DIFFICULTÉS D'APPRENTISSAGE DES NOMBRES COMPLEXES EN FIN DE SECONDAIRE

Imène GHEDAMSI
Université de Tunis

Raja TANAZEFTI
Université de la Manouba

Résumé. L'introduction des nombres complexes en fin de lycée est généralement accompagnée d'un bouleversement conceptuel lié à l'obligation d'accepter l'existence d'un nombre dont le carré est négatif. Les diverses représentations des nombres complexes, auxquels il est difficile d'associer des mesures ou un modèle concret, complexifient le travail des élèves. Cet article présente l'analyse d'un questionnaire soumis à des élèves de fin du lycée à la suite de l'institutionnalisation des nombres complexes. Les résultats auxquels nous avons abouti permettent de catégoriser et de formaliser les difficultés les plus courantes auxquelles ces élèves sont confrontés dans leurs manipulations des nombres complexes. Cette étude pourrait constituer une base convenable pour penser une alternative d'enseignement de ces nombres en fin du lycée.

Mots clés. Nombres complexes, représentation sémiotique, opérationnalité, généralisation, réformation.

Abstract. The introduction of complex numbers at the end of secondary school compels students to accept the existence of a number whose square is negative. Furthermore, students have to deal with different representations of these numbers and they must be able to move effectively between them. This paper focuses on the difficulties met by students learning complex numbers. The data are taken from written answers to a questionnaire by 100 students. The analysis of the data leads to the categorization and the formalization of the most occurring difficulties; this could also be a useful basis to think about a task design concerning complex numbers.

Key-words. Complex numbers, semiotics, process, generalization.

Introduction

L'enseignement des nombres complexes en fin de secondaire axe généralement sur un travail dans deux catégories algébriques de l'ensemble des nombres complexes : celle de corps et celle de plan affine euclidien[1]. En Tunisie, ces nombres sont introduits une année avant la terminale en section scientifique pour des élèves de 17/18 ans, via au moins quatre représentations : intrinsèque (z, $\bar{z}$, $|z|$) ; cartésienne ($a+i\,b$) ; trigonométrique ($r \cos \theta + i\, r \sin \theta$) et graphique avec coordonnées cartésiennes (affixe d'un point du plan complexe).

1 Plan complexe dans les termes scolaires.

Dans une étude antérieure concernant les attentes institutionnelles[2] (Tanazefti, 2013), nous avions repéré que le travail sollicité des élèves se résume essentiellement à un calcul algébrique dans la catégorie de corps de l'ensemble des nombres complexes, en utilisant les représentations intrinsèque, cartésienne et trigonométrique. Aucun travail relatif aux abus possibles de transfert des résultats connus sur les réels aux nombres complexes n'a pu être noté (relation d'ordre, module et valeur absolue, opération de multiplication, etc.). Par ailleurs, le recours à la représentation graphique de ces nombres devrait permettre de les rendre opérationnels dans la résolution de problèmes géométriques. Or, les tâches institutionnelles qui y réfèrent soit sont résolubles en appliquant les techniques usuelles de la géométrie plane, soit elles limitent le travail des élèves à un basculement vers une autre représentation de ces nombres.

Dans cette étude, nous posons la question du travail réel des élèves à la suite d'un tel enseignement : Quelle est la nature des difficultés auxquelles pourraient être confrontés les élèves dans leur travail avec les nombres complexes ?

Dans un travail précédent, portant sur l'enseignement de l'analyse à la transition lycée/université (Bloch et Ghedamsi, 2005), nous avions défini des variables macro-didactiques afin de

> […] donner une vision plus synthétique des modifications qu'engendre, dans le travail demandé aux étudiants, le passage de l'enseignement du lycée à celui de l'université. (Bloch et Ghedamsi, 2005, p.23).

Par variables macro-didactiques, nous entendions celles qui :

> […] concernent une organisation relativement globale de l'enseignement et non une situation locale d'enseignement d'un nouveau savoir (comme une situation). (Ibidem, p.23)

Le modèle des variables macro-didactiques fournit des critères d'appréciation des spécificités du travail attendu de la part des élèves. Dans ce même texte, nous en définissions onze (les dix variables énoncées ci-dessous plus une variable de 'contexte général') :

> VD1 : le degré de formalisation, et tout particulièrement dans les définitions des concepts ;
>
> VD2 : le registre de validation, soit l'algèbre des limites, soit le raisonnement analytique ;
>
> VD3 : le degré de généralisation requis dans les énoncés : faible ou fort ;
>
> VD4 : le nombre de nouvelles notions introduites dans l'environnement de la limite, comme les développements limités, etc… ;
>
> VD5 : le type de tâches, soit heuristique, graphique, algorithmique ;
>
> VD6 : le choix des techniques et leur routinisation ou non : usage d'une même technique ou amalgame de techniques dont la responsabilité revient à l'étudiant ;
>
> VD7 : le degré d'autonomie nécessaire : faible ou élevé ;
>
> VD8 : le mode d'intervention de la notion, comme processus ou objet ;
>
> VD9 : le type de conversions utilisées entre registres de représentation ;
>
> VD10 : le statut des tâches demandées aux étudiants, soit simple exercice d'application, soit démonstration d'un énoncé auxiliaire mais général. Cette variable est représentative du *contrat didactique* des deux institutions, dans la mesure où elle contribue à préciser la nature de la responsabilité mathématique dévolue aux étudiants. (Ibidem, p.23)

2 Étude fondée sur l'analyse des documents officiels (curriculum et l'unique manuel scolaire) lors de l'introduction des complexes dans une section scientifique une année avant la terminale.

Dans le cadre de l'enseignement des nombres complexes, nous avons repris ces variables telles que citées ci-dessus ; nous utilisons cependant un modèle simplifié composé de trois variables macro-didactiques retenues comme pertinentes en fonction des outils théoriques ayant servi à l'exploration des choix institutionnels. Ces variables – adaptées donc ci-dessous au contexte de l'enseignement des nombres complexes – réfèrent notamment aux exigences de flexibilité cognitive que requiert l'apprentissage de ces nouveaux nombres :

- VD3 : Usage du principe de généralisation. Dans l'histoire de construction des nombres complexes, le principe de permanence consiste à appliquer sur les quantités imaginaires les mêmes règles de calcul que celles sur les quantités - à cette époque "valides". Ce principe traduit la fécondité qu'engendre l'usage de la généralisation dans la construction des nombres complexes. Du point de vue de l'apprentissage, l'usage non contrôlé de ce principe peut être une source de difficultés majeures.
- VD9 : Types de traitements ou de conversions utilisés entre registres de représentations (Duval, 1993). Le travail avec les nombres complexes induit la nécessité de développer une flexibilité permettant de saisir ses différentes représentations, et les changements qu'elles requièrent.
- VD8 : Statut des nombres complexes, processus ou objet (Sfard, 1991). Le statut objet des nombres complexes est intimement lié aux lois qui définissent les structures algébriques auxquelles renvoie l'ensemble C (corps, espace vectoriel, espace affine euclidien, etc.). Par conséquent, à ce niveau du cursus seul un travail embryonnaire dans la structure de corps pourrait être envisageable. En outre, le statut processus de ces nombres renvoie à leur opérationnalité et à la fécondité notionnelle que porte leur usage dans la résolution de problèmes mathématiques. Dans le cadre de cette étude, nous mettons l'accent sur la place des nombres complexes pour résoudre des problèmes de la géométrie plane.

Ce modèle constituera la base théorique de notre projet visant la catégorisation et la formalisation des difficultés éventuelles qui peuvent être rencontrées par les élèves lors de leur manipulation des nombres complexes.

1. Méthodologie de recherche

L'expérimentation que nous avons effectuée n'a pas pour objectif de provoquer des apprentissages, mais de recueillir un certain nombre d'informations concernant le travail des élèves lorsque les tâches proposées réfèrent explicitement ou implicitement aux exigences précédemment soulignées.

Dans le but de donner plus de généricité aux résultats auxquels nous aurions abouti, nous avons choisi comme modalité d'expérimentation la forme d'un questionnaire, comportant huit questions de type QCM et sept questions de type Vrai ou Faux ainsi qu'un espace de deux lignes pour chaque question afin de rédiger la justification. Depuis le début du questionnaire, il est mentionné que le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O. Les tâches sollicitées sont choisies pour leur caractère non standard. Ceci suppose bien évidemment que le questionnaire a été proposé aux élèves après un enseignement du chapitre des nombres complexes. Notre idée est de faire en sorte que les élèves n'aient pas recours d'une manière automatique aux techniques routinières du cours, ce qui nous a amenées à proposer ce questionnaire aux élèves à l'entrée en classe de Terminale avant tout nouvel enseignement sur les nombres complexes.

Nous avons distribué le questionnaire à 100 élèves issus de 6 lycées différents et ce lors de séances d'enseignement. Les élèves ont disposé d'une heure pour répondre au questionnaire. Nous avons finalement pu recueillir un total de 100 traces écrites sur lesquelles repose toute notre analyse.

2. Analyse *a priori* des tâches sollicitées

Le questionnaire est composé de quinze questions réparties dans trois rubriques, de la manière suivante[3] :

- Quatre questions relatives à l'usage du principe de généralisation (VD3) : Q1, Q3, Q4 et Q5.
- Six questions axant sur les diverses représentations des nombres complexes (VD9) : Q2, Q7, Q8, Q9, Q10 et Q11.
- Cinq questions qui réfèrent à l'opérationnalité des nombres complexes (statut processus ou objet, VD8) : Q6, Q12, Q13, Q14 et Q15.

