DIFFICULTÉS DES ÉLÈVES À INTERPRÉTER DES CONSTRUCTIONS DANS L'ESPACE. UNE ÉTUDE DE CAS

Stéphanie BRIDOUX
UMONS (Belgique) et LDAR, Université Paris Diderot
Céline NIHOUL
UMONS (Belgique)

Résumé. Dans l'enseignement belge francophone, les difficultés des élèves du lycée en géométrie dans l'espace à trois dimensions sont évoquées par de nombreux professeurs. Nous menons ici une étude didactique relative à l'interprétation de certaines constructions dans l'espace. Pour ce faire, nous présentons le dépouillement d'un questionnaire proposé à des élèves de première (17 ans) et nous mettons en relation leurs justifications avec la manière dont ils décodent les représentations graphiques sur lesquelles ils doivent travailler.

Mots-clés. Géométrie spatiale, dessin, figure géométrique, voir, savoir.

Abstract. The difficulties of Belgian high school students to work in three-dimensional geometry is a recurrent concern among teachers. The purpose of this paper is to study, from a didactic point of view, the interpretation of space constructions. We present the outcome of a test given to 17 year old students and link their justifications to the way they decode graphical representations they have to deal with.

Key-words. Spatial geometry, drawing, geometrical figure, seeing, knowing.

Introduction

Cet article trouve son origine dans la réalisation d'un travail de fin d'études portant sur les difficultés d'élèves du lycée dans l'enseignement de la géométrie dans l'espace (Nihoul, 2013). Ce choix de sujet est tout d'abord motivé par le constat suivant. Alors que les élèves vivent au quotidien dans un espace à trois dimensions, ils sont pourtant nombreux à penser que la géométrie dans l'espace est un sujet très compliqué à aborder dans le cours de mathématiques. Et quel enseignant n'a jamais entendu un élève bloqué face à un exercice s'exprimer de la manière suivante: « je ne vois rien dans l'espace ! » ? Dans cette perspective, nous présentons ici le cheminement d'un jeune chercheur en didactique, futur enseignant, qui a voulu se munir d'outils pour caractériser certains obstacles auxquels les élèves sont confrontés dans le domaine de la géométrie spatiale et d'intégrer à ce travail théorique une composante expérimentale, adaptée au contexte institutionnel qui est ici celui de l'enseignement secondaire belge.

Dans les programmes belges du cours de mathématiques, les notions de géométrie sont nombreuses. Nous donnons dans l'annexe une vue globale des notions géométriques enseignées au collège et au lycée. Nous pouvons y lire que la représentation de solides dans le plan est déjà présente dans les programmes de la cinquième année mais dans ce travail, nous nous sommes plus particulièrement intéressées à la géométrie enseignée en classe de première, qui est en général le premier moment où la géométrie dans l'espace est introduite. En Belgique, les élèves qui entrent dans cette classe peuvent choisir de prendre un cours de mathématiques à deux, quatre ou six heures hebdomadaires. Ce choix entraîne un programme de mathématiques qui sera plus ou moins allégé. Nous visons ici les classes où se donnent quatre ou six heures de mathématiques par semaine. Les chapitres qui relèvent de la géométrie spatiale traitent de la représentation d'objets de l'espace en perspective cavalière, de la notion de projection dans un plan et de l'étude des positions relatives de deux droites, de deux plans et d'une droite et un plan. Les problèmes de constructions dans l'espace dans lesquels apparaissent les points de percée[1], les sections planes ou encore l'orthogonalité sont approfondis dans le cours à six heures hebdomadaires. L'activité de démonstration y est également beaucoup plus présente.

Les programmes belges préconisent une approche par compétences. À ce titre, ils suggèrent de développer chez les élèves des compétences tant disciplinaires que transversales. Les compétences disciplinaires sont réparties en quatre domaines: « Étude des fonctions », « Algèbre », « Traitement des données » et « Géométrie et trigonométrie ». Des spécificités relèvent de chaque domaine et nous pouvons lire dans les programmes que « les compétences liées à l'argumentation sont au cœur de l'activité géométrique. Elles sont à l'œuvre dans la réalisation et la justification de constructions, dans la recherche de propriétés et dans la rédaction de démonstrations » (Programme d'études du cours de Mathématiques, 2000). Les textes officiels expliquent également que le passage du plan à l'espace sollicite de nouvelles compétences telles que « la représentation dans le plan de figures non planes, ensuite la révision de notions primitives acceptées comme vraies… ». Une attention particulière semble donc accordée à la représentation des objets dans l'espace, tant pour en étudier les propriétés que pour appuyer l'activité de démonstration et de justification. Ce constat pose selon nous d'emblée la question de savoir si les compétences visées par les programmes sont réellement accessibles et de quelle manière elles se construisent. En particulier, comment les élèves interprètent-ils les représentations graphiques dans l'espace et dans quelle mesure s'appuient-ils sur celles-ci pour argumenter et développer un raisonnement dans lequel ils doivent utiliser à bon escient des propriétés mathématiques étudiées dans le cours? Des travaux de recherche en didactique de la géométrie nous ont permis d'obtenir un premier éclairage théorique sur la question de l'interprétation des objets de l'espace par les élèves. Nous les développons à la section suivante et nous montrons comment ils nous ont amenées à formuler notre problématique de recherche. Nous présentons ensuite les résultats d'un questionnaire proposé à des élèves de première pour analyser leurs difficultés à interpréter des constructions géométriques de l'espace à trois dimensions.

1. Quelques éléments théoriques

1.1 Représentations géométriques dans l'espace à trois dimensions

Lorsque la géométrie est abordée dans les classes, le vocabulaire utilisé par les élèves, les enseignants et même parfois les manuels scolaires fait souvent référence aux mots « dessin » et « figure », sans réellement les distinguer. Ces termes revêtent par contre des significations différentes soulevées par les didacticiens.

1 Le point de percée d'une droite dans un plan est l'unique point commun entre la droite et le plan (définition reprise du manuel *Espace Math* 5e/6e).

Selon Arsac (1989), en géométrie euclidienne plane, le dessin désigne ce que l'élève trace sur sa feuille et qui appartient au monde de tous les jours, c'est-à-dire le monde sensible, tandis que la figure désigne l'objet qui appartient au monde mathématique ou ici le monde géométrique. Le dessin n'est alors qu'une représentation d'une figure mathématique. Plus précisément, Parzysz (1988) explique qu'une figure est un objet théorique défini par un texte qui la décrit tandis que le dessin n'est autre qu'une illustration de la figure.

Cependant, considérons par exemple l'objet géométrique « cube ». Supposons que nous ayons un cube en bois dans la main. Il ne s'agit ni d'une figure au sens d'Arsac puisque c'est un cube particulier, ni de l'objet mathématique « cube ». Ce n'est pas non plus un dessin. La distinction entre la figure et le dessin semble donc se complexifier lorsqu'on aborde la géométrie spatiale.

Pour étudier les rapports entre dessin et objet géométrique, Laborde et Capponi réinterprètent la définition de Parzysz en terme du triangle référent-signifiant-signifié:

> En tant qu'entité matérielle sur un support, le dessin peut être considéré comme un signifiant d'un référent théorique […]. La figure géométrique consiste en l'appariement d'un référent donné à tous ses dessins, elle est alors définie comme l'ensemble des couples formés de deux termes, le premier terme étant le référent, le deuxième étant un de ses dessins qui le représente […]. Le terme figure géométrique renvoie dans cette acception à l'établissement d'une relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles. (Laborde et Capponi, 1994, p. 168)

À une figure de l'espace est donc associé un couple (référent, dessin). La première composante précise le monde dans lequel on se place et la deuxième donne un dessin représentant la figure dans ce référent. Par exemple, dans le référent de la géométrie euclidienne, le signifié « figure du cube » a comme signifiants tous les dessins qui peuvent le représenter. Un signifiant du cube est représenté à la figure 1.

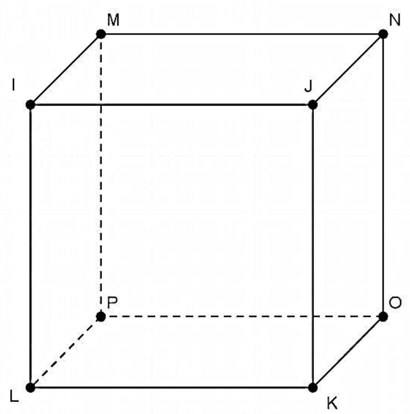


***Figure 1.** Un signifiant du signifié « cube » en géométrie euclidienne*

Laborde et Capponi soulèvent ensuite la complexité des rapports entre l'objet géométrique et le dessin. D'une part, un dessin n'est pas nécessairement interprété par le lecteur comme renvoyant à un objet géométrique. D'autre part, il existe de multiples interprétations d'un même dessin en tant que signifiant d'un objet géométrique. Cela s'explique par le fait que la manière d'appréhender un dessin dépend fortement des connaissances de celui qui le lit mais aussi du contexte dans lequel il se place. Duval (1993) parle d'appréhension perceptive à ce sujet. Par exemple, la figure 2 donne-t-elle à voir un cube, un parallélépipède rectangle ou encore un carré et deux parallélogrammes ?

