FORMATION POUR LES FUTURS PROFESSEURS DES ÉCOLES : PLIAGES ET CONSTRUCTIONS À LA RÈGLE ET AU COMPAS

Françoise JORE
Équipe PESSOA, Département de Sciences Humaines et Sociales
Université Catholique de l'Ouest

Introduction

Obtenir le concours de professeur des écoles[1] et se préparer à enseigner, tel est le défi que doivent relever les étudiants de Master MEEF, Métiers de l'Enseignement, de l'Éducation et de la Formation pendant leur première année de master[2]. Proposer des activités qui donnent à ces étudiants, venant d'horizons très divers, les meilleures chances d'y parvenir, tel est celui que doivent relever leurs formateurs, en permettant notamment à tous les étudiants de s'investir dans la tâche proposée, quel que soit leur niveau de compétences, ou leur rapport aux mathématiques, souvent très hétérogènes. Nous avons tenté de construire de telles situations en géométrie plane, qui vont ici être présentées, l'une autour de pliages, l'autre autour de constructions à la règle et au compas.

Nous expliciterons tout d'abord les spécificités de la formation et du public concerné, notre questionnement et nos références théoriques. Dans un second temps, les deux activités seront détaillées et analysées. Nous montrerons comment elles permettent du point de vue mathématique de revoir bon nombre de théorèmes de géométrie plane en acte, d'entrer dans une démarche de démonstration avec des hypothèses non pas imposées par un énoncé, mais tirées de la construction, et comment elles imposent l'utilisation d'un vocabulaire géométrique précis et rigoureux. Du point de vue didactique, nous détaillerons quelques moments du dispositif de formation qui permettent par exemple de travailler l'intérêt de la résolution de problèmes, l'aspect outil d'un concept mathématique, les paradigmes géométriques, l'utilisation du vocabulaire géométrique dans des situations fonctionnelles ou encore le concept de définition.

[1] Dans ce texte, chaque fois que nous parlerons « du » concours, il s'agit du CRPE, Concours de Recrutement des Professeurs des Ecoles, présenté par les étudiants à la fin de la première année du master MEEF.

[2] Cette première année de Master MEEF sera appelée « M1 » dans la suite de ce texte

Le contexte de la formation

Plusieurs aspects spécifiques du public d'étudiants concernés et de la formation dans laquelle s'inscrivent les séances développées ici méritent d'être explicités.

L'épreuve de mathématiques du CRPE et la formation professionnelle

Le concours de professeur des écoles[3] met en place une épreuve qui doit faire appel à des compétences disciplinaires et didactiques. Dans le problème de la partie 1 de l'épreuve, les étudiants peuvent être amenés à effectuer des démonstrations de géométrie plane, telles qu'on peut les faire au collège, comme en témoignent les sujets de ces dernières années. Cela nécessite entre autres de maîtriser un certain nombre d'axiomes et de théorèmes de géométrie euclidienne. Les étudiants les ont tous étudiés au collège mais celui-ci est bien loin pour eux. Nous observons que ces théorèmes sont peu mobilisables, voire parfois non disponibles, au sens de Robert (1995), pour les M1. Il est donc utile de proposer des activités qui permettent de les (re-)découvrir. Rédiger une démonstration demande en outre de maîtriser le vocabulaire géométrique. Celui-ci est très souvent approximatif pour les étudiants et un important travail doit être effectué sur cet aspect. Dans le cadre du concours, les candidats peuvent être également amenés à effectuer des constructions à la règle et au compas ou à rédiger des programmes de construction. Ces aspects devront donc également être intégrés à la préparation au concours. Les activités que nous allons proposer doivent donc permettre de parcourir au maximum toutes ces compétences de géométrie du collège.

La partie 3 de l'épreuve propose quant à elle un questionnement à partir de documents pédagogiques divers, extraits de manuels et productions d'élèves en particulier, qui vont également nécessiter des compétences mathématiques. Une partie des connaissances et des compétences nécessaires dans le cadre de la formation professionnelle se légitime de ce fait simultanément pour la réussite au concours. Ainsi, *« Réaliser, compléter et rédiger un programme de construction[4] »* fait partie des attendus de fin de cycle 3, et doit être par conséquent maîtrisé par les futurs enseignants. De manière plus générale, les nouveaux programmes de mathématiques mettent l'accent sur la communication, écrite et orale. Cette communication nécessite la maîtrise d'un langage : il s'agit pour les élèves d'*« utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation[5] »*. De leur côté, *« les professeurs veillent à utiliser un langage précis et adapté pour décrire les actions et les gestes réalisés par les élèves (pliages, traces à main levée...)[6] »*. Chercher et raisonner sont également des compétences toujours au cœur des mathématiques, et clairement mises en avant dans les nouveaux programmes. Il est indispensable de les développer chez les futurs enseignants avant qu'ils puissent envisager des scénarios de séances qui auront ce même objectif.

Dans le même esprit, que ce soit pour réussir la troisième partie du concours ou pour être performant du point de vue professionnel, les compétences pédagogiques et didactiques des candidats vont être sollicitées en parallèle des compétences disciplinaires développées précédemment. Elles doivent donc être développées pendant la formation de master et notamment dès première année, le concours se situant à la fin de cette première année. Il

---

[3] Textes définissant les épreuves : http://www.education.gouv.fr/pid97/siac1.html

[4] Extrait des nouveaux programmes de cycle 3, BO spécial n° 11 du 26 novembre 2015, pp. 197 à 213.

[5] *Ibid*.

[6] *Ibid*.

convient cependant de rester modeste. L'idéal serait certes que les étudiants s'entraînent à construire des séances de mathématiques dès cette première année de formation. Les questions du concours n'en demandent pas tant et le temps de formation est limité. Il s'agit donc de profiter au mieux du faible temps dont le formateur dispose pour développer au mieux ces compétences, ce qui est l'objectif des situations proposées dans la suite.

La population des étudiants de Master

Les étudiants auxquels nous nous intéressons sont donc ceux de première année de master MEEF, qui se destinent à enseigner dans le premier degré. Ils ont pour la plupart un baccalauréat et une licence, rarement scientifiques. Par exemple, sur les 52 étudiants de M1 MEEF premier degré de l'IND à Angers en 2016-2017,

- 15 seulement ont un bac S (scientifique), 17 ont un bac ES (économique et social), 16 un bac L (littéraire) et 5 un autre bac (1 bac pro, 3 bacs ST2S, 1 bac STG).
- 3 ont une licence de biologie, 2 ont une licence de maths, les autres n'ont pas une licence scientifique.

Ils sont souvent en difficulté en mathématiques, à la fois sur les notions enseignées, mais aussi pour certains sur le plan affectif ou émotionnel. Ces derniers ont pu être en difficulté en mathématiques au collège et en gardent un rapport à cette discipline très négatif. Il s'agit donc de leur proposer des activités différentes de celles qui les ont fait « souffrir » au collège pour les réconcilier avec les mathématiques et leur faire prendre conscience qu'eux aussi sont capables de résoudre des problèmes de mathématiques et de progresser dans ce domaine. Parallèlement, certains étudiants ont au contraire un bagage mathématique sérieux et savent résoudre sans difficultés les problèmes de collège. On peut craindre pour eux un certain désintérêt pour les séances de mathématiques. Il faut donc leur proposer des situations nouvelles, qui leur permettent aussi de réfléchir, qui leur donnent envie de s'investir. La situation sur les pliages doit permettre de répondre à cette contrainte : engager tout autant les étudiants les plus éloignés des mathématiques que ceux qui ont un bagage scientifique important.

Une certaine conception des mathématiques et de leur enseignement : références théoriques

Quelques concepts clés de didactique, et une certaine conception des mathématiques et de leur enseignement, sous-tendent ce travail. Nous allons ici expliciter ces références théoriques sur lesquelles nous nous appuyons en formation.