Le découpage des rubriques de ces questions s'identifie donc bien avec les variables macro-didactiques retenues au paragraphe précédent, et vise à caractériser les exigences auxquelles sont confrontés les élèves dans leur travail avec les nombres complexes.

Dans la suite du texte, nous procédons à l'analyse *a priori* de ces questions conformément à la rubrique auxquelles elles sont rattachées, en suivant la démarche suivante :

- description globale de la question ;
- identification de la nature de la tâche, des techniques de résolution ainsi que de leur justification (de sorte à pouvoir légitimer l'inscription de la question dans l'une des trois rubriques citées ci-dessus) ;
- prévision, quand c'est possible, de réponses erronées en tentant d'identifier les raisons qui pourraient expliquer ces réponses.

2.1 Tâches de généralisation

Comme mentionné plus haut, l'introduction des nombres complexes n'est pas explicitement suivie d'un travail approfondi sur les dangers de généralisation non fondée des propriétés des réels aux nombres complexes.
La question Q1 concerne l'étude de la généralisation possible de la relation d'ordre total de $\mathbb{R}$ à **C**. Elle s'énonce comme suit :

Q1 : *Répondre par vrai ou faux : si* $z \in \mathbf{C}$ *et* $z^2 \in \mathbb{R}$, *alors* $z^2 \geq 0$

L'approche institutionnelle utilisée pour introduire les nombres complexes table sur l'impossibilité de trouver un réel dont le carré est égal à –1, l'idée étant de "convaincre" d'abord les élèves de la nécessité d'étendre l'ensemble des réels à un ensemble contenant de tels "nombres". Il est donc légitime d'envisager la donnée directe par les

3 La chronologie d'apparition des questions au sein du questionnaire n'est pas conforme à cette catégorisation : l'idée était de laisser implicite nos choix de recherche afin de donner plus de validité aux résultats qui en seraient établis.

élèves du contre-exemple i (ou d'un autre). Dans tous les autres cas de figure, les élèves ne seraient pas en mesure d'inférer un des résultats fondamentaux légitimant l'existence des nombres complexes. Ceci conforte les faiblesses que peut comporter un projet d'enseignement, quand le choix est celui d'introduire les nombres complexes, en imposant la résolution d'une équation impossible dans $\mathbb{R}$ (Rosseel et Schneider, 2004).
Les questions Q3 et Q5 posées dans cette rubrique réfèrent à la dimension sémiotique qui relie la notion de module et celle de valeur absolue.

Q3 : *Répondre par Vrai ou Faux :* $(1+i)^2 = |1+i|^2$

Le choix du nombre complexe $1 + i$ se justifie par l'occurrence de son apparition ainsi que celle de son carré dans le projet institutionnel. Nous prévoyons que l'une des réponses et justifications possibles pourrait se résumer à remarquer qu'un module est une distance, soit positif et que le carré de $1 + i$ est imaginaire. Toutefois, en raison de la routinisation du calcul algébrique, les élèves pourraient procéder à un calcul algébrique en utilisant la définition du module d'un nombre complexe et les propriétés des opérations dans **C**, puis conclure que le résultat est faux.

Q5 : *Répondre par Vrai ou Faux.*
Soient z et z' dans C ; si $|z| = 1$ *et* $|z+z'| = 1$ *alors* $z' = 0$ *ou* $z' = 2$ *ou* $z' = -2$

L'énoncé intervenant dans cette question est général de sorte à rappeler fortement les propriétés de la valeur absolue. Par ailleurs, si l'on tente de procéder au développement de l'hypothèse, on est tout de suite confronté à un calcul long et pas forcément concluant. Par suite, en cas de réponse juste, la justification pourrait se faire via la donnée d'un contre-exemple, celui par exemple de $z = i$ et $z' = -2i$, qui peut être remarqué par la seule interprétation de la donnée $|z| = 1$.
La question Q4 fait intervenir la structure canonique d'espace affine euclidien de C. Elle s'énonce comme suit.

Q4 : *Répondre par Vrai ou Faux.*
Si $M(a,b) \in P$ *a pour affixe* $z \in$ ***C****, et* $M'(a',b')$ *a pour affixe* $z' \in$ ***C****, alors* $z\,z'$ *est l'affixe de* $M''(a\,a', b\,b')$

L'opération produit a été introduite dans la structure de corps de l'ensemble des nombres complexes. Si l'on se place du point de vue de la structure de corps via la représentation cartésienne, il est possible de voir – moyennant une procédure algorithmique – que la proposition est fausse. Par contre, en travaillant dans la structure affine euclidienne, il est difficile de comprendre le sens derrière le résultat de la multiplication. C'est la raison pour laquelle nous avons opté pour ce choix. A ce niveau du cursus, l'interprétation géométrique du produit n'est possible que dans le cas où l'un des facteurs est de module 1. Car dans ces conditions, le produit n'est autre que l'affixe de l'image d'un point du plan par une rotation, transformation largement manipulée dans le niveau du cursus sollicité. Dans le cadre de cette question, on ne peut penser que les élèves seraient en mesure d'interpréter géométriquement le produit, même si la notion de similitude (qui n'a pas encore été introduite) s'exprime comme la composée d'une translation et d'une rotation. Par cette question, nous visons l'étude de la généralisation abusive des propriétés de la multiplication dans l'ensemble des nombres réels à celles dans ***C.***

2.2 Tâches sur les diverses représentations des nombres complexes

Conformément au travail attendu du côté de l'institution, celui sollicité dans le cadre de cette rubrique se fait dans la structure canonique d'espace affine euclidien de **C.** L'objectif est d'étudier la capacité des élèves à basculer vers une autre représentation que celle évoquée dans le texte de l'énoncé. Il s'agit pour nous de recueillir des données permettant d'inférer sur la consistance des possibilités de changements de représentations "offertes" par l'institution. Ceci est d'autant plus important que l'apprentissage des changements de représentations sémiotiques est une condition nécessaire pour développer un travail visant l'opérationnalité des nombres complexes.

Les questions proposées aux élèves prennent en charge l'étude de deux types de changements de représentations : l'interprétation géométrique d'une configuration complexe et la réciproque, à savoir l'expression d'une configuration géométrique en termes de relations entre nombres complexes. Dans ce qui suit, nous étudions séparément chaque groupe de questions en fonction du type de changement.

a) Interprétation complexe d'une configuration géométrique fournie dans le texte de l'énoncé

Cette étude se base sur les questions Q2, Q7, Q9, Q10 et Q11. Dans les questions Q2 et Q7, le registre sémiotique du côté des énoncés est mixte, intrinsèque et graphique cartésien.

Q2 : *Cocher la bonne réponse.*

Si M'(z') est l'image de M(z) par l'homothétie h(O, 2), alors :

a) $z' = 2z$ *b)* $z' = z+2$ *c)* $z' = iz +2$

La tâche attendue est classique : elle consiste à interpréter une égalité de la forme $\overrightarrow{OM}'=\alpha\,\overrightarrow{OM}$, *où* $M'(z')$ *et* $M(z)$ *par* $z'=\alpha z$.

L'étude institutionnelle que nous avons faite nous a permis de souligner l'absence d'un travail dans la catégorie de plan vectoriel de **C** en dépit de l'introduction de cette structure via la notion d'affixe d'un vecteur. La manipulation de cette notion se fait exclusivement via la vectorialisation du plan affine euclidien en l'origine O par la donnée d'un repère. Les réponses ou justifications erronées peuvent, par ailleurs, s'expliquer par des carences liées aux connaissances de la géométrie, y compris analytique.
La question Q7 concerne l'interprétation complexe de la distance entre deux points.

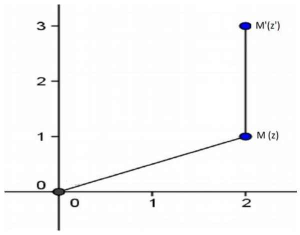
Q7 : *Répondre par Vrai ou Faux.*

Si $M_1(z_1)$ *et* $M_2(z_2)$ *alors* $|z_1 + z_2| = OM_1 + OM_2$

La réponse attendue part de l'interprétation complexe de $OM_1 + OM_2$ par $|z_1| + |z_2|$ qui sera utilisée pour conclure la non validité de la proposition via l'inégalité triangulaire. La donnée de contre-exemples suffit pour justifier la réponse.

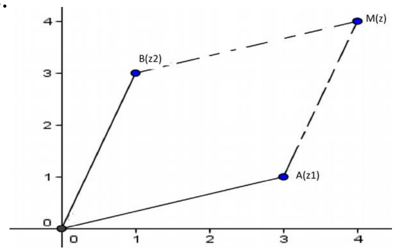
Les questions Q9, Q10 et Q11 tablent sur des énoncés fournis sous forme de figures. C'est là que réside la différence entre les tâches de changement sollicitées dans ce questionnaire et celles institutionnalisées. L'appui sur le graphique permet de développer une preuve pragmatique dont la validité est conditionnée par un contrôle théorique par les élèves. En bref, il s'agit de trois questions à choix multiples où les figures comportent des configurations géométriques qui peuvent être traduites par des égalités vectorielles, et où la question est de faire un choix sur l'affixe d'un point connaissant l'affixe d'un autre.