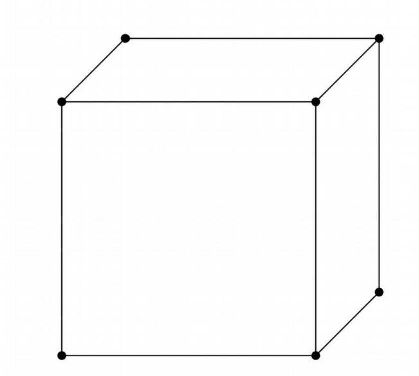


Figure 2. *Diversités des interprétations*

Enfin, en tant que signifiant d'un objet géométrique, le dessin rend compte de propriétés de cet objet mais, comme le soulignent les auteurs, il ne le fait que partiellement. Dans cette perspective, Laborde et Capponi (ibid.) appellent *domaine de fonctionnement* du dessin l'ensemble constitué des propriétés géométriques représentées par certaines propriétés spatiales du dessin. Inversement, les propriétés spatiales du dessin ne peuvent pas toutes être interprétées comme renvoyant à des propriétés de l'objet. Est donc aussi attaché à un dessin un *domaine d'interprétation,* constitué de l'ensemble de ces propriétés qui ne peuvent pas être interprétées comme renvoyant à des propriétés de l'objet.

Ainsi, le *domaine de fonctionnement* permet de passer de la figure géométrique à un de ses dessins en projetant les propriétés géométriques de la figure sur les propriétés spatiales du dessin. Cette projection est réalisée grâce à une série de règles liées aux modes de représentations des objets géométriques tels que la perspective cavalière. Par exemple, si dans une figure de l'espace, des droites sont parallèles, celles-ci resteront par projection dans le plan des droites parallèles. Les règles de représentation permettent alors de les représenter sur un dessin de la figure par des segments parallèles.

Le *domaine d'interprétation* permet quant à lui de passer d'un dessin à la figure géométrique en interprétant les propriétés spatiales du dessin en relation avec la description mathématique de l'objet géométrique. Par exemple, sur le dessin donné à la figure 3, les angles α et β ne sont pas égaux. Un élève qui s'appuierait sur l'évidence perceptive pourrait en déduire que ce dessin n'est pas celui d'un cube. Mais la reconnaissance de cette représentation-type d'un cube, souvent rencontrée par l'élève dans le cours et dans les manuels, lui permettra d'intégrer dans le domaine d'interprétation du dessin le fait que l'amplitude des angles des faces latérales n'est pas respectée.

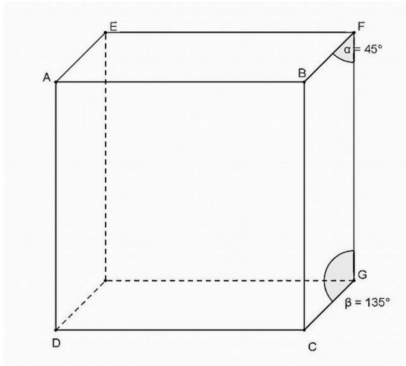


Figure 3. *Domaine d'interprétation*

Comme nous l'avons dit, la problématique du dessin en géométrie spatiale nécessite de devoir choisir des modes de représentation. Se pose alors la question de déterminer des règles et des conventions pour représenter sur une feuille de papier des objets géométriques de l'espace euclidien à trois dimensions. Dans l'enseignement belge francophone, la principale technique présentée aux élèves est celle de la perspective cavalière. Parzysz (1991) formule l'hypothèse que la raison de ce choix tient au fait que la perspective cavalière réalise un compromis acceptable entre le voir et le savoir, notamment parce qu'elle permet de conserver des propriétés (parallélisme, milieux, rapports des mesures de segments parallèles) tout en offrant de l'objet une image « voisine » de celle qu'il présente à la vue.

En ce qui concerne le rôle des dessins en géométrie, une analyse de manuels (Nihoul, 2013) révèle également que dans l'enseignement de la géométrie, l'élève rencontre souvent les mêmes représentations-types:

> Une représentation-type est un dessin dont l'objet est d'illustrer une ou des relations géométriques entre les objets géométriques de l'espace. Elle n'a pas fait l'objet de conventions. Cependant, elle fait partie d'une tradition d'enseignement. (Chaachoua, 1997, p.41)

Par exemple, dans de nombreux manuels scolaires, on représente un plan par un parallélogramme ou encore pour représenter une droite incluse dans un plan, on dessine un segment à l'intérieur d'un parallélogramme.

Chaachoua (1997) explique aussi que lorsque le dessin est utilisé dans un problème mathématique par exemple, apparaît alors la question de l'interprétation des propriétés spatiales que le dessin donne à voir comme pouvant ou non être des propriétés géométriques soutenant le raisonnement. Cependant, en géométrie spatiale, le domaine d'interprétation est très réduit. Cela explique l'émergence de nombreuses difficultés chez les élèves à utiliser les dessins de figures géométriques comme terrain d'expérimentation dans le processus de résolution de problèmes (Mithalal, 2014), comme par exemple être capable de déterminer quelles sont les propriétés que l'on peut considérer comme vraies à partir de l'observation d'un dessin. Parzysz (1988) évoque alors un conflit chez les élèves entre le « vu » et le « su », c'est-à-dire entre ce qu'ils savent de l'objet géométrique et ce que cet objet leur donne à voir par sa représentation.

Parzysz (1987) s'est aussi intéressé aux dessins présentés dans les manuels. La construction de ces dessins s'appuie sur des conventions variées, souvent implicites, et elle n'utilise pas nécessairement toujours les règles de la perspective cavalière. Chaachoua (1997) fait alors l'hypothèse que ces représentations-types et les conventions liées aux dessins d'objets géométriques de l'espace deviennent des règles d'interprétation des dessins chez les élèves.

Ces premiers travaux montrent donc bien que l'interprétation des dessins en géométrie spatiale suit une logique, des règles et des conventions spécifiques différentes de l'interprétation des dessins en géométrie plane. Les difficultés des élèves dans les liens entre « dessin » et « figure » s'en trouvent accentuées dans le cas de la géométrie dans l'espace. Nous pensons, comme Chaachoua notamment, que certaines difficultés des élèves à interpréter des dessins peuvent être liées à la manière dont ils décodent ce que les dessins donnent à voir et donc à la visualisation de ces constructions planes sur laquelle ils s'appuient pour représenter des figures de l'espace. Nous abordons à la section suivante la question de la visualisation.

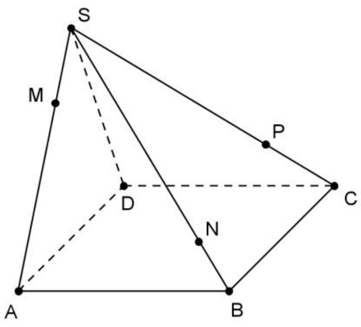
1.2 Images mentales et visualisation

Selon Marchand (2006), une *image mentale* consiste en la représentation mentale d'un objet ou d'un événement. La visualisation est alors le processus de création et de modification d'images mentales. Par exemple, quand une personne parle de la figure « cube », elle a en mémoire une représentation particulière de cet objet géométrique. Cette personne a donc une image mentale de la figure, créée à un moment donné de son parcours. Une fois l'image mentale élaborée, il est aussi possible de la modifier, soit en la mettant en mouvement (par exemple en appliquant une rotation), soit en la transformant en une autre forme (par exemple en la divisant en sous-figures de mêmes dimensions). C'est là que le processus de visualisation d'un objet géométrique est mis à l'œuvre.

Duval (2005) explique que selon les actions concrètes réalisées par les élèves, le type de visualisation employé sera différent. La visualisation sera dite *iconique* si l'élève se base sur une ressemblance entre la forme visuelle perçue et l'objet connu de la réalité, du monde sensible donc. Si ce n'est pas le cas, la visualisation sera dite non iconique. Autrement dit, un élève qui ferait abstraction du côté visuel lorsqu'il observe le dessin représentant la figure géométrique et qui remettrait en question les propriétés qu'il voit, utilise une visualisation de type *non iconique*. Cet élève serait alors capable d'établir un lien entre le dessin et la figure. Au contraire, un élève qui ne ferait pas abstraction de cette ressemblance entre le visuel et l'objet connu ne sera pas capable de remettre en cause les propriétés du dessin et n'établira donc pas le passage du dessin à la figure. Il s'agit dans ce cas de la visualisation iconique.

Notre travail de fin d'études nous a amenées à réaliser une analyse de plusieurs manuels dont les principaux résultats seront repris dans la suite de cet article. Pour illustrer notre propos sur la visualisation, nous présentons un exercice du manuel *Espace Math* 5^{e}/6^{e}[2] (2007) dont la résolution montre quel type de visualisation l'élève devrait privilégier.

2 Ce manuel est fréquemment utilisé par les enseignants en Belgique francophone. Dans l'enseignement belge, la cinquième et la sixième années correspondent aux deux dernières années du lycée en France.

Soit la pyramide à base carrée de sommet S. Construis: (a) Le point de percée de la droite MN dans le plan ABC; (b) L'intersection des plans SMP et ABC; (c) Le point de percée de la droite MP dans le plan ABC; (d) L'intersection de la pyramide avec le plan α passant par P et parallèle à ABC.	

Exemple 1. *Exercice issu d'un manuel*

Cet exercice est proposé en classe de première. Il porte sur la construction de points de percée et de sections de plans. Les élèves doivent donc construire l'intersection d'une droite et d'un plan, l'intersection de deux plans et l'intersection d'un solide et d'un plan particulier. L'observation seule du dessin ne mène pas spontanément à visualiser les constructions demandées. Un travail complexe est requis car il nécessite de combiner de manière déductive des propriétés sur les droites et les plans tout en intégrant sur le dessin des constructions supplémentaires appuyées par l'utilisation de ces propriétés. De ce point de vue, rester en visualisation iconique pour construire les objets s'avèrerait donc probablement ici inefficace.