Concepts d'outil et d'objet

Nous utilisons la définition de Douady (1992) :

> *Ainsi, nous disons qu'un concept est outil lorsque nous focalisons notre intérêt sur l'usage qui en est fait pour résoudre un problème. Un outil est engagé par quelqu'un, dans un contexte problématique, à un moment donné.[...]*
>
> *Par objet, nous entendons l'objet culturel ayant sa place dans un édifice plus large qui est le savoir des mathématiciens, à un moment donné, reconnu socialement. L'objet est mathématiquement défini, indépendamment de ses usages. (Douady, 1992, p. 134).*

L'objectif des situations présentées aux étudiants est que les propriétés mathématiques soient tout d'abord investies par les étudiants sous leur aspect « outil ». Il ne s'agit pas de faire réciter les propriétés mais de faire en sorte que les étudiants soient contraints par le milieu à les utiliser pour accomplir les tâches qui leur sont proposées. Nous pensons en effet qu'en faisant fonctionner les différents théorèmes pour effectuer les constructions ou pliages demandés, qu'en ayant vu comment et pour quoi on pouvait les utiliser, les étudiants se les approprieront de façon plus efficace.

De même, l'apprentissage du vocabulaire géométrique, par exemple, est développé en l'utilisant dans des situations fonctionnelles, ici celles de rédaction de programmes de construction. Il s'agit de faire en sorte que ces situations contraignent les étudiants à utiliser un vocabulaire spécifique, précis, exact. Les compétences langagières répondent ici à un besoin de communication.

Connaissances disponibles et mobilisables

Robert (1995) définit connaissances mobilisables et connaissances disponibles.

> *Nous distinguons pour les élèves :*
>
> - *le fait d'utiliser des connaissances indiquées*
> - *le fait de penser à utiliser des connaissances alors que rien n'est indiqué à leur propos.*
>
> *Dans le premier cas, nous dirons que les élèves savent mobiliser leurs connaissances (par exemple employer un théorème ou une technique clairement signalés). Nous parlerons de connaissances mobilisables. Dans le second cas, nous parlerons de connaissances disponibles. Cela ne peut être le cas que si les documents fournis aux élèves ne sont pas extraits d'un chapitre du manuel. (Robert, 1995, p. 12).*

De nombreux théorèmes de géométrie plane sont effectivement mobilisables par nos étudiants. Ils les ont plus ou moins bien mémorisés et la plupart d'entre eux sont capables de les utiliser si on le leur demande. Quand il s'agit de les choisir de leur propre initiative pour résoudre un problème, c'est beaucoup plus difficile. Or, avoir des compétences en mathématiques, c'est disposer de connaissances et être capable de les utiliser de manière autonome, sans indication particulière. Autrement dit, avoir des compétences en mathématiques, c'est selon nous avoir des connaissances disponibles, stockées dans la mémoire à long terme, et disposer de moyens pour repérer celles qui sont susceptibles d'être pertinentes dans une situation donnée. Nous essayons donc, dans la mesure du possible, de limiter dans les consignes les indices qui donnent aux étudiants une piste sur les propriétés qui peuvent être utilisées. Souvent, plusieurs procédures peuvent être utilisées, qui mettent en œuvre des propriétés différentes. Dans le cadre de leur formation didactique, cet aspect peut aussi être explicité avec les étudiants. Nous le faisons en général à la fin de la séance de pliages.

Stratégies d'homologie

Dans le cadre du cours de didactique de la géométrie plane à l'école élémentaire, nous développons l'idée des textes officiels : faire travailler les élèves par problèmes.

> *La résolution de problèmes constitue le critère principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques, mais elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens. (BO spécial n° 11 du 26 novembre 2015, p. 197).*

C'est une idée habituelle dans le champ numérique, mais les étudiants sont souvent peu convaincus de la possibilité de le faire aussi dans le champ géométrique. Il s'agit donc, dans les séances de mathématiques avec les étudiants, de les mettre eux-mêmes dans des activités de résolution de problèmes, y compris dans les séances de géométrie plane. C'est l'occasion de leur faire prendre conscience que résoudre un problème, ce n'est pas une perte de temps mais un moyen efficace pour construire des compétences. Cette stratégie de formation relève, au moins en partie, des stratégies d'homologie :

> *Par les stratégies d'homologie, le formateur cherche à transmettre sa propre conception de l'enseignement des mathématiques, en la mettant en œuvre dans son enseignement, [...] ; il construit des séances à visée mathématique ou didactique ; il attend que les étudiants utilisent dans leurs classes des mises en œuvre proches de celles des séances qu'ils ont vécues comme élèves. (Houdement & Peltier, 2002, p. 78).*

Mais cette prise de conscience ne se fait pas automatiquement. En parallèle d'une institutionnalisation des connaissances mathématiques exploitées dans la tâche proposée, une explicitation des choix didactiques effectués dans la mise en œuvre de l'activité doit également être faite. Nous détaillerons dans la suite un moment du scénario de formation dont l'objectif est cette explicitation.

Notons que l'aspect « homologie » qui est envisagé ici vise à faire partager une certaine conception de l'enseignement des mathématiques, en particulier l'intérêt de la mise en situation de résolution de problème, mais les contenus proposés ne sont pas choisis pour leur transférabilité aux élèves de l'école élémentaire. L'objectif est donc seulement de convaincre de la pertinence de ce mode de travail. Il ne permet pas aux étudiants de construire eux-mêmes des séances sur ce modèle, ce qui nécessite un travail explicite par ailleurs.

Dans la maquette de notre master, la construction de séances intervient en première année dans l'unité d'enseignement « Mise en situation professionnelle. Accompagnement des situations de formation et d'enseignement », qui est une unité pluridisciplinaire avec un faible volume horaire (12 *h*), et surtout en deuxième année dans une unité d'enseignement de « Pratiques professionnelles. Construire, mettre en œuvre et analyser des situations d'enseignement », plus importante avec 36 *h* de formation pluridisciplinaire et des heures disciplinaires, dont 24 *h* de mathématiques.

Les paradigmes géométriques

Il serait un peu long ici de détailler les différents types de géométrie que Houdement et Kuzniak (2006), puis Parzysz (2002), ont développés (voir aussi Jore, 2008 pour plus de détails). Nous nous contenterons d'indiquer que dans la géométrie spatio-graphique (notée G1), les objets géométriques sur lesquels on travaille sont physiques, les validations utilisées sont perceptives, qu'elles soient ou non instrumentées, le dessin (ou ici le pliage) effectué est l'objet d'étude. C'est le paradigme dans lequel l'élève se situe le plus souvent à l'école élémentaire. Dans la géométrie proto-axiomatique (notée G2), les objets sont théoriques, définis par un texte et/ou un codage sur un dessin à main levée, les validations relèvent du raisonnement hypothético-déductif et le dessin (ou le pliage) effectué n'est qu'un représentant de l'objet mathématique auquel on s'intéresse. C'est le paradigme dans lequel on attend le plus souvent que l'élève se situe au collège.

Les activités proposées doivent permettre petit à petit aux étudiants de prendre conscience de ces deux paradigmes et de les aider à se situer dans celui qui est pertinent en fonction de la tâche qui leur est donnée. En effet, à l'école, l'élève se situe majoritairement dans G1, et les analyses de productions d'élèves ou de pages de manuels de la partie 3 des épreuves du concours par conséquent également. Mais les exercices d'évaluation des compétences notionnelles dans les parties 1 et 2 de ces sujets demandent le plus souvent aux étudiants de se situer dans G2 pour effectuer les démonstrations, tout en utilisant G1 pour, entre autres, effectuer les conjectures ou les tracés de figure. Dans une même épreuve de concours, les étudiants devront ainsi souvent se situer alternativement dans l'un et l'autre de ces paradigmes, sans que la consigne ne leur soit explicitement donnée, tout étant implicite à ce sujet. Il est donc utile que les étudiants sachent repérer ces paradigmes et celui dans lequel on attend que les élèves ou les étudiants se situent dans les divers problèmes qui leur sont proposés. Nous présenterons dans la suite comment cette explicitation des paradigmes est mise en œuvre.

Les activités proposées : pliages

Notre défi est donc de trouver des problèmes qui permettent simultanément de développer plusieurs compétences mathématiques, dans lesquels les théorèmes de géométrie plane soient des outils pour résoudre les problèmes, qui permettent à tous les étudiants de s'investir avec plaisir et intérêt dans la tâche et donc en particulier auxquels les étudiants ne sont pas habitués. Si, en plus, les étudiants peuvent manipuler, cela facilitera l'accès à ceux qui sont le plus en difficulté. L'idée est ainsi venue d'utiliser une simple feuille de papier et de faire exécuter des pliages aux étudiants ; mais, bien sûr, pas n'importe quels pliages, et avec quelques contraintes...