Q9 : *Cocher la bonne réponse.*



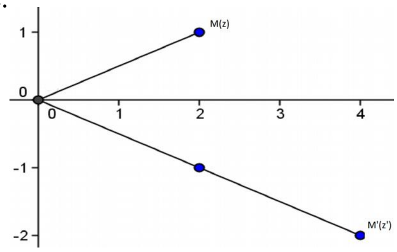
z' est égal à : a) z+2i b) z+2 c)2z

Q10 : *Cocher la bonne réponse.*



L'affixe du point M est : a) z_1z_2 *b)* z_1+z_2 *c)* $z_1 - z_2$

Q11 : *Cocher la bonne réponse.*



L'affixe du point M' est : a) z b) $\overline{z} + 2$ *c) 2 z*

L'une des raisons qui peut expliquer l'échec des élèves face à de telles questions concerne leur difficulté à lire une figure. Dans ces cas de figures, le changement sollicité devrait de plus faire basculer les élèves du registre graphique cartésien vers le registre intrinsèque. Les réponses ou justifications erronées s'expliquent au moins, de deux manières :

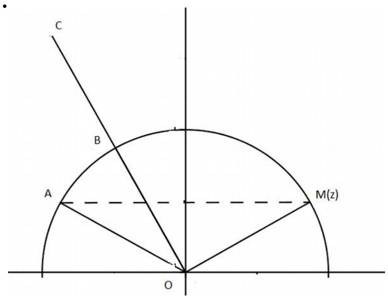
– soit les élèves n'arrivent pas à traduire correctement la figure en jeu – ceci ne s'inscrit pas dans le cadre des investigations liées à cette recherche,

– soit ils sont confrontés à des difficultés liées aux exigences cognitives que requièrent les changements de représentations.

b) Interprétation géométrique d'une configuration complexe fournie dans le texte de l'énoncé

Seule la question Q8 réfère à ce groupe. Ce type de tâche est sollicité par l'institution, où il s'agit de montrer qu'un point B est l'image d'un point A par une transformation à déterminer, à partir d'une égalité de la forme $z_B = z\, z_A$, z étant de module *1* et d'argument remarquable.

Q8 : *Cocher la bonne réponse.*



Le point d'affixe iz est : a) A b) B c) C

Dans ce questionnaire, la donnée de la figure devra en plus aider les élèves à se représenter une telle transformation, et passer au registre graphique cartésien pour donner la solution. Même si les questions relatives à cette rubrique s'inscrivent dans la même lignée que celles sollicitées par l'institution pour des changements de représentations, la différence demeure fondamentale. En particulier :

- la majorité des énoncés table sur une figure, pratique quasi-inexistante au niveau des choix institutionnels ;
- les énoncés articulent, dans la majorité des cas, le registre graphique cartésien soit avec le registre cartésien, soit avec le registre intrinsèque ;
- la nature des énoncés (Vrai ou faux et QCM) devrait obliger les élèves à laisser de côté les calculs parfois longs qu'engendre un travail exclusif avec les coordonnées des points du plan.

2.3 Tâches visant l'opérationnalité des nombres complexes

Les questions Q6, Q12, Q13, Q14 et Q15 interviennent pour l'étude de cette rubrique.
La question Q6 est accompagnée d'une figure comportant les points O, A et B, supposée constituer un appui de visualisation pour les élèves.

Q6 : *Cocher la bonne réponse.*

$$Si\ \ z_B = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\, z_A, \quad \textit{alors le triangle OAB est}$$

a) rectangle b) équilatéral c) isocèle

Le choix de ne pas attribuer de valeurs à z_A et z_B devrait obliger les élèves à opérationnaliser les nombres complexes et leurs propriétés pour conclure que le triangle OAB est équilatéral. Dans le cas de données particulières, telle que largement entrepris via les choix institutionnels, les techniques standardisées de la géométrie plane pourraient s'avérer plus efficace.

En s'appuyant sur le fait que $\arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)(2\pi)$, l'interprétation géométrique de $z_B = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_A$ permet de déduire que OA=OB et $\frac{\pi}{3} \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}}\right)(2\pi)$. Il est aussi probable que les élèves utilisent la double égalité $|z_A - z_O| = |z_B - z_O| = |z_A - z_B|$.

La question Q12 traite de l'alignement de points du plan.

> Q12 : *Répondre par Vrai ou Faux.*
> *Si $A(z_A)$, $I(z_I)$ et $B(z_B)$ sont trois points du plan vérifiant $3\ z_B - z_A = 2\ z_I$, alors les points A, B, I sont alignés.*

En dépit du fait que z_A, z_B et z_I sont quelconques, la question n'est pas appuyée par une figure. Afin d'exemplifier les données, les élèves pourraient recourir d'une manière autonome à une figure d'étude et reconnaître que $z_B - z_A = 2(z_I - z_B)$, sauf si une manipulation algébrique leur permet de mettre en place cette égalité. Il s'agit ensuite de l'interpréter géométriquement et déduire que les points A, B et I sont alignés.

Les questions Q13 et Q15 ont pour objectif d'étudier la nature de quadrilatères.

> Q15 : *Répondre par Vrai ou Faux.*
> *Si A, B, C et D sont des points du plan d'affixes respectives :*
> $z_A = 1+i\sqrt{3},\quad z_B = 3+2i\sqrt{3},\quad z_C = 3-2i\sqrt{3}$ *et* $z_D = 1-i\sqrt{3}$
> *alors ABCD est un trapèze isocèle.*

Les points du plan en jeu sont entièrement déterminés via leurs coordonnées cartésiennes, toutefois la question se justifie par le fait qu'elle ne soit pas coutumière et qu'un travail avec les coordonnées dans ce cas de figure n'est pas économique. L'interprétation géométrique des égalités $z_D = \bar{z}_A$, $z_C = \bar{z}_B$ permet de reconnaître que les droites (*AD*) et (*BC*) sont parallèles et que *AB* = *CD*. De même que pour la question précédente, les élèves pourraient placer les points en jeu et utiliser la figure pour conjecturer. Ceci est d'autant plus probable que ces points sont entièrement donnés par leurs coordonnées cartésiennes.
Dans la question Q13, la tâche est intégralement analogue à celle sollicitée par l'institution, sauf que dans ce cas le nombre complexe z est général : comme mentionné précédemment ceci constitue une différence de taille.

> Q13 : *Cocher la bonne réponse.*
> *Soient A, B, C et D des points du plan d'affixes respectives z (non nulles)*
> *iz ; i^2z et i^3z.*
> *Le quadrilatère ABCD est un : a) parallélogramme b) carré c) rectangle*

En optimisant l'opérationnalité des nombres complexes dans la résolution de problèmes géométrique, l'interprétation des égalités $z_C = i\ z_B$, $z_B = i\ z_A$, $z_D = i\ z_C$ permet de déduire que les sommets du quadrilatère *ABCD* sont images successives les uns des autres par une rotation de centre *O* et d'angle *π/2* pour déduire que *ABCD* est carré. La deuxième alternative, moins économique, table sur l'interprétation géométrique des égalités

$z_D = -z_B$, $z_C = -z_A$ $et\, arg(\frac{z_B}{z_A}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ pour établir que *B* et *A* sont respectivement symétriques à *D* et *C* par rapport à *O*, et que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$. Le résultat découle du fait que *ABCD* est alors un parallélogramme ayant un angle droit et deux côtés consécutifs isométriques.

Enfin la question Q14 s'énonce comme suit.

> Q14 : *Répondre par Vrai ou Faux.*
> *Soient A, M et M' trois points du plan d'affixes respectives 3i, z et 2z – 6i.*
> *Si M appartient au cercle de centre A et de rayon 1, alors M' appartient au cercle de même centre et de rayon 2.*

L'interprétation complexe de l'énoncé relatif au fait que le point *M* appartient au cercle de centre *A* et de rayon *1*, permet de déduire que $|z - z_A| = 1$ et que $|z_{M'} - z_A| \neq 2$. L'interprétation, cette fois-ci, géométrique de la dernière égalité permet de voir que le résultat est faux, et la donnée de contre-exemple suffit pour valider la réponse.
De même que pour le reste des questions, l'économie du travail que permet le recours à des configurations complexes nous laisse penser qu'il est peu probable que les élèves répondant juste utilisent les techniques de la géométrie élémentaire, notamment quand il s'agit de points de coordonnées générales.

Dans tous les cas de figures, les questions proposées dans le cadre de l'étude de cette rubrique ne sont pas forcément, dans leur globalité, très éloignées de celles institutionnellement sollicitées. Toutefois, ces questions présentent des différences de taille avec celles introduites par l'institution :

– Les énoncés tablent sur des données générales, ce qui devrait obliger les élèves à chercher d'abord des configurations complexes adéquates pour ensuite les interpréter géométriquement.
– Les questions posées sont de type Vrai ou Faux et de type QCM, ce qui signifie que les élèves sont dans l'obligation d'économiser leur travail, donc de recourir d'abord à des configurations complexes pour pouvoir travailler.