Selon Duval (2005), la visualisation non iconique s'associerait à une bonne manière de voir puisqu'elle permet à l'élève de décomposer des formes l'amenant à connaître les propriétés des figures. Il suggère que ce passage entre la visualisation iconique et celle non iconique doit être amené par l'enseignement de la géométrie chez les élèves au fur et à mesure de leur scolarité.

Ces travaux montrent donc que l'enseignement de la géométrie devrait permettre aux élèves de passer d'une géométrie de l'observation dans l'espace physique à une géométrie de la démonstration dans l'espace abstrait où la validation s'appuie sur l'utilisation de savoirs mathématiques. Se pose donc la question, en géométrie spatiale, de savoir comment l'enseignement peut amener l'élève à dépasser l'intuition visuelle, appuyée par ce qu'il voit (le « vu » chez Parzysz) pour développer une stratégie de résolution efficace dans le problème mathématique qui lui est posé, utilisant ainsi ce qu'il sait (le « su » chez Parzysz).

2. Questions didactiques et expérimentations

Nous avons mené deux analyses dans le cadre de notre travail. La première est une analyse de manuels et la seconde concerne le dépouillement d'un questionnaire à destination des élèves de première en Belgique. Nous commençons par donner quelques résultats de notre analyse de manuels pour affiner notre questionnement didactique.

2.1 Analyse de manuels

Nous décrivons ici quelques résultats de l'analyse du manuel *Espace Math* 5e/6e (2007) précédemment évoqué. Nous nous sommes intéressées aux chapitres concernant le parallélisme et l'orthogonalité. Ces thèmes ont pour buts d'intégrer des situations planes et spatiales au raisonnement géométrique et d'exploiter les méthodes de démonstration et de résolution de problèmes qui en découlent. Ces objectifs sont présents dans les programmes belges. Ces chapitres sont étudiés en début de première au lycée et sont utiles pour la suite du cours de géométrie spatiale.

Pour chaque exercice, nous avons étudié le type de visualisation susceptible d'être sollicité par les élèves pour le résoudre. La méthodologie d'analyse du manuel est décrite dans (Nihoul, 2013). Elle s'appuie sur une étude du type d'activités (Duval, 2005) déclenchées chez les élèves.

Voici un tableau décrivant les résultats en pourcentages de notre analyse. Les initiales O/P, VI et VNI correspondent respectivement à orthogonalité/parallélisme, visualisation iconique et visualisation non iconique.

%	O/P
VI	31,2
VNI	68,8

Tableau 1. *Analyse du manuel Espace Math 5*^{e}*/ 6*^{e}

Dans les chapitres étudiés, le type de visualisation qui est attendu de l'élève est la visualisation non iconique. De nombreux problèmes de constructions sont présents. Ils nécessitent de mettre en relation des propriétés mathématiques, notamment pour amener des tracés nouveaux qui mènent à la construction demandée (par exemple un point de percée ou une section de plan). La simple observation visuelle est donc une stratégie inefficace. Nous savons d'expérience que ces exercices sont réputés difficiles chez les élèves. Une raison est qu'ils ne parviennent pas toujours à sélectionner dans leurs connaissances la propriété mathématique à utiliser à un moment précis et à la formuler correctement. Cependant, cette analyse de manuels ne nous permet pas de déterminer si le type de visualisation attendu des élèves est celui qu'ils utiliseraient puisque nous n'avons pas accès au travail mathématique qui est effectivement réalisé dans les classes où ces exercices sont proposés. De plus, ce qui pose souvent problème aux élèves est de savoir ce qu'ils ont le droit d'inférer des dessins comme étant « correct » ou « certain ». La question de la visualisation relève donc d'aspects d'ordre méta-cognitif que nous n'approfondissons pas ici.

Cependant, nous retenons qu'une difficulté des élèves en géométrie spatiale consiste très certainement à faire des allers-retours entre ce qu'ils interprètent à partir de l'observation de la construction géométrique et les propriétés mathématiques qui permettent de valider le raisonnement. C'est donc en empruntant les outils de Parzysz (1988) que nous énonçons notre problématique:

Comment la dialectique entre le « vu » et le « su » est-elle mise à l'œuvre lorsque les élèves doivent décoder un dessin représentant une figure de l'espace?

Pour apporter quelques éléments de réponse à cette question, nous avons proposé un questionnaire à des élèves de première. Nous présentons successivement chaque étape du travail.

2.2 Questionnaire

2.2.1 Choix des questions

Notre problématique concernant les difficultés des élèves à formuler les propriétés associées à l'interprétation des représentations graphiques dans l'espace nous a amenées à nous intéresser à une recherche conduite par Chaachoua (1997) dans laquelle il a élaboré un questionnaire visant à étudier le rôle du dessin dans des productions d'élèves de seconde. Les items proposent tous un dessin et une question à laquelle les élèves peuvent répondre par « Oui », « Non » ou « On ne peut rien dire ». Chaque question porte sur le thème général des relations d'incidence. Les items peuvent être regroupés en trois thèmes: l'incidence de trois points, les positions relatives d'une droite et d'un plan et les positions relatives de deux droites. Les dessins sont répartis en deux catégories, « Solide » et « Sans solide », selon qu'ils mettent en jeu ou non un solide. Il s'agit d'une variable didactique qui peut, selon Chaachoua, influencer la lecture des dessins de l'espace par les élèves. En effet, les solides étaient un objet d'étude au programme de la seconde et ils occupaient une place importante dans les exercices. Dans ce questionnaire, chacune des réponses doit être justifiée pour mieux comprendre la manière dont les dessins sont interprétés par les élèves de seconde en géométrie spatiale.

Dans le cadre d'un travail de fin d'études comme c'est le cas ici, l'objectif est de s'emparer de travaux existants pour étudier une problématique adaptée à un contexte institutionnel précis. En particulier, il ne s'agit pas de produire de nouveaux outils d'analyse. Nous avons donc repris le questionnaire proposé par Chaachoua (1997) parce qu'il pouvait selon nous éclairer notre problématique. Nous y avons apporté quelques modifications en ce qui concerne le nombre d'items proposés et le public visé. Nous avons retenu dans ce questionnaire six items précis couvrant les trois thèmes avec pour chacun d'eux, un item dépendant d'une variable spécifique, c'est-à-dire avec « Solide » et « Sans solide ». Cette variable est toujours d'actualité puisque les programmes belges préconisent l'étude des solides et qu'ils sont l'objet de nombreux exercices dans les manuels analysés. Notons également que les trois thèmes sur lesquels portent les items sont traités dans les programmes de la première au lycée en Belgique. Avec ce questionnaire, notre objectif est de proposer aux élèves des représentations graphiques simples, fréquemment rencontrées dans des exercices ainsi que des représentations-types des manuels ou des cours et d'analyser si les élèves sont capables de valider leur choix de réponse avec un argument mathématique correct. C'est pourquoi, notre analyse se concentre essentiellement sur les justifications apportées par les élèves. Pour ce faire, nous analysons si elles relèvent de la mobilisation de propriétés géométriques et d'une éventuelle remise en question de leurs observations du dessin ou au contraire si elles s'appuient davantage sur l'intuition visuelle que les élèves ont du dessin.

2.2.2 Analyse a priori

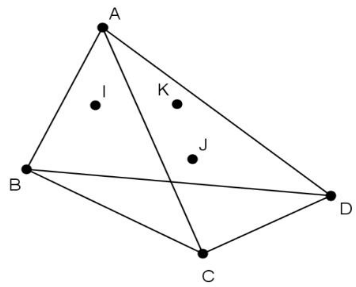
Nous introduisons chacune des questions posées en indiquant à quel thème elles appartiennent et quelle valeur (solide, sans solide) de la variable elles font intervenir. Nous donnons également une analyse a priori de chacune des questions.
Le tableau 2 indique la répartition des questions en fonction du thème et de la variable auxquels elles appartiennent:

	Solide	Sans solide
Incidence de trois points	Q1	Q6
Positions relatives d’une droite et d’un plan	Q3	Q2
Positions relatives de deux droites	Q4	Q5

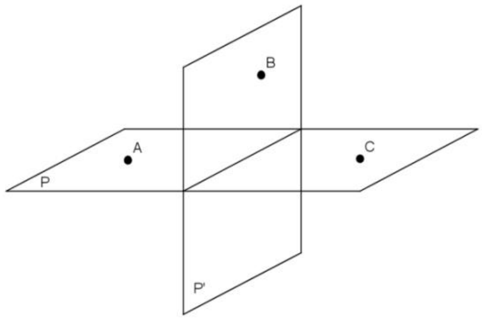
Tableau 2. *Répartition des questions selon les thèmes et les variables*

a) Incidence de trois points

Question 1. *Les points I, J et K sont-ils dans un même plan ?*



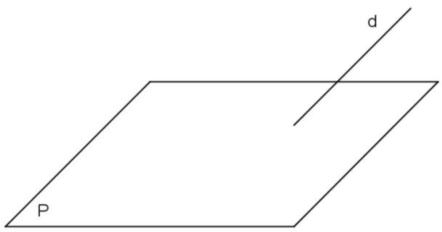
Question 6. *Les points A, B et C sont-ils dans un même plan ?*



