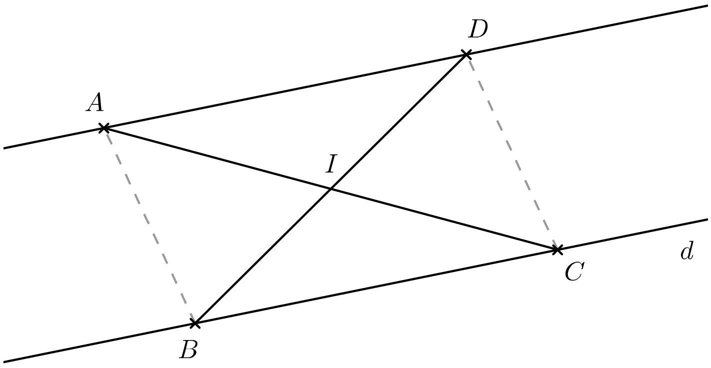
Phase 2 : proposition du troisième procédé

L'enseignant affiche au tableau une droite d et un point A extérieur à cette droite.

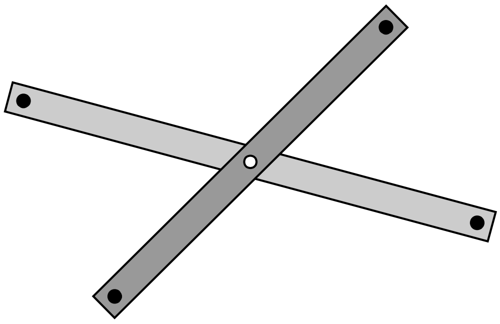
> *On veut trouver un troisième procédé, différent des deux que l'on a déjà exhibés, pour tracer une droite parallèle à d passant par A. Je vous donne des indices : on va utiliser le fait qu'un parallélogramme a des côtés opposés parallèles et pour le tracer, on va chercher à tracer ses diagonales.*

Le procédé est exhibé collectivement : on choisit un point C sur d, puis on trace le segment $[AC]$. On détermine le milieu I de $[AC]$ à l'aide du double-décimètre. On choisit un autre point B sur d, puis on trace et on prolonge le segment $[BI]$. On place le point D sur $[BI)$ de telle façon que I soit le milieu de $[BD]$ (en reportant la longueur BI depuis I). La droite (AD) ainsi obtenue est parallèle à d. Pour plus de clarté, on peut finir de tracer le parallélogramme obtenu, mais on remarque qu'en réalité, il est inutile de tracer les deux côtés manquants pour tracer une droite parallèle à la droite d passant par le point A.

À tour de rôle, quelques élèves viennent tester ce nouveau procédé au tableau.



Remarque : À la place de ce troisième procédé, qui s'appuie sur l'utilisation du double décimètre, on peut proposer aux élèves d'utiliser une « machine à diagonales ». Il s'agit d'un matériel articulé constitué de deux bandelettes de papier cartonné (type bristol). Chacune de ces bandelettes est percée en son milieu à ses extrémités. Elles sont fixées l'une à l'autre à l'aide d'une attache parisienne qui passe par les trous des milieux respectifs des deux bandelettes. Les trous situés aux extrémités servent à placer des points ou à placer l'extrémité d'une bandelette en un point.



Le troisième procédé utilisant la « machine à diagonales » fonctionne alors de la manière suivante : on place une extrémité d'une bandelette de la « machine » en A et l'autre extrémité de cette bandelette en un point C de d. On place alors une extrémité de l'autre bandelette de la « machine » en un point B de d. L'autre extrémité de cette seconde bandelette donne un point D tel que la droite (AD) est parallèle à la droite d.

Phase 3 : utilisation du nouveau procédé

Les élèves travaillent par deux. Sur une première feuille de recherche, ils doivent déterminer à l'aide du nouveau procédé les couples de droites parallèles. Sur une seconde feuille de recherche, ils doivent à plusieurs reprises tracer, à l'aide du nouveau procédé, une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné.