Dans leur projet de modélisation des nombres complexes par des transformations planes, Rosseel et Schneider (2004) proposent une alternative à leur enseignement, alternative dans laquelle les nombres complexes sont introduits comme "codage algébrique de similitude". Dans la deuxième étape de ce projet, lorsqu'il a été question de replonger les élèves dans un travail algébrique, ces auteurs ont pu noter que :

> *Cette incursion de l'algébrique dans une réflexion de nature géométrique correspond à un changement de contrat assez brutal.* (Rosseel et Schneider, 2004, p.30)

C'est pourquoi, dans le cadre de ces questions, les énoncés sont établis de sorte que les configurations complexes qui devraient être utilisées peuvent être autres que celles mettant en jeu des transformations planes : notre objectif n'est pas d'étudier la place des transformations dans un travail avec les nombres complexes, mais plutôt de voir dans quelle mesure les élèves rendent opérationnels les nombres complexes pour répondre à des questions géométriques.

3. Analyse *a posteriori* du résultat du questionnaire

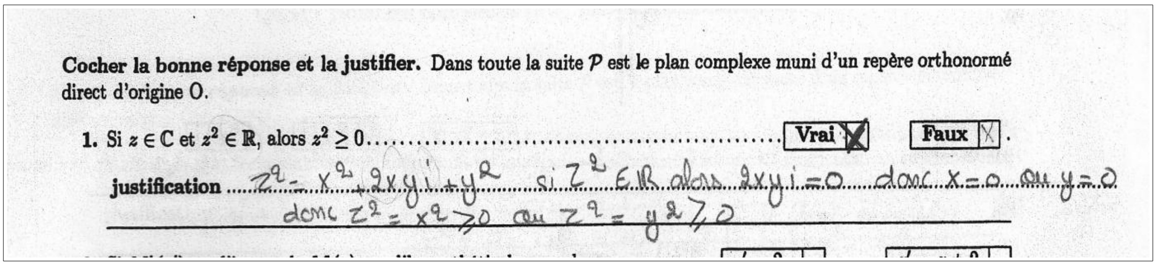
Dans ce paragraphe nous analysons pour chaque rubrique les réponses données. Le cas échéant, nous pointons un chevauchement potentiel entre les rubriques, susceptible de nous faire avancer dans l'étude de notre problématique.
La méthodologie d'analyse *a posteriori* est similaire pour toutes les rubriques. Pour chaque question d'une rubrique donnée, il s'agit d'abord d'identifier dans toutes les traces écrites, la nature de la réponse ainsi que la méthode de justification établie. Ces résultats seront classifiés en six groupes : réponse correcte/justification correcte, réponse correcte/justification fausse, réponse correcte/sans justification, réponse fausse/justification, réponse fausse/sans justification et sans réponse, qui seront successivement libellés RC/JC, RC/JF, RC/SJ, RF/SJ, RF/AJ et SR. Nous analysons quantitativement et qualitativement ces réponses, d'un point de vue local et d'un point de vue global par rapport au reste des questions de la rubrique en jeu.

3.1 Description de la méthode d'analyse sur des exemples

Nous présentons dans la suite la méthode d'analyse des réponses des élèves au questionnaire, sur une ou plus qu'une question, pour chacune des trois rubriques mentionnées plus haut.

a) Rubrique généralisation

Dans la figure 1, l'élève généralise la relation d'ordre total de l'ensemble des nombres réels à l'ensemble des nombres complexes. Ceci l'empêche de voir dans ses calculs que dans le cas où $x = 0$ on trouve $z^2 = -y^2$, sans compter le fait qu'il n'a pas automatiquement recouru à l'exemple qui a permis l'introduction des nombres complexes.

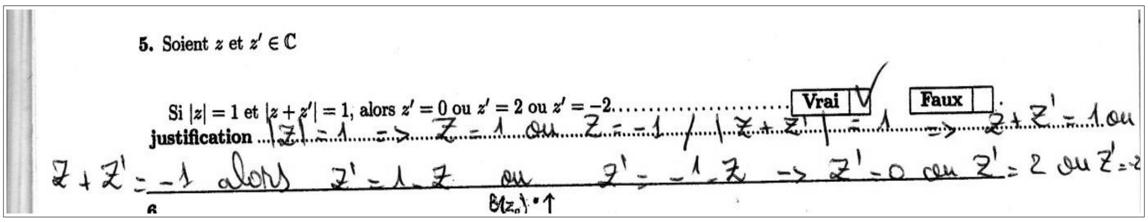

Cocher la bonne réponse et la justifier. Dans toute la suite $\mathcal{P}$ est le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Si $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 \in \mathbb{R}$, alors $z^2 \geq 0$ .... Vrai ☒ Faux ☒

justification $z^2 = x^2 + 2xyi + y^2$ si $z^2 \in \mathbb{R}$ alors $2xyi = 0$ donc $x = 0$ ou $y = 0$
donc $z^2 = x^2 \geq 0$ ou $z^2 = y^2 \geq 0$

Figure 1. *Généralisation – Relation d'ordre*

La réponse donnée dans la trace écrite suivante (figure 2), montre clairement une difficulté de la part de l'élève à dissocier les propriétés des réels de celles des nombres complexes (le module d'un nombre complexe est sa valeur absolue).


5. Soient z et $z' \in \mathbb{C}$

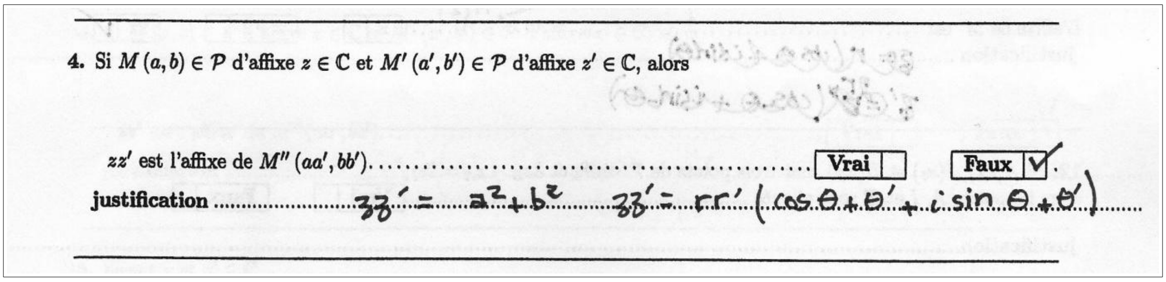
Si $|z| = 1$ et $|z + z'| = 1$, alors $z' = 0$ ou $z' = 2$ ou $z' = -2$ .... Vrai ☑ Faux ☐

justification $|z| = 1 \Rightarrow z = 1$ ou $z = -1$ / $|z + z'| = 1 \Rightarrow z + z' = 1$ ou
$z + z' = -1$ alors $z' = 1 - z$ ou $z' = -1 - z \Rightarrow z' = 0$ ou $z' = 2$ ou $z' = -2$

Figure 2. *Généralisation – Module et valeur absolue*

Dans les deux cas de figure, la réponse est fausse et la démarche adoptée par les élèves est de type démonstration où le calcul/raisonnement est erroné de sorte que le résultat est faux. Ceci témoigne de la standardisation algébrique qui accompagne le travail de ces élèves avec les nombres complexes, sans qu'une réelle signification ne soit donnée à ces nombres en particulier dans leur lien avec les réels.
Dans les deux traces écrites qui suivent (figure 3 et figure 4), les réponses sont justes mais les argumentations ne sont pas concluantes. Dans les deux cas de figure, les élèves procèdent à un calcul algébrique erroné, sur un cas général ou sur des cas particuliers.

Plus précisément, dans la figure 3, l'élève fait appel à des connaissances mémorisées d'une manière confuse, faisant intervenir le produit de nombres complexes via différentes représentations sans qu'un lien explicite n'en soit fait.

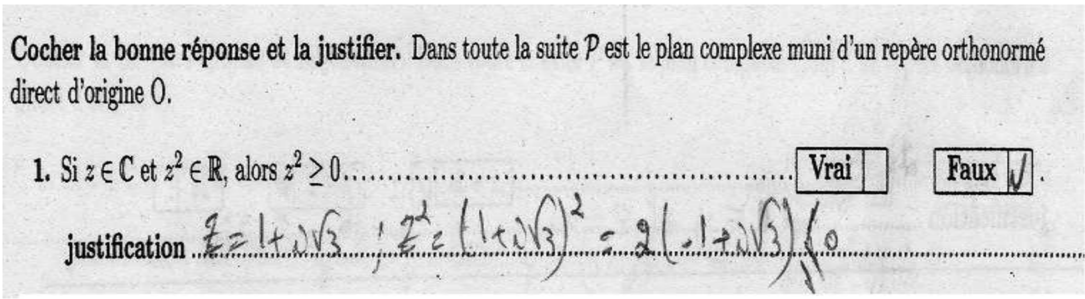

4. Si $M(a,b) \in \mathcal{P}$ d'affixe $z \in \mathbb{C}$ et $M'(a',b') \in \mathcal{P}$ d'affixe $z' \in \mathbb{C}$, alors

zz' est l'affixe de $M''(aa',bb')$. .... Vrai ☐ Faux ☑

justification .... $zz' = a^2+b^2$ .... $zz' = rr'(\cos\theta+\theta'+i\sin\theta+\theta')$

Figure 3. *Généralisation – Produit de nombres complexes*

Par ailleurs, dans la deuxième trace écrite ci-dessous (figure 4), l'élève procède à la donnée immédiate d'un contre-exemple inadapté qui table sur la généralisation abusive de la relation d'ordre de ℝ à ℂ.