Utiliser les pliages pour développer des capacités et des connaissances en géométrie n'est pas nouveau. Boule (2001) propose des activités à mettre en œuvre à l'école élémentaire. Ces idées sont reprises ici et adaptées à la formation des étudiants de M1, en variant parfois les contraintes, comme nous le préciserons dans la suite.

La première consigne proposée est : « Prendre une feuille de papier. Par pliage, sans utiliser les habituels instruments de géométrie, obtenir un triangle rectangle, puis un triangle isocèle ». Dans la suite de la séance, d'autres pliages vont être demandés : triangle équilatéral, rectangle, carré, parallélogramme, ...

Les objectifs de l'activité « pliages »

Les objectifs de ces pliages sont multiples :

- permettre aux M1 de revoir définitions et propriétés de quelques objets du plan (triangles particuliers, quadrilatères, ...) ;
- proposer une tâche nouvelle, qui n'est pas « routinisée », et qui donc oblige les étudiants à réfléchir ; la solution du problème ne consiste pas en l'application d'une technique rodée : ils n'ont en général jamais rencontré cette tâche ;
- faire en sorte que les propriétés des objets soient un outil incontournable pour accomplir la tâche proposée ; il ne s'agit pas seulement d'énoncer des propriétés, mais de les utiliser plus ou moins explicitement comme outil pour effectuer la construction demandée ;
- donner l'occasion aux étudiants en difficulté en mathématiques de s'investir dans une activité de démonstration sous une forme nouvelle qui ne les rebute pas ;
- mettre les étudiants scientifiques dans une situation qui les déstabilise un peu, qui ne leur permet pas de reproduire trop rapidement un discours par ailleurs bien assimilé, qui les oblige à réfléchir ; il faut qu'eux aussi aient quelque chose à apprendre, une compétence à développer.

Rappelons que, du point de vue de l'homologie, l'objectif est de faire vivre — et d'en faire prendre conscience aux étudiants — une certaine manière de faire des mathématiques, ce qui nous paraît déjà fort utile. Le transfert sur de possibles séances avec les élèves n'est pas envisagé dans ces séances, d'autant plus qu'elles débutent le chapitre de géométrie plane, placé dans notre dispositif en début de M1. Cette deuxième activité pourrait être un autre travail intéressant avec les étudiants, un peu plus tard dans leur formation.

Les deux premiers pliages proposés, triangle rectangle puis triangle isocèle, ne posent pas de difficultés autres que celle de connaître les définitions correspondantes. Ils ont essentiellement pour but de permettre aux étudiants de s'approprier la consigne et le fonctionnement de ces pliages. Cette étape est souvent effectuée directement avec l'ensemble du groupe classe. C'est l'occasion de préciser qu'on ne se sert pas des bords de la feuille, qu'on a le droit de repérer un pli ou un point avec un crayon, *etc*.

Construction d'un triangle équilatéral

Ces premiers pliages réalisés assez rapidement par tous les étudiants, il leur est ensuite demandé de construire de la même manière un triangle équilatéral. Un élément complète alors la consigne : « Préciser les définitions ou propriétés utilisées qui permettent de justifier la construction ». C'est l'occasion de commencer à travailler sur la démonstration. Cette demande de justification par des définitions ou propriétés n’a pas été faite dans les deux premiers pliages pour deux raisons.

La première est qu’il paraissait nécessaire de commencer par une tâche centrée sur le pliage pour que les étudiants puissent s’approprier ce mode de construction. La seconde est que ces deux pliages sont tellement « naturels », comme plier en quatre une feuille pour obtenir un angle droit que leur justification leur apparaîtrait probablement inutile. Les enseignants de collège savent bien par exemple que faire démontrer aux élèves une propriété évidente n’est pas un moyen efficace de les faire entrer dans la démonstration. On pourrait cependant attirer l’attention des étudiants sur le fait que ce pliage « naturel » d’une feuille en quatre pour obtenir quatre angles droits revient en fait à mettre en acte la définition 10 extraite du livre des Éléments d’Euclide : *« lorsqu’une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux, chacun des angles égaux est droit »*. Ici en effet, chacun des pliages définit une droite. Ces deux droites définissent 4 angles. Le second pliage est en outre effectué pour que deux angles consécutifs soient égaux. Ce sont donc ce que l’on appelle des angles droits.

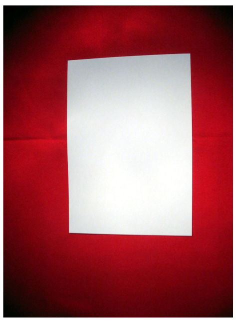
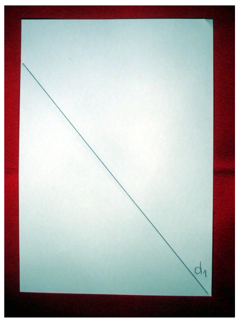
La construction d’un triangle équilatéral va quant à elle poser aux étudiants des difficultés, qui vont justifier d’expliciter les propriétés utilisées.

Une démarche possible pour obtenir un triangle équilatéral est proposée ci-après. Cette construction diffère légèrement de celle proposée dans Boule (2001), en particulier parce qu’elle n’utilise par les bords de la feuille. La propriété sous-jacente à la construction est que la médiatrice de [*AB*] (droite perpendiculaire au côté [*AB*] et passant par son milieu) doit être une hauteur (le point *C*, sommet du triangle, est positionné sur la médiatrice qui devient hauteur), tandis que Boule travaille sur la médiane.

Dans la construction proposée, la propriété mise en acte est :

$$\left.\begin{array}{r} AB=AC \\ C \text{ est sur la médiatrice de } [AB] \end{array}\right\} \Rightarrow ABC \text{ est un triangle équilatéral}$$

Cette propriété est ainsi un outil pour accomplir la tâche. Après avoir parfois tâtonné longtemps, les étudiants s’aperçoivent qu’ils doivent réfléchir avant d’exécuter le pliage, la démarche la plus efficace étant de penser aux différentes propriétés d’un triangle équilatéral pour repérer celle qui pourrait permettre d’effectuer le pliage. Dans d’autres cas, les étudiants, à force de tâtonnement et de pliages divers, obtiennent un triangle qui leur semble équilatéral.

		
Prendre une feuille.	Plier de façon quelconque (pliage 1).	On obtient une droite d_1 .

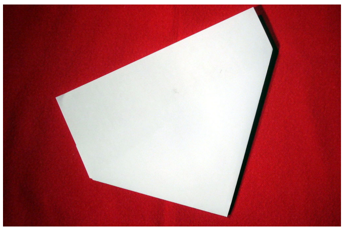
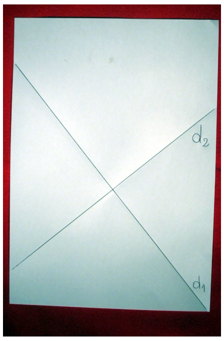
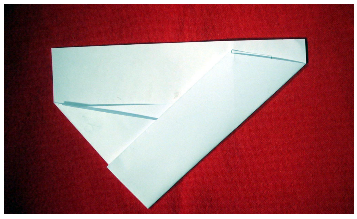
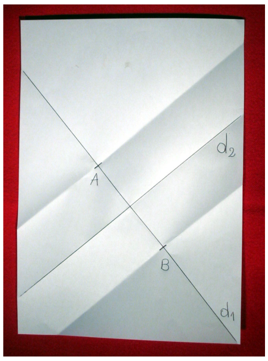
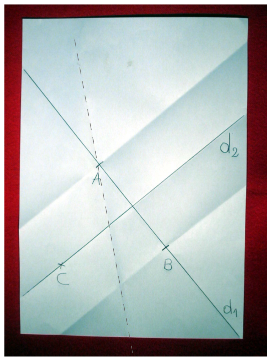
<table>
<tr>
<td>
Plier à nouveau
afin d'obtenir
une perpendiculaire à d_1
(pliage 2).</td>
<td>
On peut déplier pour marquer
les droites d_1 et d_2 : $d_2 \perp d_1$.
Revenir ensuite au pliage 2.</td>
<td>
Replier une partie de la demi-droite d_1 sur elle-même
(pliage 3).
On détermine ainsi deux
nouvelles droites (plis)
perpendiculaires à d_2
qui coupent d_1 en A et B
équidistants de d_2 .</td>
</tr>
<tr>
<td>
Déplier et marquer A et B ;
d_2 est la médiatrice de [AB].</td>
<td>
Plier de sorte que le pli passe
par A et que B vienne sur d_2
(pliage 4).</td>
<td>
La position de B sur d_1
détermine ainsi un point C.
ABC est équilatéral.</td>
</tr>
</table>

Figure 1 : Pliages pour obtenir un triangle équilatéral.