Lors de la mise en commun, on montre comment utiliser ce procédé en traçant des segments sécants en leur milieu.

Séance 4 : résoudre un problème utilisant les trois procédés

Objectif :

- réinvestir les trois procédés de contrôle et de tracé de deux droites parallèles exhibés lors des séances précédentes pour la résolution d'un problème ;
- utiliser le procédé le plus adéquat en fonction des instruments à disposition.

L'affiche récapitulant les trois procédés est exposée au tableau (un exemple est fourni en annexe 2 avec une première version utilisant le troisième procédé au double-décimètre et l'autre utilisant la « machine à diagonale »).

Phase 1 : dévolution du problème

> *Vous allez travailler par équipes de deux. Je vais distribuer à chaque équipe une feuille sur laquelle sont tracées trois paires de droites. Il faudra déterminer pour chaque paire si les deux droites sont parallèles ou non. Mais attention : chaque équipe ne disposera pas du même matériel. Les équipes A auront le droit de n'utiliser que l'équerre, les équipes B pourront utiliser l'équerre et le double décimètre, les équipes C ne pourront utiliser que le double-décimètre (ou que la « machine à diagonales »). Je rappelle que l'équerre ne doit servir qu'à tracer des angles droits ou à vérifier que des angles droits, on ne peut pas l'utiliser pour mesurer des longueurs. De la même façon, le double-décimètre sert seulement à tracer des traits ou à mesurer des longueurs. On ne doit pas utiliser la position des graduations pour tracer des perpendiculaires.*

Phase 2 : recherche

Les élèves, par équipes de deux, reçoivent la feuille (elle est proposée en annexe 2) sur laquelle les trois paires de droites sont représentées, ainsi que le matériel autorisé.

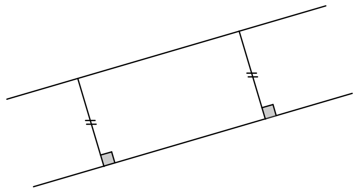
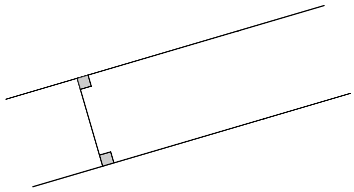
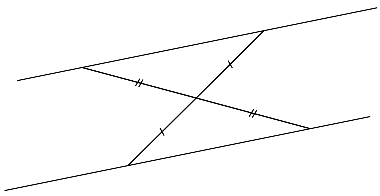
Phase 3 : mise en commun

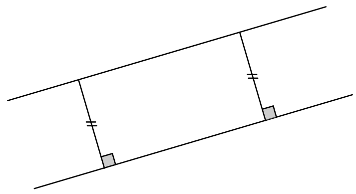
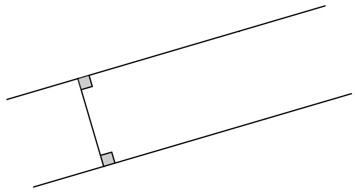
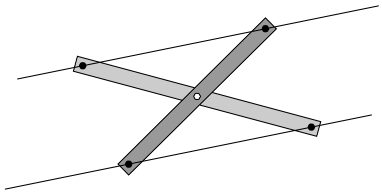
Les différentes procédures utilisées sont confrontées. Le débat doit permettre de faire le lien avec les 3 procédés exhibés lors des séances précédentes et avec les propriétés des figures et instruments géométriques. Les équipes A ne peuvent utiliser que la procédure par double-perpendicularité, les équipes C que la procédure par les diagonales du parallélogramme. Les équipes B peuvent utiliser n'importe laquelle des trois procédures étudiées (ou bien les procédures par écartement constant et double-perpendicularité dans le cas où la « machine à diagonales » a été utilisée pour toute la séance 3).

Phase 4 : reprise du problème en échangeant le matériel à disposition des équipes

Annexe 2

Affiche récapitulative des 3 procédés (séance 4) (sans et avec la « machine à diagonales »).