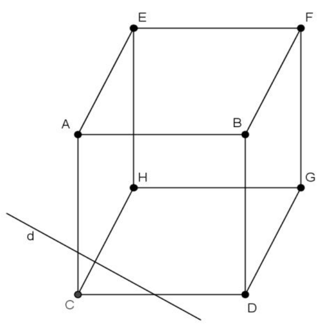
La question 1 dépend de la variable « Solide » et la question 6 dépend de la variable « Sans solide ». Dans les deux cas, les trois points sont dans un même plan. Dans la plupart des cours et des manuels, cette propriété est énoncée de la manière suivante: « Trois points non alignés déterminent un seul plan » (Manuel *Espace Math* 5^{e}/6^{e}). Cette propriété est indépendante de la présence ou non d’un solide dans le dessin. Une observation « stricte » du dessin, donc appuyée par le « vu », pourrait selon nous amener les élèves à dire que les points appartiennent à des plans différents et ne peuvent pas, du coup, appartenir à un même plan. Les élèves qui s'appuieraient sur le « su » mobiliseraient quant à eux la propriété précédemment citée pour répondre par l'affirmative à la question.

b) Positions relatives d’une droite et d’un plan

Question 2. *La droite d est-elle sécante avec le plan P?*



Question 3. *La droite d est-elle dans le plan ABCD?*

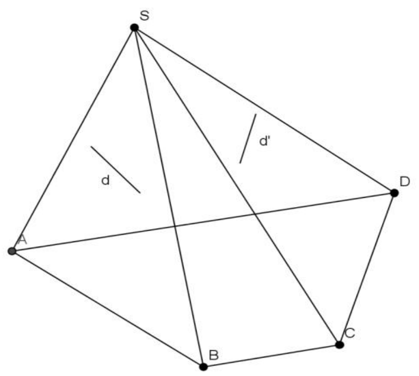


La question 2 dépend de la variable « Sans solide » et la question 3 dépend de la variable « Solide ». Comme nous l'avons expliqué au point 1.1, le dessin présenté à la question 2 mélange deux représentations-types (droite sécante à un plan et droite parallèle à un plan) utilisées dans les manuels étudiés. Il est donc possible que l'élève ne se fie pas ici à ce qu'il voit mais bien à la convention qu'il a rencontrée dans le cours théorique, donc au « su » et répondre par « non » à cette question. L'appui sur le « vu » pourrait quant à lui amener l'élève à répondre « oui » puisque le dessin donne à voir que la droite a au moins un point commun avec le plan.

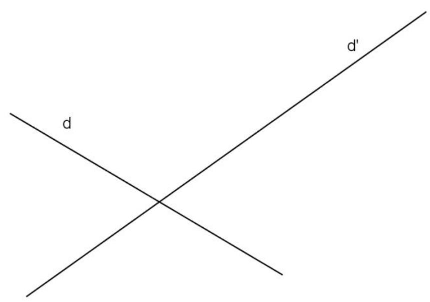
À la question 3, les conventions de la perspective cavalière n'ont pas été respectées. En effet, la face cachée du cube n'apparaît pas en traits pointillés. Cette variable pourrait amener les élèves à réfléchir sur la position de la droite par rapport à celui-ci. La réponse attendue est « On ne peut rien dire » puisque le fait de travailler dans l'espace amène différentes possibilités de perspective. À la question 2, la droite d peut tout aussi bien couper le plan P que lui être parallèle. À la question 3, la droite d peut être parallèle à la face avant du cube, être dans le plan ABCD ou dans le plan CDGH. Elle peut également traverser le cube. Nous prévoyons que toutes ces possibilités de positions entre la droite et le(s) plan(s) amènent les élèves à se questionner quant à la véracité de ce qu'ils peuvent observer, sur le « vu » donc, et conclure par la réponse « On ne peut rien dire ».

c) Positions relatives de deux droites entre elles

Question 4. *Soit d une droite du plan SAB et d' une droite du plan SCD. Les droites d et d' sont-elles sécantes?*



Question 5. *Les droites d et d' de l'espace sont-elles sécantes?*



La question 4 dépend de la variable « Solide » et la question 5 de la variable « Sans solide ». Dans l'analyse a priori donnée par Chaachoua (1997), la réponse attendue à la question 4 est « Non ». Si le « su » prime, l'élève peut justifier cette réponse avec la propriété suivante: si d et d' s'intersectent, alors le point d'intersection appartient forcément à la droite d'intersection des plans SAB et SCD (la réciproque de cette propriété est vraie). L'élève qui s'appuie sur l'observation du dessin, donc sur le « vu » peut prolonger mentalement ou non les deux droites et percevoir un point d'intersection entre celles-ci. La réponse à la question sera alors « Oui ». Cependant, rien n'empêche l'élève de considérer que les deux droites soient ou non coplanaires, l'amenant ainsi à

répondre « On ne peut rien dire ». Pour cette question, nous considérons donc que les deux réponses attendues sont « Non » et « On ne peut rien dire ».
La réponse attendue à la question 5 est « On ne peut rien dire », puisque les deux droites peuvent être contenues dans un même plan et donc être sécantes, tout comme elles peuvent ne pas l'être et du coup être gauches[3]. Cependant, le dessin proposé est très semblable à celui présenté dans les manuels pour illustrer que deux droites de l'espace sont sécantes, à la différence près que, dans les manuels, le point d'intersection est explicitement indiqué sur le dessin. Les réponses données à cette question peuvent donc être influencées par un effet de contrat qui amènerait l'élève à répondre par « Oui ».

2.2.3 Analyse des réponses

Nous analysons ici les 68 copies d'élèves de première que nous avons recueillies. Le temps laissé aux élèves pour répondre à ce questionnaire n'a jamais dépassé 15 minutes. Dans un premier temps, nous présentons de manière assez globale dans un tableau les réponses données par les élèves pour les trois thèmes abordés. Nous essayons ensuite de déduire du dépouillement des copies et de sa confrontation à notre analyse a priori des éléments de réponse à notre problématique initiale présentée à la section 2.1. Nous illustrons également nos propos par des copies d'élèves pour chaque question.

Le tableau 3 reprend les réponses « Oui » (O), « Non » (N) et « On ne peut rien dire » (RD) obtenues pour chaque question. La réponse attendue est à chaque fois indiquée en gras. Les abréviations C1, C2, C3 et C4 désignent les différentes classes dans lesquelles nous sommes allées proposer le questionnaire. Les nombres en dessous de chaque classe représentent le nombre d'élèves au sein de cette classe.

	Q1			Q2			Q3			Q4			Q5			Q6		
	O	N	RD	O	N	**RD**	O	N	**RD**	O	**N**	**RD**	O	N	**RD**	**O**	N	RD
C1 (19)	15	0	4	6	2	10	5	4	10	12	2	5	3	1	14	8	7	3
C2 (6)	3	0	3	4	0	2	1	0	5	5	0	1	0	1	5	4	2	0
C3 (18)	1	1	16	2	4	12	2	2	14	10	1	7	3	1	14	7	9	2
C4 (25)	13	2	10	8	2	15	6	2	17	15	6	4	5	2	18	4	20	1
Tot (68)	32	3	33	20	8	39	14	8	46	42	9	17	11	5	51	23	28	6

Tableau 3. *Résultats globaux*

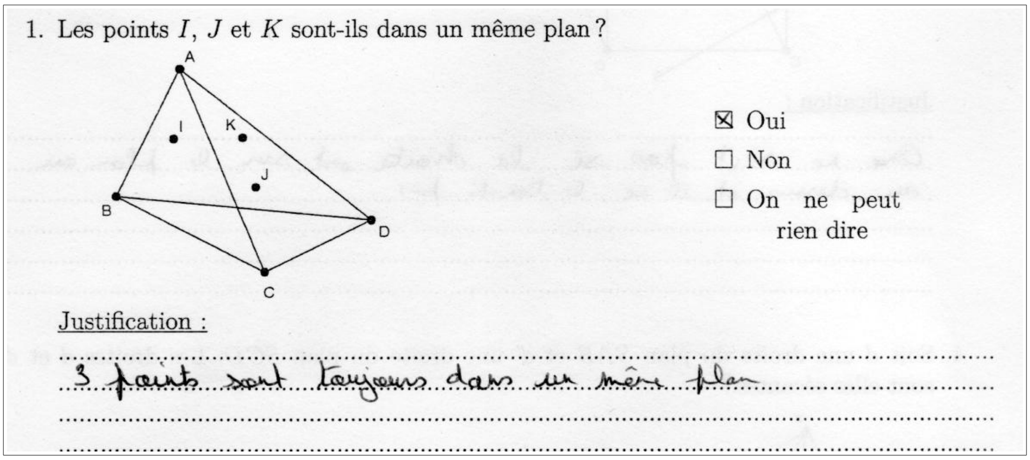
a) Incidence de trois points

Question 1

Pour cette question, les réponses obtenues varient d'une classe à une autre. Ainsi pour la classe C1, la tendance va vers la réponse « Oui » alors que pour la classe C3, c'est la réponse « On ne peut rien dire » qui est majoritaire. Globalement, les réponses se partagent entre « Oui » et « On ne peut rien dire ».