Commence alors le travail d'introduction à la démonstration : il faut repérer les pliages effectués, les caractéristiques que comporte alors la figure par construction (hypothèses de la démonstration), pour en déduire par une propriété (théorème) qu'il faut pouvoir énoncer, s'il s'agit bien ou non d'un triangle équilatéral (conclusion). Cette partie est plus facile pour ceux qui ont réfléchi en amont de la construction et qui savent quelle propriété ils ont utilisée. Pour ceux qui ont obtenu un triangle équilatéral un peu par hasard, le repérage des caractéristiques de leur construction et des propriétés utilisées est parfois délicat mais néanmoins indispensable : il s'agit de rendre explicites les outils utilisés implicitement, pour pouvoir effectuer la démonstration.

Une autre procédure est souvent proposée par quelques étudiants :

> *Plier la feuille en deux. On obtient un angle plat. Partager cet angle plat en trois angles superposables. Ces angles de sommet O mesurent alors 60°. Plier à nouveau pour obtenir la bissectrice d'un des angles obtenu et placer alors deux points A et B équidistants de O sur les côtés de l'angle.*

Le triangle AOB est isocèle avec un angle de 60°, il est donc équilatéral. Cette fois, une autre propriété est utilisée : un triangle isocèle avec un angle de 60° est un triangle équilatéral, propriété tout à fait pertinente à faire expliciter aux étudiants. En effet, ils savent qu'un triangle équilatéral est un triangle qui a trois côtés de même longueur ou encore qui a trois angles de même mesure. Il s'agit ici de mélanger les propriétés de longueur (le triangle est isocèle parce que deux côtés sont de même longueur) et d'angle (un angle mesure 60°), ce qui est inhabituel pour eux. La question peut se poser par ailleurs de savoir si on doit accepter le pliage en 3 de l'angle plat pour obtenir un angle de 60°. Il n'est pas possible de partager simplement un angle quelconque en 3 à la règle et au compas, ce qui revient à dire qu'on ne peut le faire avec seulement des intersections de cercles et de droites. Mais il n'y a pas de raison de transférer les contraintes des constructions à la règle et au compas sur les pliages. Le pliage d'un angle plat en trois angles superposables est certes un peu plus technique que le pliage en deux, mais il peut néanmoins être réalisé avec une assez bonne précision. De ce fait, on obtient un pliage qui permet de poser l'hypothèse que les trois angles sont égaux, comme on a pu poser que les quatre angles sont égaux donc droits quand on a plié la feuille en quatre. Il est d'ailleurs intéressant de noter que les pliages permettent d'autres constructions, et donc d'autres démonstrations, que la règle et le compas.

D'autres pliages

D'autres pliages sont ensuite proposés, en fonction du temps disponible : obtenir un triangle isocèle et rectangle, des angles de 90°, 45°, 60°, 30°, 15°, 75°, la médiatrice d'un segment, la bissectrice d'un angle, la hauteur d'un triangle, un carré, un losange, un parallélogramme, un cerf-volant, un hexagone, deux droites parallèles, une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné, *etc*. Chacune de ces constructions permet de travailler un aspect particulier. De nombreuses propriétés sont ainsi revues, à chaque fois comme outil pour effectuer le pliage demandé. Nous ne les détaillerons pas ici, le lecteur les retrouvera aisément. Nous l'invitons pour cela à effectuer ces pliages en relevant à chaque fois les propriétés mathématiques utilisées. Mettons seulement l'accent sur quelques-uns qui présentent des intérêts particuliers.

La construction d'un rectangle permet de mettre en évidence qu'il suffit d'effectuer successivement trois perpendiculaires. On peut alors conjecturer qu'un quadrilatère avec trois angles droits est un rectangle. La propriété peut alors être ou non démontrée. C'est souvent l'occasion d'un pas de côté didactique pour travailler avec les étudiants le concept de définition et de propriétés. Pour eux, un rectangle est bien souvent « un quadrilatère avec quatre angles droits et deux paires de côtés opposés de même longueur ». Constatant qu'il suffit de vérifier que trois angles sont droits pour affirmer qu'un quadrilatère est un rectangle, ils se rendent compte qu'à l'école, il ne sert à rien de mesurer les longueurs des côtés d'un quadrilatère pour dire qu'il est un rectangle. Cela remet souvent en cause ce qu'ils ont pu voir ou faire sur le terrain. On peut alors d'une part expliciter une définition et les propriétés du rectangle que l'on pourrait formuler avec des enfants, d'autre part généraliser sur le fait qu'une définition n'est pas une liste de toutes les propriétés qu'il faut connaître à un niveau donné.

La construction du carré fait souvent apparaître plusieurs procédures, qui reposent sur des propriétés caractéristiques différentes du carré. Il est alors intéressant de les expliciter : « quadrilatère avec trois angles droits et deux côtés consécutifs de même longueur », « quadrilatère avec deux angles droits successifs et trois côtés de même longueur », ... Ce travail permet simultanément :

- de continuer le travail sur définition et propriétés caractéristiques entamé précédemment,
- d'enrichir les possibilités de démonstration dans le cadre des parties 1 et 2 de l'épreuve du concours. En effet, il est rare que, pour démontrer par exemple qu'un quadrilatère est un

carré, on dispose des informations permettant d'affirmer que ses quatre angles sont droits et ses quatre côtés de même longueur.

• d'enrichir l'analyse de travaux d'élèves ultérieure par la possibilité de repérer précisément les propriétés caractéristiques implicitement utilisées par les élèves.

Construction d'un parallélogramme

Le rectangle a permis d'obtenir des droites parallèles. Le parallélogramme va amener à réinvestir cette construction. Une fois que deux parallèles vont être construites, il va falloir choisir arbitrairement une autre direction pour les autres côtés, et appliquer de nouveau la procédure qui permet d'obtenir des parallèles. Cela semble simple mais en réalité, il y a là une difficulté pour bon nombre d'étudiants. En effet, à ce moment-là, il y a de multiples plis sur la feuille et il faut vraiment s'organiser et avoir en tête la propriété que l'on veut utiliser pour réussir à effectuer la construction. On peut la détailler ainsi (les images ci-après correspondent à chacune des étapes numérotées de 1 à 8) :