Cocher la bonne réponse et la justifier. Dans toute la suite $\mathcal{P}$ est le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

1. Si $z \in \mathbb{C}$ et $z^2 \in \mathbb{R}$, alors $z^2 \geq 0$........ Vrai ☐ Faux ☑

justification $z = 1+i\sqrt{3}$; $z^2 = (1+i\sqrt{3})^2 = 2(-1+i\sqrt{3}) < 0$

Figure 4. *Généralisation – Relation d'ordre*

Ce malaise qu'ont les élèves envers le nombre particulier i pourrait être lié à leur résistance envers l'existence d'un nombre de carré négatif. L'expression $i^2 = -1$ demeure difficile à comprendre car elle remet en cause toutes les bases acquises au cours des années précédentes (un carré est supposé être toujours positif). L'approche classique de l'introduction du nombre imaginaire i comme étant solution d'un carrée négatif, devrait donc être revisitée.

En conclusion, les questions relatives à VD3 montrent que les élèves ne sont pas suffisamment outillés pour contrôler la validité d'énoncés généraux faisant intervenir les différences entre les propriétés des nombres complexes et celles des nombres réels.

b) Rubrique représentations des complexes

Dans les deux traces écrites relative aux figures 5 et 6, les réponses des élèves sont justes et les argumentations ne sont pas conséquentes. Dans les deux cas, le traitement dans un même registre ou la conversion entre registres sont erronés ou incomplets, et les élèves se suffisent du résultat établi pour conclure. Plus précisément, dans la figure 5, l'élève procède à un traitement inadéquat dans le registre graphique en se limitant à traduire la figure par une égalité de distances. La conversion du résultat dans le registre intrinsèque confond le module d'un nombre complexe avec le nombre complexe en question.

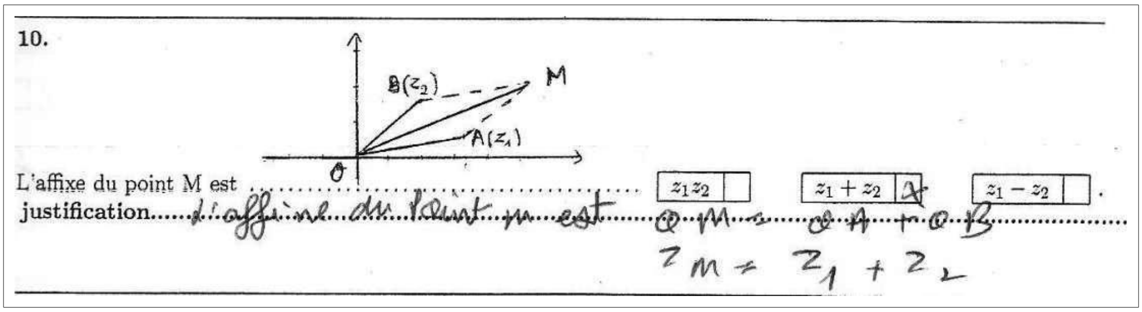


Figure 5. *Interprétation complexe – Traitement et conversion de registres*

Dans la figure 6 ci-dessous, l'élève procède à une double conversion du registre intrinsèque au registre algébrique, dont l'une erronée ayant pourtant servi pour conclure. Dans ce calcul, tout porte à supposer que l'élève occulte *i* pour calculer le module d'un nombre complexe défini par sa représentation cartésienne.

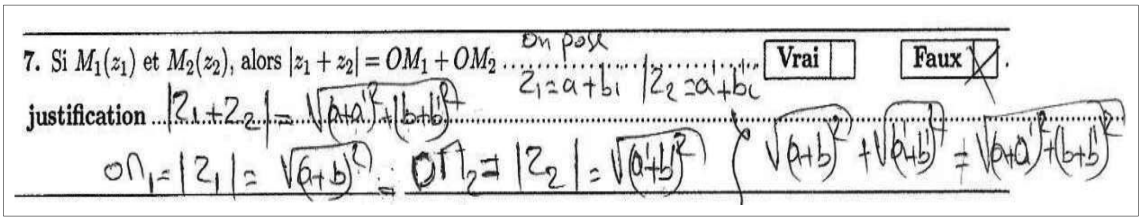


Figure 6. *Interprétation complexe – Conversion de registres*

Par ailleurs, dans les productions décrites par les figures 7 et 8, les réponses fausses sont accompagnées de justifications. Dans les deux cas de figure, les conversions faites par les élèves sont incomplètes ou erronées.

Plus précisément, dans la figure 7 ci-après, l'élève se limite à la conversion du registre intrinsèque au registre graphique en utilisant l'égalité des modules. Ceci traduit la difficulté de se suffire du registre intrinsèque pour interpréter une configuration complexe via le recours aux transformations planes, dans ce cas celle d'une rotation d'angle droit.

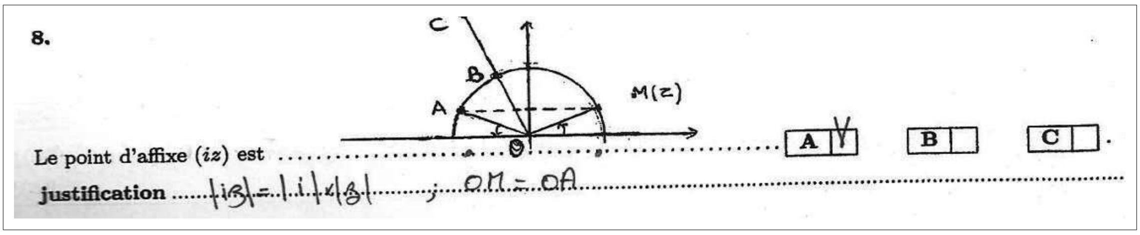


Figure 7. Interprétation géométrique – Conversion de registres

Enfin, dans la figure 8, la conversion faite par l'élève du registre graphique au registre intrinsèque traduit la difficulté à associer au vecteur directeur de l'axe des ordonnées le nombre *i*.

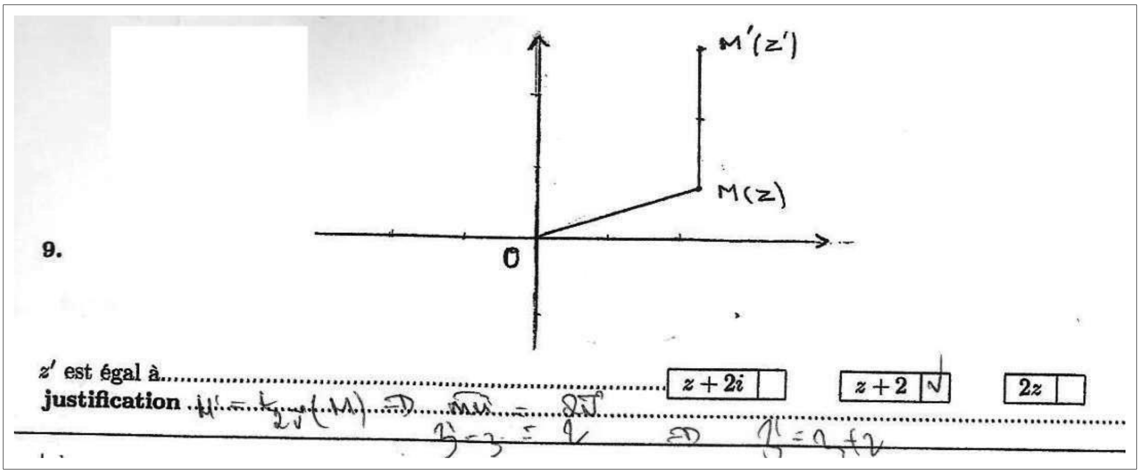


Figure 8. Interprétation complexe – Conversion de registres

En conclusion, les questions relatives à VD9 permettent de mettre en évidence les difficultés des élèves à procéder à des conversions entre divers registres sémiotiques, en soulignant les connaissances, tant géométriques que spécifiques aux nombres complexes, qui font défaut.

c) Rubrique opérationnalité des nombres complexes

Dans la figure 9, l'élève trouve des difficultés à interpréter la notion d'argument d'un nombre complexe en termes d'angles orientés. Le calcul sur les complexes qu'il a utilisé devrait lui permettre de déduire que l'angle géométrique de sommet *O* est égal à *60°*.

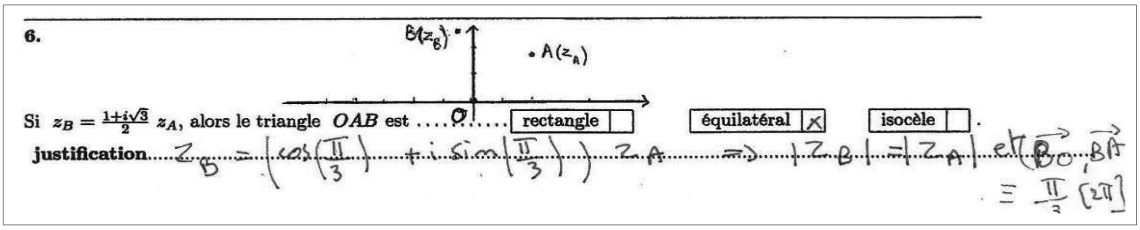
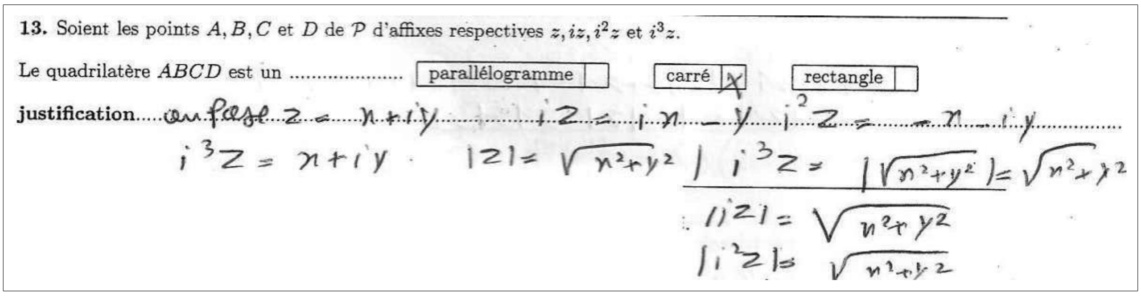


Figure 9. Opérationnalité – Argument et angles orientés

Dans la figure 10, l'élève a d'abord procédé à une conversion vers le registre cartésien qu'il n'a pas été en mesure d'interpréter géométriquement pour conclure.