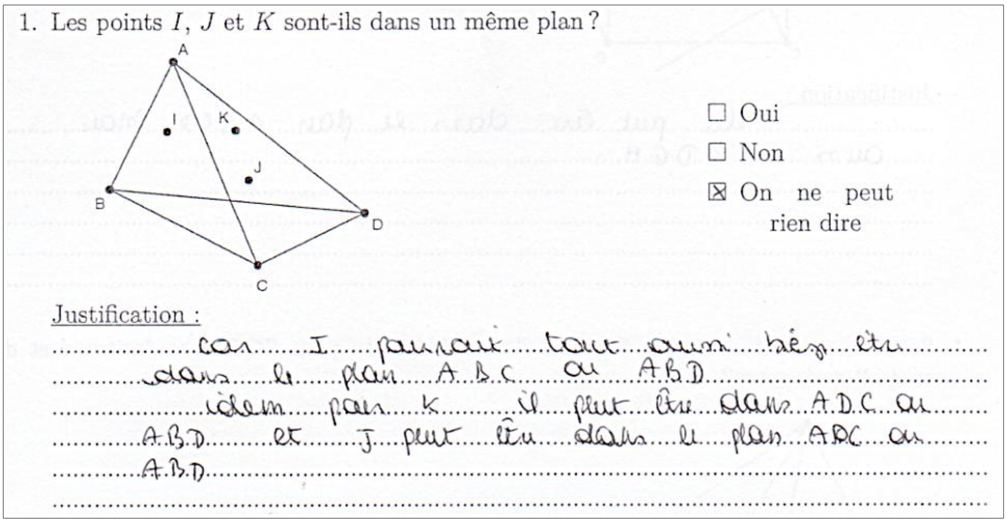
3 Deux droites sont gauches si elles n'ont aucun point commun et ne sont pas coplanaires (définition reprise du manuel *Espace Math* 5^e^/6^e^).

Les élèves qui répondent correctement justifient leur réponse en énonçant la propriété mathématique attendue de la manière suivante, comme dans la copie 1: « trois points déterminent un plan ». Cette propriété est bien entendu vraie mais nous remarquons qu'elle n'est pas énoncée comme dans la plupart des manuels sous la forme « trois points non alignés déterminent un seul plan ». Pour nous, il n'est pas du tout clair que les élèves soient conscients que si les trois points sont alignés, alors il y a en fait une infinité de plans possibles, mais la propriété, telle qu'ils l'énoncent, est néanmoins correcte.



Copie 1

Les élèves qui ont choisi de répondre à la question par « On ne peut rien dire » estiment ne pas avoir suffisamment d'informations pour se prononcer. La copie 2 illustre le type d'argumentation que nous avons trouvé dans les copies.



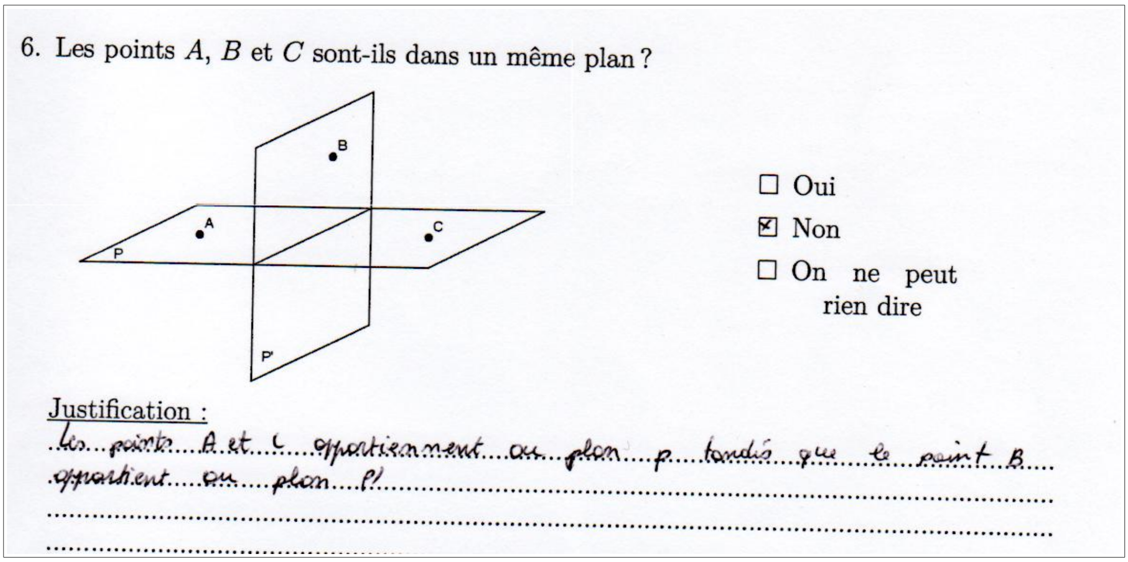
Copie 2

Comme le prévoyait notre analyse a priori, les réponses correctes sont associées à l'utilisation d'une propriété géométrique. Par contre, notre analyse prévoyait que les élèves qui s'appuient sur ce que le dessin semble montrer répondent par « Non » à la question. Or, c'est la réponse « On ne peut rien dire » qui est davantage présente. Nous faisons l'hypothèse que les élèves qui ont choisi cette réponse se sont quand même appuyés sur le « vu » en essayant de lire sur le dessin l'appartenance de chaque point à une face du solide et sans faire appel à des propriétés géométriques du cours. Il est possible que si nous avions précisé dans l'énoncé à quel plan appartient chaque point, ces mêmes élèves auraient choisi la réponse « Non ».

Question 6

Dans les classes C1, C2 et C3, les réponses sont partagées entre « Oui » et « Non ». En revanche, dans la classe C4, la réponse « Non » est largement majoritaire. Globalement, les choix des élèves se répartissent entre « Oui » et « Non ».

Les élèves qui répondent par « Non » à la question s'appuient en général sur le raisonnement suivant. Le dessin montre que les points A et C sont dans le plan P et le point B est dans le plan P'. Comme les plans P et P' sont distincts, les élèves en déduisent que les trois points A, B et C ne sont pas dans un même plan. En fait, les élèves se restreignent au dessin et à ce qu'ils peuvent y lire directement, donc au « vu ». Ils ne parviennent pas à faire ce pas de côté pour « imaginer » le plan formé par les trois points qui n'est pas explicitement présent sur le dessin. La copie 3 illustre un raisonnement de ce type.


6. Les points A, B et C sont-ils dans un même plan ?

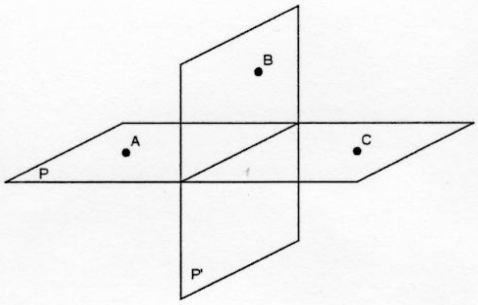
☐ Oui
☒ Non
☐ On ne peut rien dire

Justification : Les points A et C appartiennent au plan P tandis que le point B appartient au plan P'

Copie 3

Les élèves qui répondent correctement utilisent la propriété attendue, comme à la question 1.

6. Les points A, B et C sont-ils dans un même plan ?



☒ Oui
☐ Non
☐ On ne peut rien dire

Justification :
3 points peuvent formé un plan
~~[illegible]~~

Copie 4

En conclusion, nous pouvons déduire pour ce thème de l'incidence de trois points qu'il est encore peu maîtrisé par les élèves interrogés. En effet, pour les deux questions, le nombre de réponses erronées est significatif: 36 réponses incorrectes contre 32 pour la question 1 et 34 réponses incorrectes contre 23 pour la question 6. La question 6 semble poser plus de difficultés aux élèves que la question 1. Lorsque nous nous focalisons sur les valeurs de la variable, nous constatons que la variable « Sans solide » est moins bien réussie que la variable « Solide » pour ce thème. En ce qui concerne les justifications des élèves, nous remarquons deux grandes tendances: celles basées sur une propriété géométrique et celles établies par les observations faites de la part des élèves à partir du dessin. Les élèves qui se basent sur une propriété géométrique répondent correctement aux deux questions. Par contre, ceux qui se basent uniquement sur le dessin commettent des erreurs et ne répondent pas correctement à une, voire aux deux questions. C'est donc le « su » qui permet ici aux étudiants de répondre de manière correcte aux questions.

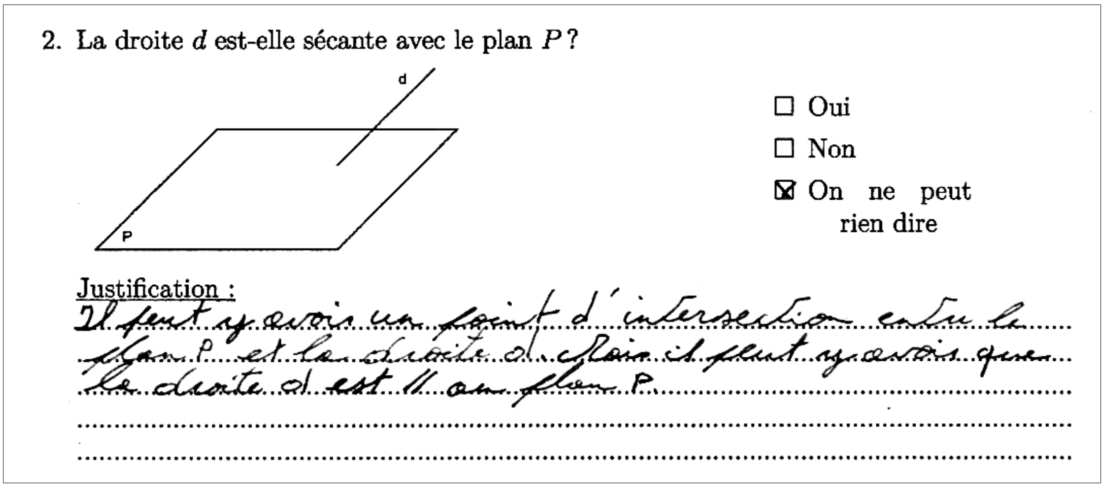
En ce qui concerne la formulation mathématique des justifications, les élèves citent une propriété correcte. Remarquons que ce n'est pas explicitement l'énoncé qui se trouve classiquement dans les manuels et dans les cours. Bien entendu, la propriété donnée par les élèves est mathématiquement correcte puisque trois points déterminent toujours au moins un plan (et une infinité de plans lorsque les points sont alignés). Mais ce constat soulève pour nous la question de savoir quel sens donnent-ils à l'importance des mots qui sont présents dans une propriété mathématique.

b) Positions relatives d'une droite et d'un plan

Question 2

Le tableau 3 montre que la majorité des réponses données est « On ne peut rien dire » dans les classes C1, C3 et C4. Dans la classe C2, la tendance est plutôt au « Oui » mais cette classe n'est composée que de six élèves. Nous estimons donc qu'elle ne vient pas perturber les résultats globaux de manière significative. Globalement, la réponse la plus fréquemment donnée est « On ne peut rien dire ».