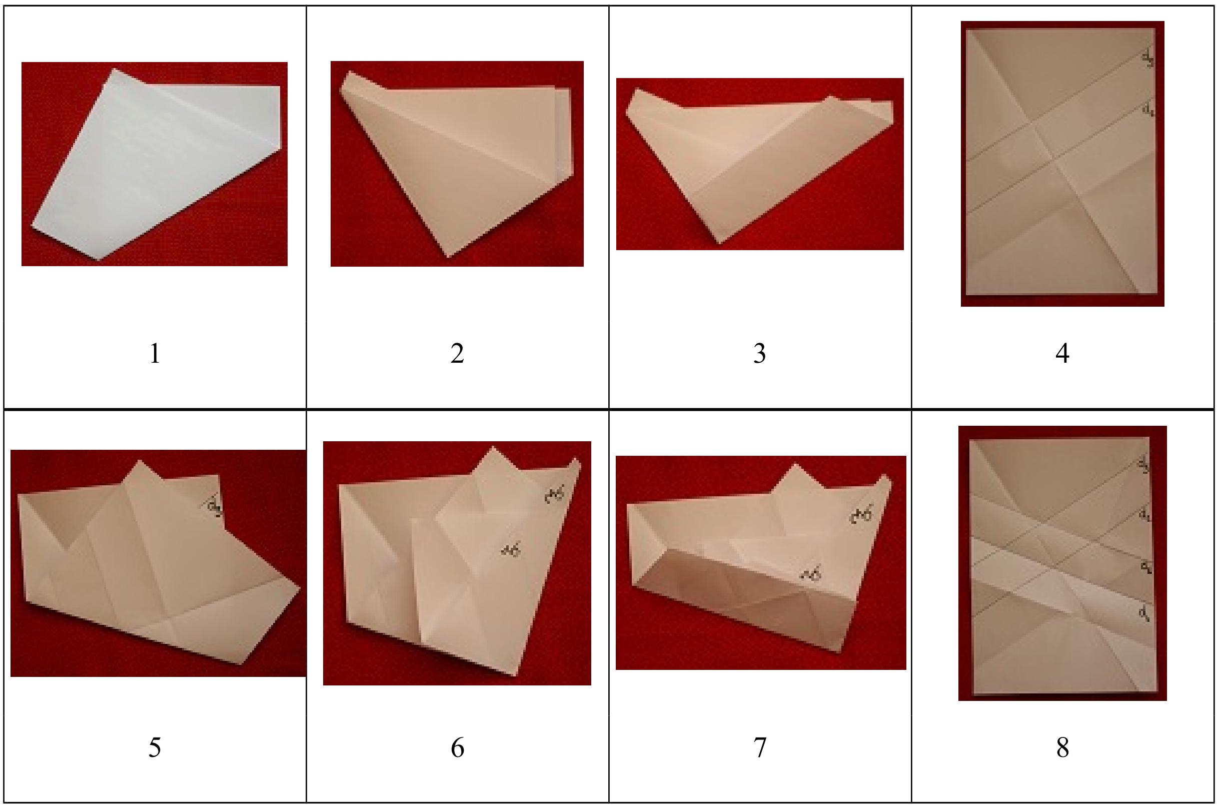


Figure 2 : Pliages pour obtenir un parallélogramme.

1. plier pour obtenir une première droite d_1 ;
2. plier pour obtenir une droite d_2 perpendiculaire à d_1 ;
3. plier pour obtenir une droite d_3 perpendiculaire à d_2 et donc parallèle à d_1 ;
4. déplier le tout et remettre la feuille à plat, marquer les droites d_1 et d_3 ;
5. plier arbitrairement[7] pour obtenir une autre droite d_4 ;
6. plier pour obtenir une droite d_5 perpendiculaire à d_4 ;
7. plier pour obtenir une droite d_6 perpendiculaire à d_5 et donc parallèle à d_4 ;

[7] Cette étape, qui est élémentaire techniquement, est cependant difficile par le fait qu'on a une infinité de choix possibles à ce moment-là, ce qui est très déstabilisant pour les étudiants. Ils hésitent à prendre une telle initiative.

8. déplier le tout et marquer les droites d_4 et d_6 qui délimitent avec d_1 et d_3 un parallélogramme. Il faut pour cela que la figure finale ait été un peu anticipée pour que les intersections soient effectivement présentes dans la feuille de papier (qui n'est qu'une partie de plan), ce qui constitue une autre difficulté.

Les étudiants doivent simultanément réfléchir à la propriété utilisée (plier pour obtenir la perpendiculaire d'une perpendiculaire donne une parallèle), oublier certains plis intermédiaires de perpendiculaires pour ne s'intéresser qu'aux parallèles finalement obtenues, anticiper les pliages pour que la figure apparaisse au bon endroit. Tout cela rend la tâche assez complexe pour bon nombre d'étudiants.

En outre, c'est l'occasion de faire prendre conscience aux étudiants des paradigmes G1 et G2 évoqués dans les références théoriques. Certains, en effet, au lieu des pliages précédemment décrits, font deux pliages successifs pour obtenir des droites parallèles sans autre justification que « je plie pour obtenir deux droites parallèles », le parallélisme étant obtenu « à vue », de manière uniquement perceptive. À partir de la simple question « Comment peut-on faire pour être sûr qu'elles soient parallèles ? », l'étudiant peut faire la différence entre les deux procédures de validation. Dans le second cas, rien de permet de justifier que les droites sont parallèles, le parallélisme est obtenu par la seule perception visuelle (on se situe alors clairement dans G1). Dans le premier cas, on a utilisé des propriétés qui permettent d'affirmer que les droites sont parallèles, par exemple deux perpendiculaires à une même droite sont parallèles (on travaille donc plutôt dans G2). On peut considérer dans ce cas que le pliage n'est pas l'objet sur lequel on travaille, c'est un représentant d'un objet théorique, défini par les propriétés que l'on a matérialisées par les pliages (angles droits successifs notamment). C'est sur cet objet théorique que se concentre le travail. Par ailleurs, l'amélioration de la précision avec la procédure de pliages successifs de perpendiculaires (relevant de G2) n'est pas significative par rapport à celle uniquement perceptive (relevant de G1) : en effet, en effectuant le pliage « à vue », on obtient des droites tout aussi parallèles qu'après des pliages de perpendiculaires de perpendiculaires, dans la mesure où les pliages qui permettent d'obtenir des perpendiculaires nécessitent de travailler sur plusieurs épaisseurs de papier — la feuille doit être pliée en quatre, ce qui introduit des imprécisions dans les angles droits — et qu'il faut plusieurs pliages d'angles droits — ce qui multiplie les imprécisions — . Le formateur peut mettre en évidence que ce n'est pas l'objet physique obtenu qui nous intéresse mais l'objet théorique matérialisé par le pliage. La précision de ce pliage importe peu, c'est le fait que ce pliage respecte les propriétés qui définissent l'objet théorique qui en fait un représentant de cet objet théorique (c'est là une condition fondamentale du travail dans G2).

Nous avons, dans le paragraphe précédent, explicité pour le lecteur à quels moments le travail se situe dans G1, à quels moments il se situe dans G2. Avec les étudiants, ces deux expressions n'ont pas été utilisées. Deux aspects ont été mis en évidence : la différence de nature des validations effectuées (perceptives *versus* déductives) et du statut du pliage manipulé (objet de travail *versus* représentant d'un objet théorique). Un nouveau pas de côté didactique peut alors être fait à ce moment-là pour présenter cet outil d'analyse des situations géométriques et de leur résolution que constituent les paradigmes G1 - G2.

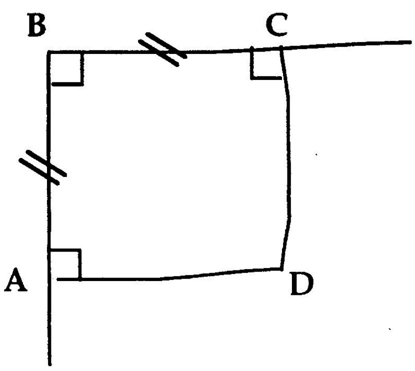


Figure 3 : *ABCD* est-il un carré ?

Il est introduit par la question « *ABCD* est-il un carré ? », posée au sujet de la figure 3.

Un débat s'engage entre les étudiants qui se répartissent environ avec une moitié pour la réponse oui, avec des arguments dans G1, l'autre moitié[8] avec la réponse non et des arguments dans G2. Ce débat permet de faire émerger la différence de nature des validations proposées (perceptives versus déductives). La différence de nature des objets géométriques sur lesquels on travaille, comme la différence de statut du dessin, doivent être explicitées par le formateur.

Nous avons jusqu'à présent utilisé le tableau 1 ci-après, extrait de Jore (2006) :

	Géométrie spatio-graphique G1	**Géométrie proto-axiomatique G2**
Statut du dessin	Objet géométrique étudié	Représentant d'un objet géométrique théorique
Nature de l'objet géométrique étudié	Dessin (réalité spatio-graphique)	Objet géométrique théorique défini par une formulation discursive
Type de validation	Essentiellement perceptif	Uniquement hypothético-déductif
Outils de validation	Règle (graduée ou non), équerre, compas, papier calque, papier quadrillé, ...	Règles de la logique et théorèmes de la géométrie euclidienne

Tableau 1 : Caractérisations de G1 et G2.