<table>
<tr><th>Pour vérifier que deux droites sont parallèles</th><th>Pour tracer deux droites parallèles</th></tr>
<tr><td colspan="2">On peut utiliser le fait qu’elles ont toujours le même écartement.
</td></tr>
<tr><td>On mesure l’écartement en traçant une perpendiculaire à l’une de ces droites.
On vérifie qu’il est le même ailleurs en traçant une autre perpendiculaire.</td><td>On trace la première droite.
On trace deux segments perpendiculaires à cette droite, de longueur voulue (soit la distance entre les deux droites).
On trace la seconde droite en reliant les autres extrémités des deux segments.</td></tr>
<tr><td colspan="2">On peut utiliser le fait qu’elles sont perpendiculaires à même une troisième droite.
</td></tr>
<tr><td>On trace une perpendiculaire à l’une de ces droites.
On vérifie que cette perpendiculaire coupe l’autre droite en formant un angle droit.</td><td>On trace la première droite.
On trace un segment perpendiculaire à la 1re droite.
On mesure la longueur voulue pour le segment (soit la distance entre les deux droites) sur cette perpendiculaire.
On trace une perpendiculaire à ce segment passant par l’autre extrémité : c’est la deuxième droite.</td></tr>
<tr><td colspan="2">On peut utiliser le procédé des diagonales de même milieu.
</td></tr>
<tr><td>On trace un segment qui joint un point de la première droite à un point de la deuxième.
On place le milieu du segment.
On trace un autre segment qui joint un point de la première à un point de la deuxième et qui passe par le milieu du premier segment.
On regarde si ce point est aussi le milieu du deuxième segment.</td><td>On trace la première droite.
On choisit un point C sur cette droite.
On trace un segment $[CA]$ (qui part de ce point C).
On place le milieu I de ce segment.
On choisit un deuxième point B sur la droite et on trace la demi-droite d’origine B qui passe par I.
On reporte la longueur BI et on obtient le point D.
On relie les points A et D pour tracer la seconde droite.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Pour vérifier que deux droites sont parallèles</th><th>Pour tracer deux droites parallèles</th></tr>
<tr><td colspan="2">On peut utiliser le fait qu’elles ont toujours le même écartement.
</td></tr>
<tr><td>On mesure l’écartement en traçant une perpendiculaire à l’une de ces droites.
On vérifie qu’il est le même ailleurs en traçant une autre perpendiculaire.</td><td>On trace la première droite.
On trace deux segments perpendiculaires à cette droite et de longueur voulue (soit la distance entre les deux droites).
On trace la seconde droite en reliant les autres extrémités des deux segments.</td></tr>
<tr><td colspan="2">On peut utiliser le fait qu’elles sont perpendiculaires à même une troisième droite.
</td></tr>
<tr><td>On trace une perpendiculaire à l’une de ces droites.
On vérifie que cette perpendiculaire coupe l’autre droite en formant un angle droit.</td><td>On trace la première droite.
On trace un segment perpendiculaire à la première droite.
On mesure la longueur voulue pour le segment (soit la distance entre les deux droites) sur cette perpendiculaire.
On trace une perpendiculaire à ce segment passant par l’autre extrémité : c’est la deuxième droite.</td></tr>
<tr><td colspan="2">On peut utiliser la « machine à diagonales ».
</td></tr>
<tr><td>On place une extrémité de chaque bandelette sur la première droite.
On regarde (en faisant glisser sur la première droite les deux extrémités déjà placées) si les deux autres extrémités peuvent se placer sur la seconde droite.</td><td>On trace la première droite.
On place une extrémité de chaque bandelette sur la première droite (on écarte les bandelettes au besoin en maintenant sur la première droite les deux extrémités déjà placées) comme on le souhaite.
On marque un point dans chacune des deux autres extrémités.
On relie les deux points pour tracer la seconde droite</td></tr>
</table>