13. Soient les points A, B, C et D de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives z, iz, i^2z et i^3z.

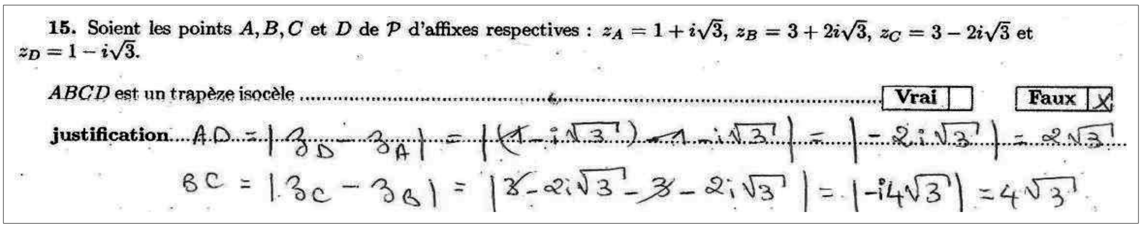
Le quadrilatère $ABCD$ est un .... parallélogramme ☐ carré ☒ rectangle ☐

justification on pose $z = x+iy$ $iz = ix - y$ $i^2z = -x - iy$
$i^3z = x+iy$ $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ $|i^3z| = |\sqrt{x^2+y^2}| = \sqrt{x^2+y^2}$
$|iz| = \sqrt{x^2+y^2}$
$|i^2z| = \sqrt{x^2+y^2}$

Figure 10. *Opérationnalité – Module et distance*

Dans les deux cas de figure ci-dessus, les réponses sont justes et les justifications ne sont pas consistantes. Les élèves sont dans l'incapacité d'interpréter géométriquement les configurations complexes adéquates, pourtant utilisées d'une manière autonome.

Par ailleurs, dans les productions décrites par les figures 11 et 12, les réponses fausses sont accompagnées de justifications. Les élèves ont des difficultés à appliquer toutes les configurations complexes nécessaires à l'interprétation géométrique.


15. Soient les points A, B, C et D de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives : $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 3 + 2i\sqrt{3}$, $z_C = 3 - 2i\sqrt{3}$ et $z_D = 1 - i\sqrt{3}$.

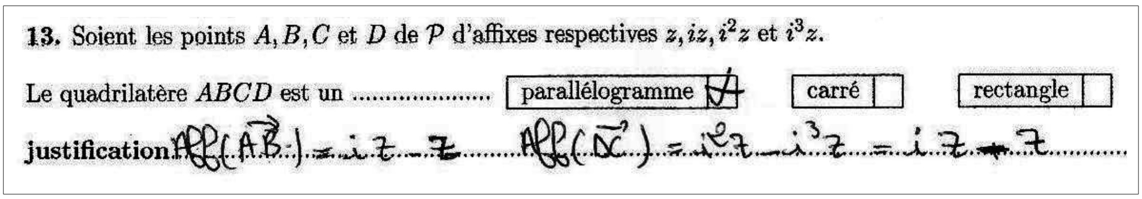
$ABCD$ est un trapèze isocèle .... Vrai ☐ Faux ☒

justification $AD = |z_D - z_A| = |(1 - i\sqrt{3}) - 1 - i\sqrt{3}| = |-2i\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$
$BC = |z_C - z_B| = |3 - 2i\sqrt{3} - 3 - 2i\sqrt{3}| = |-i4\sqrt{3}| = 4\sqrt{3}$

Figure 11. *Opérationnalité – Nombres conjugués et symétrie*

Plus précisément, dans la figure 11 ci-dessus, la difficulté à avoir recours aux configurations complexes adéquates à l'interprétation ne peut être liée à une méconnaissance des propriétés géométriques. Ceci est d'autant plus vrai que la représentation graphique des points donnés par des coordonnées particulières permettrait de visualiser les propriétés d'un trapèze. Une des explications plausible concerne la méconnaissance du lien géométrique entre l'image d'un nombre complexe et celle de son conjugué.

Dans la figure 12, l'élève se limite à utiliser la configuration complexe permettant de déduire une seule propriété du quadrilatère en jeu. Or dans ce cas de figure, les affixes des points sont données en vue de rappeler que la configuration complexe $z_B = iz_A$ *est* interprétée institutionnellement par : B est l'image de A par la rotation d'angle $\pi/2$.


13. Soient les points A, B, C et D de $\mathcal{P}$ d'affixes respectives z, iz, i^2z et i^3z.

Le quadrilatère $ABCD$ est un .... parallélogramme ☒ carré ☐ rectangle ☐

justification $Aff(\vec{AB}) = iz - z$ $Aff(\vec{DC}) = i^2z - i^3z = iz - z$

Figure 12. *Opérationnalité – Nombres complexes et rotation.*

En conclusion, les questions relatives à VD8 permettent de souligner les difficultés des élèves à mobiliser des configurations complexes pour interpréter des configurations géométriques et réciproquement. Or l'exploitation des nombres complexes pour la résolution de problèmes géométriques est tributaire de la consistance de telles interprétations.

3.2 Usage abusif du principe de permanence

Les questions qui se rattachent à ce principe sont au nombre de quatre, soit Q1, Q3, Q4 et Q5 qui seront successivement nommées "Général1", "Général2", "Général3" et "Général4". Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des résultats quantitatifs auxquels nous avons aboutis, pour chacune des questions posées.

	RC/JC	RC/JF	RC/SJ	RF/SJ	RF/AJ	SR
Général1	57%	24%	1%	1%	9%	8%
Général2	72%	18%	2%	0%	6%	2%
Général3	60%	19%	4%	4%	4%	9%
Général4	3%	35%	12%	11%	22%	17%

Tableau 1. *Généralisation – Répartition quantitative*

L'analyse des productions des élèves ayant répondu et justifié correctement leur travail nous a permis de voir que :

- Pour Général1, un peu plus de la moitié d'entre eux a donné immédiatement un contre exemple. Le reste de ces élèves a d'abord procédé à un calcul algorithmique pour pouvoir conclure.
- Pour Général2, la moitié de ces élèves a procédé à un calcul pour valider la réponse juste. Tandis qu'aucun élève n'a remarqué que le carré de $1 + i$ est imaginaire et qu'un module est une distance positive pour ensuite conclure.
- Pour Général3, seul 6% de ces élèves ont donné directement un contre exemple. Le reste a procédé au calcul algébrique de $z\,z'$ dans le registre cartésien pour pouvoir conclure.
- Pour Général4, les trois élèves impliqués ont procédé à la donnée immédiate d'un contre- exemple.

Dans tous les cas, ces résultats témoignent d'une algorithmisation excessive du calcul dans le corps des nombres complexes, réduisant le travail des élèves à une juxtaposition de connaissances sur les nombres complexes mémorisées dans le cours.
Par ailleurs, l'étude des travaux des élèves comportant des réponses correctes suivies de justifications invalides, nous a permis de voir que :

- Pour Général1, la grande majorité de ces élèves occulte la donnée stipulant que le carré du nombre complexe en question est un nombre réel et donne un contre-exemple non adéquat.
- Pour Général2, tous ces élèves procèdent à un calcul algorithmique qui traduit un problème de manipulation des propriétés des opérations dans **C** ou de la définition du module.
- Pour Général3, presque tous ces élèves procèdent à un calcul algorithmique du produit de deux nombres complexes sous formes trigonométrique ou cartésienne. Leur travail traduit soit comme pour Général2, la non disponibilité des propriétés des opérations dans **C** et de la définition du module ; soit l'incapacité

d'interpréter le résultat trouvé dans le registre graphique affine cartésien.
- Pour Général4, la moitié de ces élèves a un problème de raisonnement lié au calcul propositionnel. Le reste de ces élèves procède comme pour Général2 et témoigne des mêmes difficultés.

Enfin, les élèves ayant répondu faux en justifiant leur réponse refusent d'admettre que le carré puisse être négatif ou témoignent d'une incapacité de calculer dans le corps **C**, et ce en dépit de la routinisation institutionnelle de ce type de tâches.