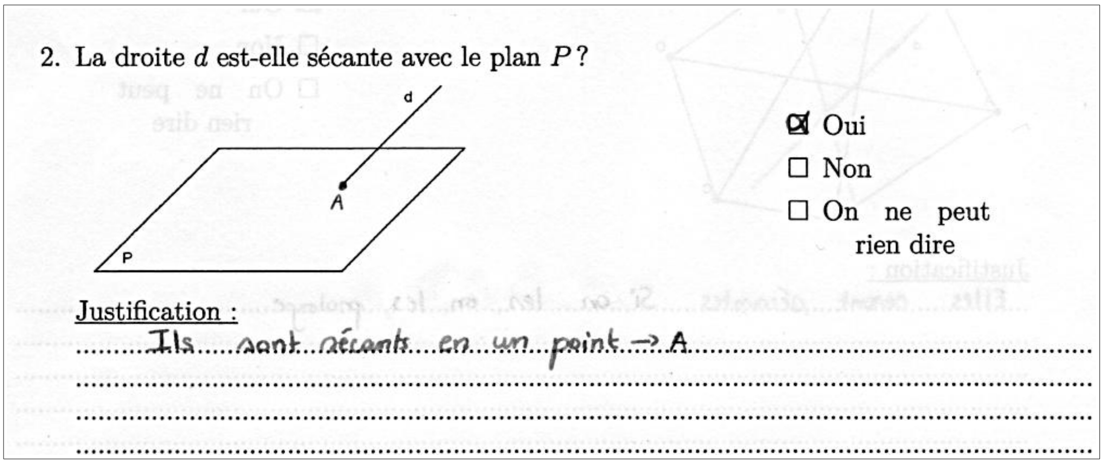
Les élèves motivent ce choix en expliquant que la droite peut être parallèle au plan ou bien lui être sécante, comme dans la copie 5.


2. La droite d est-elle sécante avec le plan P ?

Justification :
Il peut y avoir un point d'intersection entre le plan P et la droite d. Mais il peut y avoir que la droite d est // au plan P.

Copie 5

Les élèves qui répondent par « Oui » pensent que la droite coupe le plan en un point et certains d'entre eux placent ce point sur le dessin, comme dans la copie 6.


2. La droite d est-elle sécante avec le plan P ?

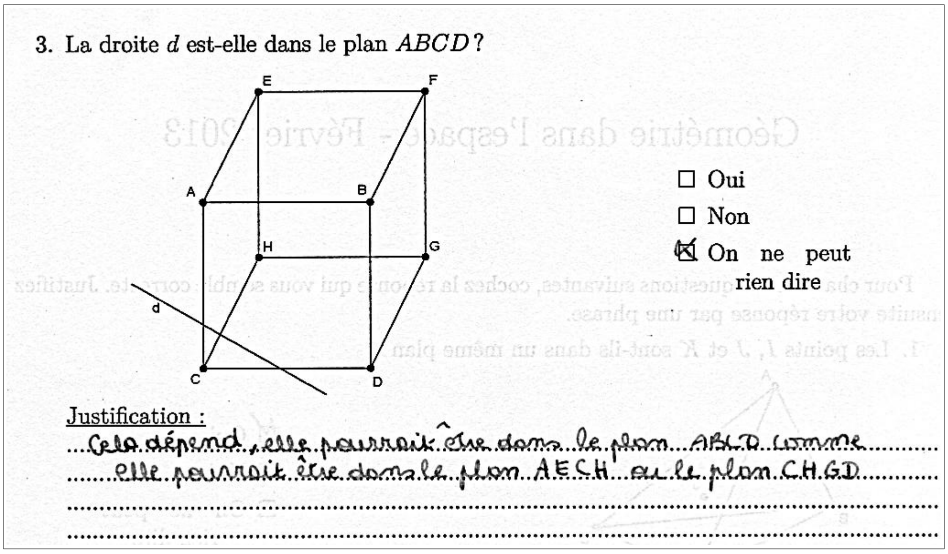
Justification :
Ils sont sécants en un point → A

Copie 6

Comme notre analyse a priori le prévoyait, la majorité des élèves a correctement répondu à cette question. Par contre, elle prévoyait que certains élèves répondraient par « Non » s'ils considéraient le dessin comme correspondant au dessin « type » représentant une droite parallèle à un plan. Nous remarquons qu'ils sont largement minoritaires. En effet, le tableau 3 indique que seuls 8 élèves ont choisi cette réponse. De plus, nous n'avons pas prévu qu'une très grande partie des élèves répondraient par « Oui » en justifiant que la droite est sécante au plan en plaçant sur le dessin le point d'intersection. Pour cette question, beaucoup d'élèves ont donc pu remettre en question ce que le dessin semble montrer et formulent correctement les justifications.

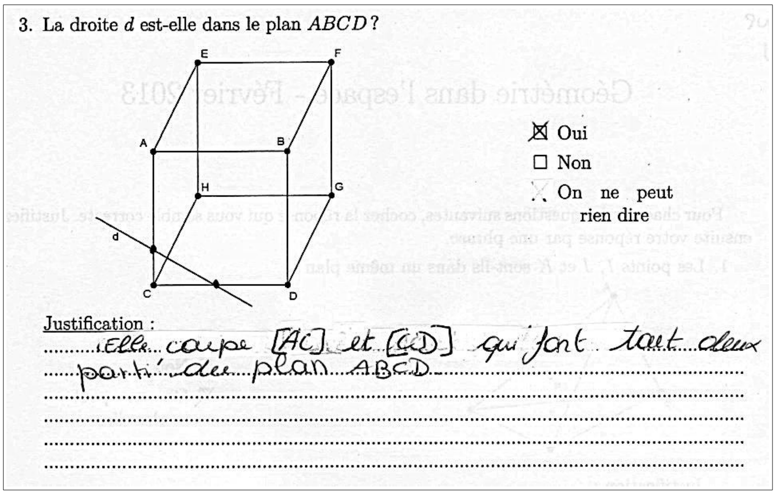
Question 3

Nous remarquons dans le tableau 3, et ce dans toutes les classes, que la plupart des élèves ont répondu correctement par « On ne peut rien dire ». Ceux qui répondent correctement évoquent le fait que la perspective ne permet pas de donner la position de la droite par rapport au cube, comme dans la copie 7.



Copie 7

Les élèves qui répondent par « Oui » essayent d'utiliser une propriété géométrique indiquant que si une droite est sécante à deux droites d'un même plan alors cette droite est incluse dans le plan. Ce faisant, ils doivent prouver que la droite d est bien sécante à deux droites contenues dans un même plan. Pour le montrer, ils se basent sur le dessin et sur les éventuelles intersections de droites. Dans la copie 8, nous pouvons remarquer un tel raisonnement où l'élève perçoit une intersection avec les droites AC et CD et conclut que la droite d est dans le plan ABCD. Notons que beaucoup d'élèves ayant répondu par « Oui » ont tracé les points d'intersections de la droite d avec les droites AC et CD.



Copie 8

Cet élève utilise des propriétés liées à l'incidence (spatiale) entre plan et droites relevant d'une certaine manière de décoder le dessin. Il s'appuie donc sur ce qu'il peut lire sur le dessin sans se dire que ce n'est pas l'unique possibilité de décodage.

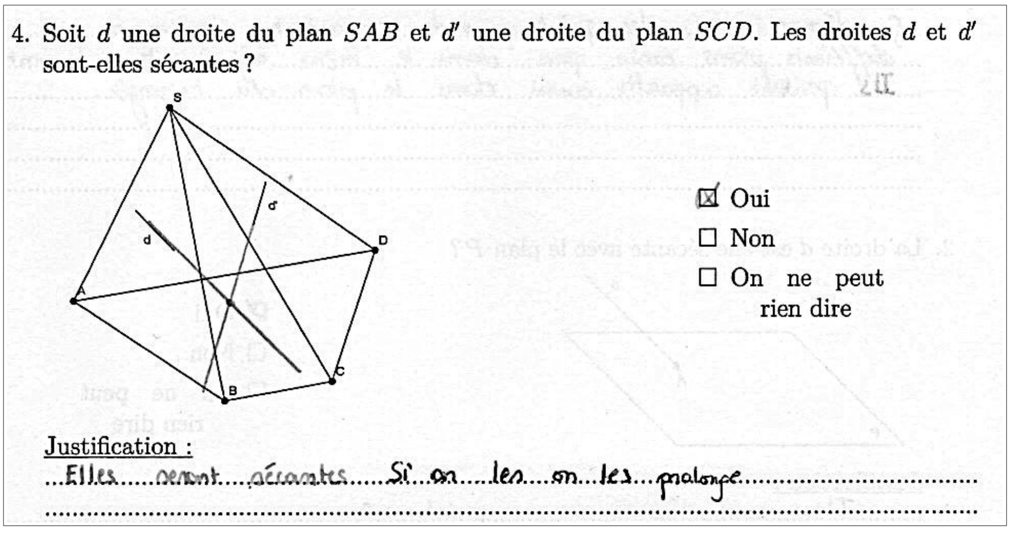
Les résultats correspondent à notre analyse a priori. Parmi les élèves qui ont répondu « Non », certains se sont justifiés par le fait que la droite est contenue dans un autre plan que ABCD. Nous faisons l'hypothèse qu'ils ont eu une perspective du cube précise et n'ont jamais essayé d'en avoir une autre. Pour l'expliquer, ils ont également eu recours à la présence d'intersections avec d'autres droites.