Les textes d'accompagnement des nouveaux programmes de cycle 4 nous invitent à utiliser dorénavant le tableau 2 suivant, extrait de Houdement et Rouquès (2016) :

	Géométrie dessinée	**Géométrie abstraite**
Comparaison de mesures de longueurs ou d'angles (avec compas, gabarits, ...) **mesurage (avec règle graduée, rapporteur, ...)**	Licite pour obtenir des réponses, des résultats	Illicite pour obtenir des résultats et des réponses, licite pour obtenir des conjectures
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Outil pour chercher, support du raisonnement
Preuve	par observation, par expérience avec instruments et par déductions partielles	Par déduction logique de définitions, propriétés, théorèmes acceptés comme vrais, résultats démontrés

Tableau 2 : Caractérisation des géométries dessinée et abstraite.

Des pas de côté didactiques en guise de bilan

Des « pas de côté » d'ordre didactique ont été faits au fur et à mesure en fonction des situations traitées : le point sur le concept de définition ou les paradigmes géométriques par exemple. La fin de séance peut être l'occasion, outre une institutionnalisation de quelques propriétés géométriques que nous ne détaillerons pas, de faire réfléchir également sur d'autres aspects didactiques. Nous avons fait le choix de faire vivre aux étudiants une situation de résolution de

[8] Une analyse réalisée lors de ma thèse (Jore, 2 006), portant sur plus de 700 questionnaires, avait montré que 51 % des étudiants répondaient oui à cette question, 43 % répondaient non, 4 % répondaient oui et non.

problème pour leur faire prendre conscience de l'intérêt de ce type de démarche. Cette prise de conscience mérite d'être stimulée par quelques échanges. Nous leur demandons souvent à la fin de cette séance : « Avez-vous l'impression d'avoir travaillé les mathématiques aujourd'hui ? Pourquoi ? ». Cette question naïve les autorise à répondre simplement, avec leurs mots. C'est le moment de pointer avec eux certaines caractéristiques de la situation qui, selon nous, en fait une situation qui leur a permis d'apprendre :

- la consigne est simple, courte et accessible à tous : elle permet à chacun de s'engager dans la tâche ;
- la tâche est nouvelle et facilite cet engagement : pour les plus matheux, parce qu'ils découvrent quelque chose de nouveau, pour les moins à l'aise en mathématiques, parce qu'ils n'ont pas de mauvais souvenirs associés à cette tâche ;
- les validations sont essentiellement internes à la situation : l'étudiant a suffisamment de connaissances pour savoir seul s'il a réussi à obtenir la figure demandée ou pas ;
- il y avait souvent plusieurs manières de réussir la tâche, plusieurs propriétés différentes pouvaient être utilisées et donnaient des pliages différents ;
- la manipulation a permis à certains de mieux s'approprier les propriétés ;
- le dispositif a permis à chacun de travailler à son rythme.

Si les étudiants énoncent souvent eux-mêmes ces caractéristiques, sous une forme ou sous une autre, la plus importante selon nous n'apparaît pas la plupart du temps et mérite d'être explicitée par l'enseignant : la résolution nécessite d'utiliser implicitement mais aussi explicitement les propriétés de géométrie plane du collège, ce qui est un objectif majeur de la séance. Pour accomplir les pliages demandés, ils ont eu besoin de se remémorer des propriétés et de les mettre en actes. Cet aspect « outil » des concepts mathématiques dans la résolution de problème est essentiel pour construire du sens, comme le rappellent les programmes 2015 :

> *La résolution de problèmes constitue le critère principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques, mais elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens. (BO, 2015, p. 197).*

Cette activité de pliage permet ainsi de travailler sur de nombreuses connaissances géométriques, ainsi que sur l'initiation à la démonstration. Elle permet en outre d'aborder certains points didactiques, comme le concept de définition, les paradigmes G1 - G2, ou les situations de résolution de problèmes et leur intérêt dans l'apprentissage en mathématiques. Tous les étudiants s'investissent dans cette tâche parce qu'elle est nouvelle, tous arrivent à effectuer des constructions. Mais si les compétences développées lors de cette activité sont utiles pour le concours, le pliage n'est pas une fin en soi, dans la mesure où cette tâche ne sera jamais donnée aux étudiants dans le cadre du concours.

Constructions à la règle et au compas

Après cette première séance, une autre activité, plus habituelle, est alors proposée aux étudiants : effectuer des constructions à la règle et au compas. Cette fois, non seulement les étudiants doivent faire, mais ils doivent également être capables de décrire ce qu'ils ont fait. Un programme de leur construction leur est en effet demandé. Il va donc falloir utiliser le vocabulaire géométrique de manière pertinente. Par ailleurs, comme dans l'activité précédente, après avoir effectué la construction, les étudiants doivent la justifier. Il s'agit donc de repérer les éléments construits, les hypothèses liées à la construction choisie, puis appliquer définitions, propriétés, théorèmes pour démontrer que l'objet construit a bien les propriétés annoncées. Les connaissances utilisées précédemment vont ainsi être réinvesties.

Première étape : construction, rédaction du programme, justification

La première construction proposée aux étudiants est celle d'un triangle rectangle. Après une recherche individuelle ou par binômes, la mise en commun des procédures utilisées est effectuée en deux temps : un étudiant dicte un programme de construction au formateur[9] qui effectue au fur et à mesure la construction avec un logiciel de géométrie dynamique, en faisant si nécessaire reformuler la consigne, puis l'étudiant, éventuellement aidé du groupe, explicite les propriétés qui justifient la construction effectuée.

Les objectifs, explicites ou implicites, sont multiples.

Le premier temps permet explicitement de travailler la rédaction d'un scénario de construction et ses caractéristiques :

- les informations doivent être fournies dans l'ordre ; si cet aspect pose parfois problème aux enfants, il ne pose en général pas de difficultés aux étudiants ;
- le programme doit être complet et sans ambiguïté, ce qui est beaucoup plus difficile pour les étudiants ; par exemple, souvent, des arcs de cercle sont proposés. Or il est difficile de les décrire précisément ; si, malgré tout, les arcs de cercles sont correctement tracés, ce n'est pas grâce à la précision du programme de construction, mais parce que les étudiants savent ce qu'ils doivent obtenir et anticipent grâce à l'image mentale qu'ils ont de la construction avant même que celle-ci ne soit effectuée. Il peut dans ce cas être proposé de tracer systématiquement le cercle complet, même si concrètement seul un arc « bien placé » suffit.

C'est l'occasion d'expliciter le contrat concernant ces programmes de construction, contrat qu'il est utile de préciser également aux élèves puisqu'il dépend le plus souvent de la situation :

- Le programme ne doit pas être trop synthétique : des expressions comme « Tracer la médiatrice du segment [AB] » sont dans un premier temps refusées, et remplacées par la liste des objets élémentaires (points, segments, droites, cercles) qui doivent être construits. Ce degré de précision du programme de construction relève du contrat et doit donc être explicité.
- Par ailleurs, le langage utilisé dans le programme doit être un langage qui décrit les objets géométriques créés, et non les actions et instruments utilisés pour les construire. Cet élément, qui relève également du contrat, se justifie par le fait qu'un des objectifs de la rédaction de programmes de construction est l'acquisition du vocabulaire géométrique. On cherche par exemple à remplacer les formulations initiales des étudiants du type : « Je trace un segment [DC]. Avec mon compas, je pose ma pointe sur D et je fais un écartement plus grand que la moitié de mon segment. Je trace mon arc » par « Tracer un segment [DC]. Tracer un cercle de centre D et de rayon supérieur à la moitié de la longueur DC ». Cette contrainte permet de simplifier les formulations. Elle permet surtout à l'étudiant de prendre conscience de l'objet géométrique construit (par exemple un cercle). Par la suite, ses propriétés (par exemple : « Deux points du cercle sont à égale distance du centre ») pourront alors être explicitées et être utilisées comme hypothèses dans la justification du programme, comme une hypothèse l'est dans une démonstration.