A l'issue de cette étude, il peut paraître que les élèves réussissent, avec des taux qui dépassent les 60%, à répondre aux questions relatives à Général 1, 2 et 3. Cependant le test T des groupes appariés montre clairement qu'il n'y a aucune relation significative dans la manière avec laquelle ces élèves ont répondu à ces questions (tel est le cas par exemple des élèves qui reconnaissent que le produit de deux nombres complexes n'est pas forcément positif mais ne reconnaissent pas ce produit !). Les réponses données sont le plus souvent aléatoires et ne sont pas significatives d'une maîtrise des problèmes liés aux abus de généralisation.

3.3 Difficultés de coordinations des différentes représentations

Rappelons que les questions liées à cette rubrique sont au nombre de six, soit Q2, Q7, Q8, Q9, Q10 et Q11 qui seront successivement nommées "Registre 1", "Registre 2", "Registre 3", "Registre 4", "Registre 5" et "Registre 6". Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des résultats quantitatifs auxquels nous avons aboutis, pour chacune des questions posées.

	RC/JC	RC/JF	RC/SJ	RF/SJ	RF/AJ	SR
Registre1	36%	16%	16%	7%	2%	23%
Registre2	58%	16%	7%	5%	8%	6%
Registre3	54%	16%	8%	10%	5%	7%
Registre4	46%	26%	19%	2%	2%	5%
Registre5	50%	25%	18%	3%	1%	3%
Registre6	39%	18%	27%	4%	7%	5%

Tableau 2. *Représentation – Répartition quantitative*

L'analyse faite nous a permis de constater que les élèves ayant répondu et justifié correctement ont globalement utilisé l'une des deux méthodes que nous décrivons ci-dessous.

Méthode 1. Procéder d'abord à un traitement dans le registre des données puis convertir le résultat dans le registre de la solution attendue.
C'est le cas du traitement vectoriel des énoncés (y compris ceux donnés sous formes de figures) préalablement entrepris par : tous ces élèves pour Registre1 et Registre5 ; environ la moitié de ces élèves pour Registre4 et le quart de ces élèves pour Registre6. Les conversions ensuite établies par ces élèves dans le registre intrinsèque permettent d'interpréter les notions d'homothétie, de translation, de symétrie et de parallélogramme par des configurations complexes.
Par ailleurs concernant Registre3, plus de 90% de ces élèves ont d'abord procédé à l'interprétation de l'égalité $z' = i\,z$ dans le registre cartésien, intrinsèque ou

trigonométrique pour pouvoir énoncer le résultat attendu dans le registre graphique cartésien.

Méthode 2. Procéder à un changement immédiat dans le registre de la solution attendue. Aussi bien pour Registre1 que pour Registre5, aucun de ces élèves n'a pu immédiatement interpréter les configurations géométriques données par des configurations complexes. Par ailleurs, seul un pourcentage très réduit (10%) de ces élèves ont pu directement interpréter l'égalité $z' = i\,z$ en termes de rotation, pratique pourtant largement institutionnalisée.

Nous avons catégorisé les travaux des élèves qui ont donné des réponses correctes et des justifications non valides, en trois groupes.

G1. Procéder à un traitement dans un même registre et/ou une conversion entre registres qui soit erroné ou incomplet, et se restreindre au résultat établi pour conclure. Nous détaillons dans le tableau 3 ci-dessous des exemples de ces travaux que nous retrouvons dans les six questions relatives à cette rubrique.

Registre1	$h_{(O,2)}(M) = M' \Rightarrow\ 0M' = 2\,OM\ \Rightarrow\ z' = 2\,z$
Registre2	$\lvert z_1 + z_2\rvert = OM_1 + OM_2$, *or* $\lvert z_1 + z_2\rvert \neq \lvert z_1 - z_2\rvert$ *donc* $\lvert z_1 - z_2\rvert = M_2M_1 \neq OM_1 + OM_2$
Registre	$z' = i\,z \Rightarrow \arg(z') \equiv \arg(z) + \frac{\pi}{2}(2\pi) \Rightarrow B$ *est l'image de* z'
Registre4	$\lvert z'\rvert = 2\lvert z\rvert$ *donc* $z' = z + 2i$
Registre5	*OAMB parallélogramme* $\Rightarrow\ OM = OA + OB \Rightarrow\ z = z_1 + z_2$
Registre6	*M' est le symétrique de M donc* $z' = 2z$

Tableau 3. *Représentation – RC/JF*

Plus précisément, la majorité des élèves ayant travaillé de la sorte présente des difficultés liées au basculement entre diverses représentations des nombres complexes. Nous constatons notamment des erreurs faisant intervenir le registre graphique cartésien et le registre intrinsèque quand il s'agit d'énoncés qui réfèrent aux transformations planes utilisées (symétrie, homothétie, translation et rotation d'angle droit). Pour le reste de ces élèves, l'indisponibilité des connaissances géométriques nécessaires aux interprétations requises est le facteur majeur d'échec (tel est le cas de l'exemple relatif au Registre5, donné dans le tableau3).

G2. Utiliser des cas particuliers dans des questions faisant intervenir des énoncés généraux et réduire l'étude à une vérification simple de données.

G3. Tronquer la résolution, et, par là, aboutir à un travail inachevé, qui témoigne dans la majorité des cas d'une difficulté à mobiliser des connaissances sur les nombres complexes, pourtant introduites pour définir le module, l'argument, la notion d'affixe et d'image, etc.

Enfin les élèves ayant répondu faux en justifiant leurs réponses ne tentent même pas un travail de changement de registres. Ce qui révèle des carences dans leurs connaissances d'un même registre relatives aux notions de module, d'argument, d'affixe, etc.

En dépit de la standardisation institutionnelle des divers traitements ou conversions de registres sollicités dans cette recherche, l'originalité des questions proposées confronte les élèves au réseau de registres tant sémiotiques que mathématiques dans lesquels sont plongés les nombres complexes. Dans ces conditions, l'appui sur la mémorisation ou les inférences automatisées des résultats du cours ne sont pas suffisants pour la résolution. De plus, le test T de groupes appariés montre clairement qu'il n'y a aucune relation significative dans la manière avec laquelle les élèves ont répondu aux questions relatives aux Registre2, 3 et 5, où les taux de réussite s'élèvent à environ 50%. Ceci témoigne du caractère aléatoire de leur travail dans des situations faisant intervenir des traitements ou conversions entre divers registres de représentations des nombres complexes.

3.4 Manipulation confuse des configurations géométriques planes

Les cinq questions qui se rattachent à cette rubrique, soit Q6, Q12, Q13, Q14 et Q15, seront successivement nommées "Opération 1", "Opération 2", "Opération 3", "Opération 4" et "Opération 5". Le tableau ci-dessous résume l'ensemble des résultats quantitatifs auxquels nous avons aboutis, pour chacune des questions posées.

	RC/JC	RC/JF	RC/SJ	RF/SJ	RF/AJ	SR
Opération1	11%	12%	16%	7%	33%	21%
Opération2	19%	9%	11%	8%	20%	33%
Opération3	4%	39%	8%	6%	31%	12%
Opération4	12%	19%	16%	11%	15%	27%
Opération5	13%	19%	13%	8%	18%	29%

Tableau 4. *Opérationnalité – Répartition quantitative*

Force est de constater qu'un nombre très réduit d'élèves a pu répondre correctement aux questions de cette rubrique en justifiant correctement. Globalement, les travaux de ces élèves n'optimisent pas le recours aux nombres complexes pour résoudre des problèmes géométriques, de sorte que :

- Pour Opération1, la majorité de ces élèves exploitent d'abord les égalités $(z_B - z_A) = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} - 1\right)(z_A)$ pour déduire que le triangle OAB est équilatéral. Seuls deux de ces élèves ont immédiatement transformé l'égalité $z_B = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} z_A$ en $B = r_{\left(O, \frac{\pi}{3}\right)}(A)$ puis conclu.
- Pour Opération2, seul un élève a directement interprété l'égalité $3\,z_B - z_A = 2\,z_I$ par : *I* est le barycentre des points pondérés *(B,* 3*)* et *(A,* – 1*)* puis a conclu que les points *I, A et B* sont alignés. Les autres élèves cherchent d'abord à établir une égalité complexe qui traduit la colinéarité de deux vecteurs pour conclure.

- Pour Opération3, un seul parmi ces quatre élèves a interprété géométriquement les égalités $z_B = i\, z_A$, $z_C = i\, z_B$ et $z_D = i\, z_C$, pour reconnaître que les sommets du quadrilatère *ABCD* sont successivement images les uns des autres par la rotation de centre *O* et d'angle *π/2*, puis conclure que *ABCD* est un carré. Pourtant, cette question est identique à celle introduite dans le projet institutionnel pour relier les nombres complexes et la notion de rotation.
- Pour Opération4, seuls trois élèves ont procédé à la donnée immédiate de contre-exemples.
- Pour Opération5, plus que la moitié de ces élèves n'a pas pu exploiter la propriété du conjugué d'un nombre complexe dans le cadre de la symétrie. Le reste de ces élèves a directement utilisé les égalités $z_D = \overline{z_A}$ et $z_C = \overline{z_B}$ pour pouvoir conclure.

L'analyse des copies des élèves ayant répondu correctement à ces questions sans qu'ils ne soient en mesure de valider leurs réponses nous a amené à catégoriser ces élèves en trois groupes descriptifs, tels que énoncés ci-dessous.

– Mobilisation de configurations complexes insuffisantes par rapport aux interprétations requises. Le tableau 5 contient un échantillon représentatif de ces travaux pour chacune des cinq questions posées.