En conclusion, nous pouvons dire que ce thème des positions relatives d'une droite et d'un plan ne pose pas de grandes difficultés aux élèves puisque la majorité a répondu et justifié correctement. Nous pouvons remarquer que la question 3 est mieux réussie que la 2. Le dessin à étudier à la question 3 laisse peut-être la place à moins d'interprétations visuelles possibles que la question 2. Ce thème a aussi donné lieu à quelques tracés supplémentaires de la part des élèves, notamment le pointage des intersections entre objets géométriques comme dans les copies 6 et 8.

c) Positions relatives de deux droites entre elles

Question 4

Les élèves se sont très largement dirigés vers la réponse « Oui ». Cette question est donc très mal réussie.
Nous trouvons deux catégories de réponses parmi les élèves qui pensent que les deux droites sont sécantes. Une majorité d'élèves explique tout d'abord que si on prolonge les deux droites, elles seront sécantes et beaucoup d'entre eux prolongent chaque droite pour indiquer le point d'intersection sur le dessin, comme dans la copie 9.


4. Soit d une droite du plan SAB et d' une droite du plan SCD. Les droites d et d' sont-elles sécantes ?

☒ Oui
☐ Non
☐ On ne peut rien dire

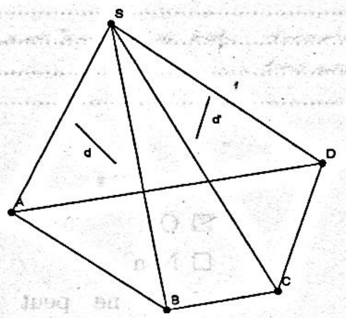
Justification :
Elles seront sécantes si on les on les prolonge

Copie 9

Dans une plus faible proportion, certains élèves justifient par le fait que deux droites incluses dans des plans sécants sont elles-mêmes sécantes. Ils font donc appel à une propriété géométrique incorrecte, ne tenant pas compte de la situation où les deux droites pourraient être gauches.

Pour les élèves qui répondent « Non », les droites ne sont pas sécantes car elles ne sont pas contenues dans un même plan. Il est possible que ces élèves ne se détachent pas du dessin pour envisager que ces deux droites pourraient être coplanaires. Ceci est illustré par la copie 10.

4. Soit d une droite du plan SAB et d' une droite du plan SCD. Les droites d et d' sont-elles sécantes ?



☐ Oui
☒ Non
☐ On ne peut rien dire

Justification :
Non car elles n'appartiennent pas au même plan

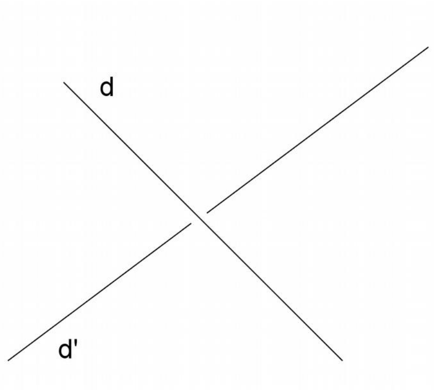
Copie 10

Comme notre analyse a priori le prévoyait, les élèves ayant répondu par « Oui » sont restés au stade du « vu » et ont appuyé leur interprétation du dessin en traçant le point d'intersection des deux droites. Par contre, nous constatons que les élèves qui ont correctement répondu et dont on peut penser qu'ils s'appuient sur le « su », ont finalement fourni une justification correcte.

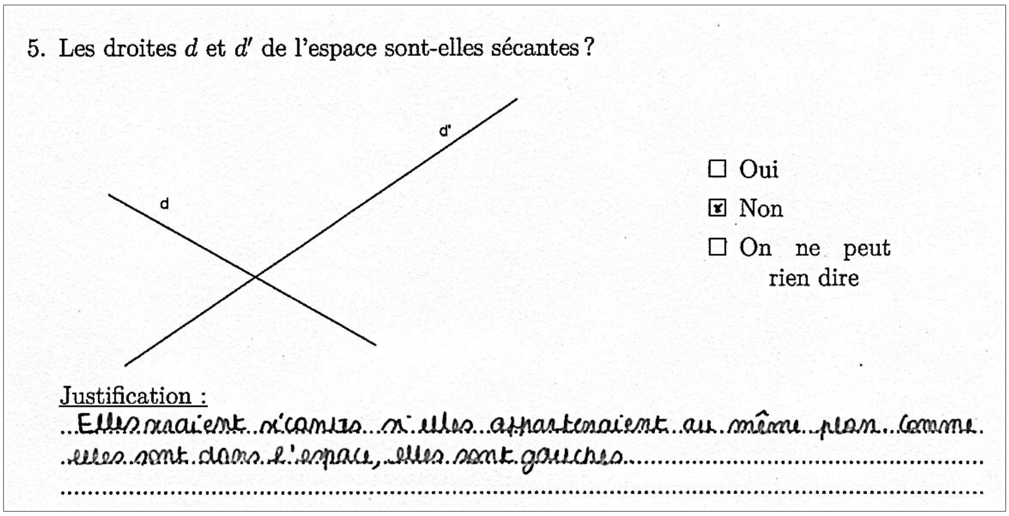
Question 5

Le tableau 3 montre que les élèves ont largement répondu de manière correcte par « On ne peut rien dire ». Ce constat est frappant puisque cette question relève du même thème que la question précédente où nous avons constaté un taux d'échec très élevé.

Les élèves qui répondent correctement justifient leur réponse par l'appartenance ou la non appartenance des droites à un même plan. Autrement dit, si les droites sont dans un même plan alors elles sont sécantes, sinon elles sont gauches. Ceci est illustré dans la copie 11. Comme dans le thème sur les positions relatives d'une droite et d'un plan, nous pensons qu'il y a peut-être ici aussi un effet de contrat car l'élève sait qu'on est en géométrie spatiale. Du coup, il sait aussi qu'il est possible que les droites ne soient pas dans un même plan.
Le contexte scolaire peut donc grandement influencer les réponses données ici par les élèves. De plus, selon la représentation-type souvent rencontrée dans les manuels, si les droites étaient gauches (donc si la réponse à la question était oui), alors le trait de celle qui est la plus éloignée du lecteur sur le dessin serait interrompu lorsque cette droite passe derrière l'autre, comme l'illustre l'exemple 2.

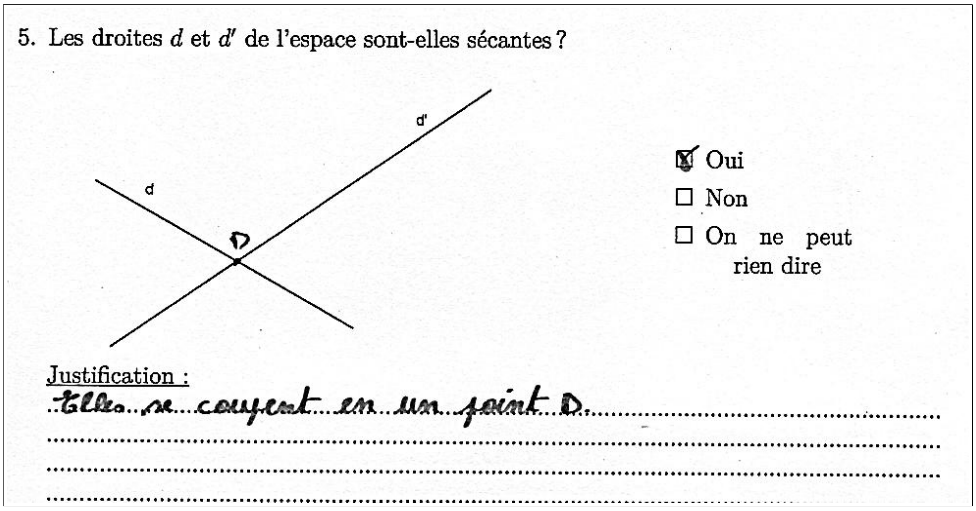


Exemple 2. *Représentation-type de deux droites gauches*



Copie 11

Les élèves qui répondent par « Oui » s'appuient sur le dessin et positionnent le point d'intersection des droites d et d', comme dans la copie 12.



Copie 12

La majorité des élèves répond et justifie correctement. Certains élèves ayant répondu par « Oui » se placent dans le plan et considèrent que les droites sont sécantes. Une hypothèse peut être que les élèves se sont rappelés du dessin « type » pour représenter deux droites sécantes vu dans le cours et dans les manuels et qu'ils ne se sont pas placés dans l'espace. Pourtant, la convention pour ce dessin « type » est d'y intégrer un point supplémentaire montrant leur intersection. La principale différence entre les deux dessins consiste en l'absence ou la présence du point d'intersection des deux droites. La plupart des élèves ayant répondu « Non » n'ont pas considéré la possibilité que les droites puissent être contenues dans un même plan et donc être sécantes. Cela est peut être lié au fait que l'énoncé précise qu'il s'agit de « droites de l'espace ».