Pour simultanément expliciter le degré de précision attendu et faciliter l'utilisation du vocabulaire géométrique, une liste des mots autorisés est proposée après les premiers essais des étudiants :

« Vous ne devez utiliser que les mots suivants : points, segments, droite, cercle, rayon, centre, diamètre,

[9] Le travail peut également être effectué par binôme, un étudiant jouant le rôle d'émetteur, l'autre de récepteur. Il faudra cependant veiller à ce que le récepteur n'interprète pas les propositions de l'émetteur.

intersection, coupant, passant par, tracer, placer, nommer, en plus des articles ou prépositions. »

Implicitement, ce premier temps permet également de préparer les étudiants à se situer dans le cadre de la géométrie déductive. En effet, tant que le langage n'est pas géométrique, que les objets géométriques créés et utilisés ne sont pas clairement identifiés, il est difficile de s'intéresser à leurs propriétés, par exemple pour effectuer une démonstration.

Dans le second temps, les justifications sont détaillées, dans le but explicite de travailler la démonstration. Les formulations des étudiants sont au départ souvent incomplètes : « On a tracé une médiatrice, donc le triangle est rectangle ». Les arguments habituels pour justifier qu'il s'agit bien d'une médiatrice sont : « parce qu'elle est perpendiculaire au segment et qu'elle passe par son milieu ». Si on leur demande de justifier pourquoi en traçant des cercles et sans utiliser l'équerre, ils obtiennent une droite perpendiculaire au segment, ils peinent à repérer les propriétés utilisées. Petit à petit, il s'agit de mettre en place une méthodologie :

Méthodologie	**Mise en œuvre dans la construction de la médiatrice à la règle non graduée et au compas**
Repérage des caractéristiques de la construction	Le compas permet de tracer des points à une distance constante du centre du cercle
	Les intersections de deux cercles de même rayon donnent des points équidistants des centres de ces cercles
Repérage de l'objet géométrique construit, à partir de sa définition ou d'une propriété caractéristique	Deux points équidistants des extrémités d'un segment définissent la médiatrice de ce segment
Repérage du théorème utilisé pour conclure	Une propriété de la médiatrice d'un segment est qu'elle est perpendiculaire au segment, ce qui permet de conclure que le triangle est rectangle

Tableau 3 : Aide méthodologique.

Les propriétés des objets ne sont pas lues sur le dessin, mais obtenues par un raisonnement hypothético-déductif basé sur :

- la traduction de l'utilisation des instruments en propriétés des objets géométriques construits.
- les définitions et théorèmes de la géométrie euclidienne.

Cette démarche prépare l'apprentissage des éléments clés de la démonstration : hypothèses, théorèmes, conclusions. La seule différence avec le travail habituel de démonstration est la manière d'obtenir les hypothèses permettant d'initier le raisonnement : elles ne sont pas données dans un texte ou codées sur un dessin mais obtenues par traduction de l'utilisation des instruments. Il s'agit donc d'une première étape dans l'apprentissage de la démonstration. Dans le travail ultérieur, les données initiales de l'énoncé remplaceront le repérage des caractéristiques de la construction.

La même démarche est reprise pour les autres procédures proposées par les étudiants, puis d'autres constructions sont traitées suivant le même dispositif : tracer une hauteur dans un triangle quelconque, tracer un carré, tracer un hexagone, un octogone, *etc*. Ces différentes constructions permettent de revoir de nombreuses propriétés, mais certains théorèmes, comme celui de Thalès, ne sont pas spontanément utilisés dans ces constructions. C'est le moment de faire évoluer le dispositif.

Deuxième étape : choix de la propriété avant d'effectuer la construction

Une nouvelle contrainte est alors apportée dans la consigne. Il ne s'agit plus d'effectuer une construction, mais autant de constructions différentes que possible pour un même objet. Considérons par exemple la consigne : *« Soit une droite d et un point A n'appartenant pas à d. Tracer la droite parallèle à d passant par A. Trouver le plus de constructions différentes possibles »*. Cette fois, les constructions possibles sont très nombreuses[10]. Comme lors des activités précédentes, l'accent est mis sur la formulation des programmes de construction, puis sur la justification. Les hypothèses liées à la construction sont mises en évidence, puis les définitions et propriétés utilisées sont explicitées.

Quand les idées de constructions nouvelles s'épuisent, une nouvelle consigne peut venir relancer l'activité : *« Choisissez d'abord une propriété ou un théorème dont la conclusion est que deux droites sont parallèles, puis mettez en œuvre une construction utilisant cette propriété ou ce théorème »*. Le fait de demander des constructions différentes nombreuses a pour effet que cette nouvelle démarche se met souvent en place quasiment d'elle-même.

À ce stade du dispositif, l'entrée par les figures, notamment les quadrilatères particuliers[11], a déjà été abondamment utilisée et c'est souvent plutôt l'entrée par les théorèmes qui est alors exploitée. Autrement dit, il s'agit de choisir un théorème qui permette une justification, puis de mettre en scène ce théorème pour élaborer une construction. Il faut ainsi répondre à la question : *« Quel théorème permet de conclure que deux droites sont parallèles ? »*.

L'exemple est pris avec le théorème « de la droite des milieux[12] ». Les étudiants sont invités à expliciter ce théorème, puis à l'utiliser pour construire deux droites parallèles, puis une droite parallèle à d passant par A. On obtient par exemple la procédure suivante :

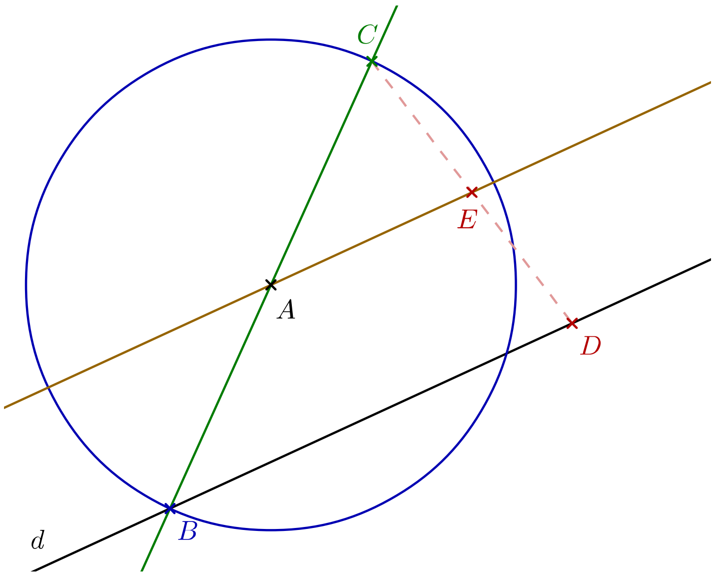


Figure 4 : Construction de parallèles avec le théorème de la droite des milieux

[10] De nombreuses constructions détaillées dans Jore (2006), pp. 389-397, sont disponibles à l'adresse : http://www.ima.uco.fr/jore/ .

[11] Si on trace un carré, un rectangle, un losange, un parallélogramme, on sait que l'on a des droites parallèles.

[12] Le choix a été fait de garder la formulation de ce cas particulier du théorème de Thalès, même s'il n'est plus explicitement au programme du collège et donc du CRPE, parce qu'en général, les étudiants le connaissent, mais ont du mal à le formuler précisément.

Programme	Justification
Tracer un cercle de centre A, qui coupe d en deux points. Soit B un de ces points.	$B \in d$
Tracer la droite (AB). Placer le point C à l'autre intersection de (AB) et du cercle.	A est donc le milieu de $[BC]$.
Placer un point D sur d.	$D \in d$
Placer le milieu E de $[DC]$ (on peut utiliser une construction règle et compas de la médiatrice).	E est le milieu de $[DC]$.
Tracer la droite (AE).	(AE) passe par les milieux des côtés $[BC]$ et $[CD]$ du triangle BCD. Donc $(AE)//(BD)$. (AE) est donc la droite parallèle à d passant par A.

Tableau 4 : Programme de construction et justifications.

Cette mise en situation permet aux étudiants de s'approprier les propriétés et théorèmes énoncés. De nombreux théorèmes sont ainsi revus et utilisés pour inventer et justifier des constructions. Petit à petit, les étudiants effectuent des démonstrations. L'accent est mis sur le fait que pour être valable, la justification ne doit pas prendre des arguments sur le dessin, mais dans le programme, qui est ici une manière de formuler les hypothèses.

Cette étape permet donc de développer plusieurs compétences :

- rédiger un programme de construction,
- repérer des hypothèses et établir une démonstration,
- utiliser un théorème pour mettre en place une construction.

Ces activités sont ainsi l'occasion de se réapproprier des connaissances et des compétences immédiatement utiles pour le concours. Notons en outre qu'il s'agit ici de travailler les théorèmes sous un aspect fort utile dans les exercices de démonstration. La question posée : *« Quels sont les théorèmes dont la conclusion est «les droites (..) et (..) sont parallèles » ? »* permet en effet aux étudiants de construire un répertoire de propriétés ou de théorèmes permettant de démontrer par exemple ici que deux droites sont parallèles, c'est-à-dire avec en entrée la conclusion plutôt que les hypothèses. Cette réorganisation des connaissances participe du passage des connaissances mobilisables aux connaissances disponibles.

L'hétérogénéité du public est prise en compte : certains effectuent quelques constructions, d'autres beaucoup plus. Mais tous s'investissent dans cette tâche. Les scientifiques se prennent au jeu de chercher de nombreuses constructions différentes. Ceux qui sont plus en difficultés en mathématiques découvrent les théorèmes sous un jour nouveau, et les comprennent mieux en les mettant en œuvre pour obtenir les constructions demandées.

Un nouveau pas de côté en guise de conclusion

Comme précédemment, la fin de la séance est l'occasion d'un pas de côté sur des aspects didactiques. Différents éléments déjà abordés avec les étudiants peuvent être repris : différentiation ou mise en situation de résolution de problèmes par exemple. Mais il est plus intéressant d'en aborder de nouveaux : identification de la tâche et des objectifs d'apprentissage ou mise en situation de rédaction d'un programme de construction pour travailler le langage géométrique.

Précisons tout d'abord ce dernier point. Il s'agit de mettre en évidence comment la nécessité de rédiger un programme de construction les a obligés à utiliser le vocabulaire géométrique de manière précise. Plus généralement, les situations de communication, basées notamment sur l'échange d'informations écrites entre un groupe émetteur et un groupe récepteur, sont souvent un bon moyen de s'approprier le vocabulaire mathématique, et en particulier géométrique. Le vocabulaire n'est pas présenté comme dans une « leçon de choses » : *« ceci s'appelle un cercle, un rayon, etc. »* mais utilisé dans une situation fonctionnelle, qui lui donne de l'intérêt et du sens.

Il est par ailleurs possible de faire expliciter aux étudiants la tâche proposée et les objectifs de cette séance. Si la tâche était ici d'obtenir de multiples constructions de parallèles ou de perpendiculaires, les objectifs étaient ailleurs :

- revoir les propriétés des quadrilatères ou triangles particuliers, ainsi que les théorèmes de géométrie plane en les utilisant,
- s'approprier le vocabulaire géométrique,
- développer des démonstrations,
- rédiger des programmes de construction.

Cette explicitation est pertinente à deux niveaux. Tout d'abord pour les étudiants qui doivent comprendre qu'il ne s'agit pas pour eux de retenir toutes ces constructions, qui n'ont été qu'un prétexte. Si c'est une évidence pour le formateur, ce n'en est pas toujours une pour les étudiants ! En tant que futurs enseignants, il faut qu'ils identifient ce rôle de la tâche par rapport aux objectifs d'une séance ainsi que cette nécessité d'une institutionnalisation qui a pour fonction de faire repérer aux élèves ce qu'ils ont appris, ce qu'ils peuvent/doivent désormais mémoriser.

Conclusion

Nous avons présenté des activités qui permettent simultanément de raviver des connaissances et des compétences géométriques variées immédiatement utiles pour le concours de recrutement de professeurs des écoles (définitions, propriétés, théorèmes, procédures de construction à la règle et au compas) mais utiles aussi en situation de responsabilité auprès d'élèves du primaire (maîtrise du vocabulaire géométrique, rédaction de programmes de construction). Parmi les caractéristiques de ce travail, nous souhaitons ici en pointer deux qui nous paraissent déterminantes pour favoriser une meilleure appropriation des objets et propriétés de la géométrie plane de la part des étudiants :

- une attention particulière est portée sur le passage des connaissances géométriques de mobilisables à disponibles, au sens de Robert. Ce passage est favorisé notamment par la conscientisation des connaissances en acte, c'est-à-dire des objets et propriétés utilisés, ainsi que par la réorganisation des connaissances qui est proposée,
- une articulation entre activité de manipulation et activité intellectuelle se met en place au cours des activités, avec développement de l'activité intellectuelle dans l'activité de manipulation par une contrainte d'anticipation des résultats produits par la manipulation.

Régulièrement pendant les séances, des remarques et compléments d'ordre didactiques sont développés comme outils pour mieux comprendre et analyser d'éventuelles erreurs des étudiants (concept de définition, paradigmes géométriques), ou comme outils pour mieux comprendre et analyser les effets des choix didactiques qui ont été faits par le formateur (aspect outil des concepts mathématiques, intérêt des situations de résolution de problèmes, appropriation du langage géométrique dans une situation fonctionnelle).

Nous devons signaler quelques limites à ce travail. La première concerne la gestion du temps. Si l'objectif est de travailler simultanément plusieurs objets, à la fois mathématiques et didactiques, afin d'optimiser le temps, il n'empêche que chacune de ces constructions, pliages comme construction à la règle et au compas, prend du temps. La seconde est la difficulté d'évaluer les effets de ces séances. À court terme, il est difficile de séparer l'effet de ces séances de celui du reste de l'enseignement de géométrie plane. À moyen terme, il est encore plus difficile de savoir comment les étudiants pourront ou non réinvestir le travail didactique qui a été proposé.

La disponibilité de matériel informatique et de logiciels de géométrie dynamique a beaucoup évolué ces dernières années ; en parallèle, le nouveau programme du cycle 3 indique qu'il faut pour les élèves *« réaliser une figure simple ou une figure composée de figures simples à l'aide d'un logiciel »* (BO, 2015, p. 210). Une nouvelle piste pourrait être explorée pour améliorer les compétences disciplinaires, pédagogiques et didactiques des étudiants : l'utilisation de logiciels de géométrie dynamique, et en particulier ceux qui fournissent des programmes de construction.

Si ces activités ont permis aux étudiants d'obtenir le concours de professeur des écoles, un nouveau chantier s'ouvrira pour eux : apprendre à construire des séances et des séquences d'apprentissage. Si les constructions à la règle et au compas ne sont pas adaptées à l'école élémentaire, les pliages pourront, eux, certainement y trouver leur place. Un autre travail s'engagera alors pour eux qui pourra, nous l'espérons, s'appuyer sur ce qu'ils auront vécu dans leur première année de formation.

Références bibliographiques

BOULE, F. (2001). *Questions sur la géométrie et son enseignement.* Nathan.

DOUADY, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM* 6, 132-158.

HOUDEMENT, C. & PELTIER, M.-L. (2002). Présentation d'une situation de formation par homologie. La somme de plus grand produit. In *COPIRELEM, Les cahiers du formateur.* T. 6 , (pp. 77-85).

HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 11, 175-194.

HOUDEMENT, C. & ROUQUÈS, J.-P. (2016). Deux géométries en jeu dans la géométrie plane : une qu'on appellera « dessinée » et une qu'on appellera « abstraite ».

http://www.irem.sciences.univ-nantes.fr/archives/geometriePlane/geometriesDessineeAbstraite.pdf

JORE, F. (2006). *Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier-crayon et informatique*, Thèse de doctorat de l'Université Paris 7.

JORE, F. (2008). Paradigmes géométriques et formation initiale des professeurs des écoles, en environnements papier crayon et informatique, In C. Hache & L. Coulage (Eds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques* (pp. 195-225). IREM de Paris 7.

PARZYSZ, B. (2002). Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1. In *Actes du 28e colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs chargés de la formation des maîtres* (pp. 99-110). Presses Universitaires d'Orléans.

ROBERT, A. (1995). *L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES de mathématiques. Tome I.* Ellipses.

MEN (2008). Programmes de l'école primaire. Bulletin officiel spécial n° 3 du 19 juin 2008.

MEN (2015). Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4). Bulletin officiel spécial n° 11 du 26 novembre 2015.