En conclusion, nous constatons que pour ce thème des positions relatives de deux droites entre elles, la question 4 est moins bien réussie que la question 5. Notons que la question 4 a un taux de réussite de 13% et la question 5 de 76%. Elles constituent respectivement le plus bas et le plus haut taux de réussite de l'ensemble du questionnaire. Ce thème n'est maîtrisé par les élèves que lorsque nous travaillons avec la variable « Sans solide », la variable « Solide » posant de nombreuses difficultés quant à la configuration spatiale de l'objet géométrique et aux positions prédéfinies des objets étudiés. En ce qui concerne la question 4, c'est sans doute la question qui nécessite une utilisation « plus poussée » des propriétés mathématiques du cours par rapport aux autres questions. Même si des raisonnements semblables sont travaillés avec les élèves dans les cours (Nihoul, 2013), la difficulté relève peut-être ici davantage d'une mobilisation des propriétés, du « su » donc que de l'interprétation du dessin.

2.2.4 Synthèse des résultats

Les questions 2, 3 et 5 sont bien réussies, avec le plus haut taux de réussite pour la question 5. Au contraire, ce sont les questions 1, 4 et 6 qui sont sources de difficultés chez les élèves. Le thème des positions relatives d'une droite et d'un plan est le mieux maîtrisé par les élèves.

En ce qui concerne les variables prises en compte, ce sont les dessins qui représentent un solide qui engendrent le moins de réponses incorrectes. Comme nous l'avons souligné à plusieurs reprises, le questionnaire contient des questions qui renvoient à des représentations-types du cours ou des manuels. Ainsi, pour des raisons de contrat, les questions liées à la variable « solide » incitent peut-être l'élève à se dire que c'est du point de vue de ses connaissances qu'il doit interpréter le dessin et ne pas s'appuyer sur ce qu'il voit. C'est donc normal qu'il cherche à décoder les informations que donne à voir le dessin à partir de ses connaissances. La difficulté réside alors dans la disponibilité des propriétés en relation avec un décodage important du dessin.

Cet effet de contrat, que nous avons peut-être sous-estimé dans notre analyse a priori, apparaît selon nous comme une limite méthodologique dans le choix du questionnaire comme outil pour répondre à notre question de recherche visant à caractériser comment les élèves s'appuient sur le « vu » et le « su ». Les réponses des élèves montrent néanmoins que les questions les moins bien réussies sont celles qui requièrent une forme de décodage 2D-3D. À ce stade de leur parcours, les élèves savent que c'est le « su » qui est un élément de validation mais leur difficulté consiste à choisir à quel moment et de quelle manière ce « su » intervient. Du coup, l'utilisation de représentations-types dans certaines questions ne pose pas réellement la question de l'interprétation des objets géométriques.

Enfin, les analyses des copies ont aussi révélé que les élèves ayant justifié leurs réponses formulent des propriétés qui sont pour la grande majorité correctes sur un plan mathématique. Nous n'avons en effet trouvé que peu de formulations incorrectes. Il s'agit d'un aspect positif. Les propriétés semblent donc être disponibles lorsqu'elles doivent être utilisées de manière isolée. Cependant, nous avons vu que lorsque ces propriétés doivent être combinées de manière déductive, la tâche s'avère plus complexe.

Conclusion

Comme nous l'avons expliqué, ce travail est avant tout initié par un questionnement d'une future enseignante voulant mieux comprendre les difficultés des élèves en géométrie spatiale. C'est la raison pour laquelle nous avons consacré notre travail de fin d'études à ce domaine. Partant d'un questionnement général sur les difficultés des élèves à interpréter des représentations planes d'objets de l'espace, nous avons étudié des travaux en didactique de la géométrie pour mieux comprendre les difficultés recensées chez les élèves en matière de décodage des dessins représentant une figure géométrique de l'espace et en matière de visualisation. Nous avons ensuite emprunté les outils de Parzysz (1988) et un questionnaire élaboré par Chaachoua (1997) pour déterminer comment des élèves en classe de première en Belgique francophone mettent en œuvre cette dialectique entre le « vu » et le « su ».

Le dépouillement du questionnaire montre que les élèves cherchent à décoder les dessins qui leur sont proposés en faisant appel à des propriétés du cours et semblent donc en général se placer du côté du « su », laissant penser qu'ils dépassent le stade de l'évidence visuelle, c'est-à-dire le « vu ». Cependant, nous avons souligné les limites du choix des questions retenues dans notre travail dans lesquelles certaines erreurs peuvent être expliquées par une « sur-interprétation » de la représentation plane. Ainsi, c'est peut-être davantage un effet de contrat qui amène les élèves à décoder le dessin, et pas forcément à se placer spontanément du côté du « su », et à chercher des relations qui ne sont pas visibles a priori pour valider leur choix de réponse. Ces résultats rejoignent en partie ceux obtenus par Chaachoua (1997) puisque son expérimentation montrait notamment que les justifications des élèves qui s'appuient uniquement sur l'évidence de la perception, donc sur le « vu », sont minoritaires. Une comparaison des deux expérimentations est donnée dans Nihoul (2013).

Vu l'effectif réduit de notre population, nous sommes conscientes de la portée restreinte de notre expérimentation qui ne peut établir qu'une ébauche des principales difficultés des élèves. Il serait aussi intéressant d'analyser le cours donné dans chaque classe sur la géométrie spatiale pour en observer la portée de chacun. Ce sujet ouvre donc la voie à d'autres perspectives de recherche et nous montre que la question de comprendre les difficultés des élèves en géométrie spatiale reste complexe.

Bibliographie

ADAM A., LOUSBERG F. (2007). *Espace Math 5e/6e*, De Boeck édition.

ARSAC G. (1989). La construction du concept de figure chez les élèves de 12 ans. *Proceedings of the thirteenth Conference of the International Group for Psychology of mathematics*, 85-92, Ed GR Didactique et acquisition des connaissances scientifiques.

CHAACHOUA H. (1997). Géométrie dans l'espace, le point sur la lecture des dessins par des élèves en fin du collège. *Petit x*, 48, 37-68.

DUVAL R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65.

DUVAL R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciations des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives*, 10, 5- 55.

LABORDE C., CAPPONI B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 14, 1/2, 165-210.

MARCHAND P. (2006). Comment développer les images mentales liées à l'apprentissage de l'espace en trois dimensions ? *Annales de didactique des mathématiques et de sciences cognitives*, 11, 103-121.

MINISTERE DE LA COMMUNAUTE FRANCAISE (2000). Programme d'études du cours de Mathématiques.

MITHALAL J. (2014). Voir dans l'espace: est-ce si simple ? *Petit x*, 96, 51-73.

NIHOUL C. (2013). *Une étude de quelques difficultés chez les élèves liées au passage de la géométrie plane à la géométrie dans l'espace.* Mémoire. Université de Mons (UMONS). Belgique.

PARZYSZ B. (1988). "Knowing" vs "seeing", problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79-92.

PARZYSZ B. (1991). Espace, géométrie et dessin. Une ingénierie didactique pour l'apprentissage, l'enseignement et l'utilisation de la perspective parallèle au lycée. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 11, 2/3, 211-240.

Annexe. Programmes du collège et du lycée pour l'enseignement de la géométrie en Belgique

Cinquième et quatrième

- Solides et figures planes : observation et description des solides avec le vocabulaire adéquat, représentation des solides dans le plan en perspective cavalière, étude des polyèdres, des polygones réguliers, des quadrilatères et des triangles, calculs de périmètres, d'aires et de volumes.
- Figures géométriques élémentaires et distance : notions de plan, droite, segment de droite, angle, distance entre deux points, distance entre un point et une droite, distance entre deux droites parallèles, positions relatives de deux cercles, positions relatives d'une droite et d'un cercle.
- Transformation du plan : isométries, translation, symétries, rotations, axe et centre de symétrie, isométries et coordonnées, projections parallèles, agrandissement et réduction de figures.
- Constructions de figures : problèmes de construction (suivre une procédure de construction ou reconstruire une figure donnée).
- Propriétés géométriques : droites parallèles, droites perpendiculaires, angles et droites remarquables, identifier un triangle ou un quadrilatère.

Troisième et seconde

- Théorème de Pythagore : théorème et démonstration, caractérisation d'un triangle rectangle, problèmes de construction, recherche et démonstration de propriétés.
- Configurations de Thalès : propriétés liées aux configurations de Thalès, propriétés des proportions, problèmes de construction, recherche et démonstration de propriétés.
- Angles : angles au centre, inscrits, tangentiels, angles à côtés parallèles, perpendiculaires, caractérisation d'un triangle rectangle par son inscriptibilité dans un demi-cercle.
- Cas d'isométries et de similitudes des triangles : figures isométriques, cas d'isométries des triangles, figures semblables, cas de similitudes de triangles, activité de construction et de démonstration.
- Calcul vectoriel : vecteur du plan, relation de Chasles, produit scalaire dans le plan, applications (alignement et parallélisme).
- Géométrie : lieux géométriques, équations médiatrice, cercle et parabole.

Première et terminale (6h hebdomadaires) :

- Calcul vectoriel : vecteur de l'espace, relation de Chasles, produit scalaire dans l'espace, propriétés.
- Géométrie dans l'espace : projection parallèle, perspective cavalière, caractérisation d'un plan et d'une droite, positions relatives de deux droites, d'une droite et d'un plan, de deux plans, parallélisme, problèmes de constructions dans l'espace (point de percée et section plane), orthogonalité, homothéties, équations vectorielles, paramétriques et cartésiennes d'une droite et d'un plan, distance entre deux points, un point et une droite, un point et un plan.
- Géométrie plane : coniques et applications.