Opération1	$Arg\left(\left(\frac{z_B}{z_A}\right)\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)\Rightarrow(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}})\equiv\frac{\pi}{3}(2\pi)\Rightarrow OAB\ est\ équilatéral\right.$
Opération2	$3z_B - z_A - 2z_I = 0$ *donc* 3 -1 -2 =0
Opération3	*Les points 1, i, i^2 et i^3 forment un carré dont chaque point se situe sur un axe et les points sont de même distance par rapport à O*
	$\lvert z_A\rvert = \lvert z_B\rvert = \lvert z_C\rvert = \lvert z_D\rvert$ *donc OA = OB = OC = OD donc ABCD est un carré*
Opération4	$\lvert z'\rvert = \lvert 2z - 6i\rvert = 2\lvert z - 3i\rvert$ *donc OM'=2AM*
Opération5	$\lvert z_A\rvert = \lvert z_D\rvert$ *et* $\lvert z_B\rvert = \lvert z_C\rvert$ *donc ABCD est un trapèze isocèle*

Tableau 5. *Opérationnalité – RC/JF (1)*

A la lecture du tableau 5, on ne peut affirmer que les difficultés de ces élèves ne sont pas en relation avec l'inadaptation de leurs connaissances géométriques. Par ailleurs, les productions qui explicitent une incapacité à mettre en œuvre les configurations complexes nécessaires, sans que ceci ne soit en relation avec des difficultés géométriques, sont en quantité nettement plus importantes que les autres.

– Interprétation géométrique inefficace des configurations complexes adéquates pourtant convoquées d'une manière autonome. En dépit de la justesse de leur réponse, les connaissances de ces élèves relativement aux diverses représentations d'un nombre complexe ainsi que ses propriétés sont manquantes. Le tableau 6 exemplifie certains de ces travaux.

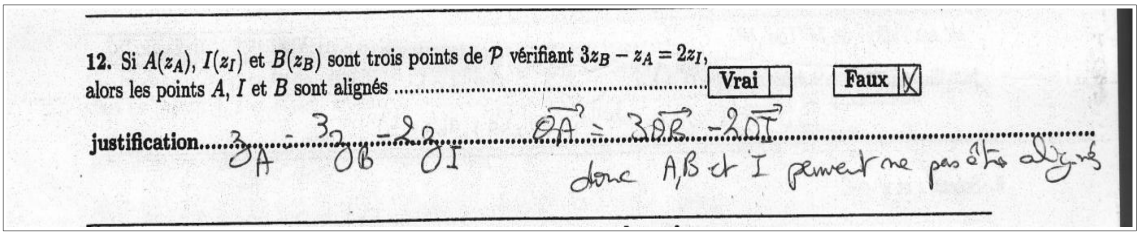
Opéra-tion1	$z_B = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) z_A \Rightarrow \lvert z_A \rvert = \lvert z_B \rvert \quad et \quad \left(\widehat{\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$ *donc OAB est un triangle équilatéral*
Opéra-tion2	$3z_B - z_A = 2z_I \Rightarrow z_I = \frac{3z_B - z_A}{2} \Rightarrow I = A * B$
	$3z_B - z_A - 2z = 0$ est l'équation d'une droite de vecteur (3, –1, –2)
Opéra-tion3	$\frac{z_B - z_A}{z_D - z_A} = -1 \Rightarrow \frac{AB}{AD} = -1$

Tableau 6. *Opérationnalité – RC/JF (2)*

Le tableau ci-dessus montre un manque au niveau des connaissances relatives à l'argument et ses propriétés, une confusion entre les représentations planes d'un nombre complexe et les points de l'espace, entre module et nombre complexe, etc.

– Travail sur des cas particuliers dans des questions contenant des énoncés généraux. Nous retrouvons ce type de travail dans les questions Opération1, 3 et 4. Finalement, nous pouvons penser que les élèves ayant répondu faux en justifiant leurs réponses ont plus de difficultés que ceux qui ont failli au niveau de leurs argumentations.

Cependant l'analyse nous a permis de catégoriser ces élèves en deux groupes et de voir que ceci ne s'applique pas aux élèves du premier groupe :
- Dans le premier groupe d'effectif très réduit, les élèves arrivent à interpréter géométriquement les configurations complexes. Comme indiqué dans la figure 13, le problème est soit géométrique soit lié à la non exhaustivité des configurations complexes utilisées.


12. Si $A(z_A)$, $I(z_I)$ et $B(z_B)$ sont trois points de $\mathcal{P}$ vérifiant $3z_B - z_A = 2z_I$, alors les points A, I et B sont alignés .... Vrai ☐ Faux ☒

justification..... $z_{\vec{OA}} = 3z_{\vec{OB}} - 2z_{\vec{OI}}$ $\quad \vec{OA} = 3\vec{OB} - 2\vec{OI}$
donc A, B et I peuvent ne pas être alignés

Figure 13. *Opérationnalité – RF/AJ (1)*

- Dans le deuxième groupe, les élèves présentent de réelles difficultés et sont dans l'incapacité soit de traiter correctement les configurations complexes fournies, soit d'interpréter géométriquement les configurations complexes qu'ils ont utilisé. Tel est le cas de l'exemple fourni dans la figure 14.

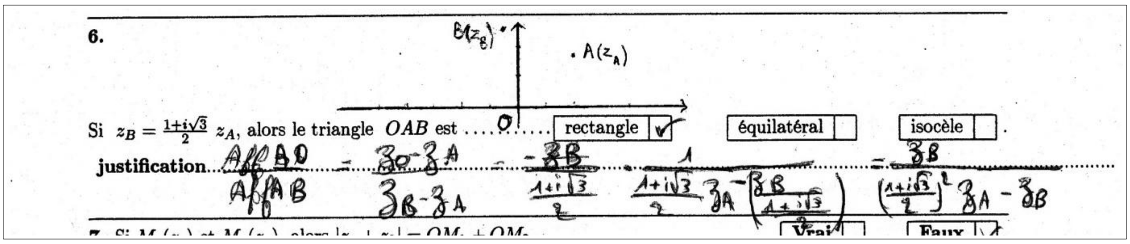


Figure 14. Opérationnalité – RF/AJ (2)

Comme nous l'avons prévu, les élèves ne maîtrisent pas l'usage des nombres complexes dans la résolution de problèmes divers, notamment ceux liés à la géométrie plane. Les très faibles taux de réussite des différentes questions relatives à la rubrique de l'opérationnalité soulignent leur difficulté :

- à avoir recours d'une manière autonome aux configurations complexes devant simplifier le travail attendu ;
- à interpréter géométriquement les configurations complexes ainsi repérées d'une manière autonome.

Conclusion

L'introduction des nombres complexes en fin de lycée est accompagnée de certaines exigences cognitives qui révèlent les difficultés des élèves à manipuler de tels nombres. Cette étude nous a permis de cerner de plus près ces difficultés et de les formaliser.
En se basant sur le modèle des variables macro-didactiques relatives à l'enseignement des nombres complexes en fin de lycée, il nous a été possible de regrouper ces difficultés en trois catégories que nous décrivons ci-dessous.

1. La première catégorie concerne les difficultés qu'entraînent les abus de généralisation des propriétés des réels aux nombres complexes. Plus précisément :

- Plusieurs élèves généralisent la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ à **C**. Ceux qui ne le font pas sont dans l'incapacité de donner immédiatement des contre-exemples, ayant pourtant servi pour introduire ces nombres.
- Un grand nombre d'élèves confondent module et valeur absolue et n'arrivent pas à distinguer les spécificités de chacune de ces deux notions. Les autres élèves ne sont pas en mesure d'inférer automatiquement cette différence, et éprouvent le besoin de procéder d'abord à des calculs algorithmiques pour conclure.
- Certains élèves confondent le produit de deux nombres complexes et le produit de réels dès que ce produit n'est pas représenté sous-forme cartésienne.

2. La deuxième catégorie réfère aux difficultés de traitement dans un même registre ou de conversions entre registres, parmi lesquelles nous trouvons :

- L'incapacité des élèves à procéder à un changement immédiat du registre graphique cartésien au registre intrinsèque et réciproquement ; et ce, dans le cadre de configurations faisant intervenir des transformations planes (symétrie, homothétie, translation, rotation d'angle droit), des quadrilatères, etc.
- L'indisponibilité des connaissances "basiques" sur les nombres complexes nécessaires aux traitements dans un même registre, ou conversions entre les registres, notamment concernant les notions de conjugué, de module et d'argument.

Ces difficultés pointent encore une fois l'inconsistance d'une approche tablant sur l'extension, non motivée, des réels pour introduire les nombres complexes. Habitués à un format bien précis des nombres, visualisé sur la droite réelle, les élèves se trouvent dans l'obligation de basculer vers des nombres "représentés" en dimension 2. A ce titre, ils doivent interpréter des égalités qu'ils perçoivent a priori en tant que *calculs sur des nombres* comme des transformations du plan, ou des déplacements de points, etc. ce qui ne leur est absolument pas familier.

3. La troisième catégorie est reliée à la complexité d'exploiter les aspects unificateur et simplificateur des nombres complexes, notamment dans la résolution des problèmes de géométrie plane. En particulier, il nous a été possible de noter :

- L'incapacité des élèves à avoir recours d'une manière autonome aux configurations complexes qui permettraient de simplifier le travail attendu. Par ailleurs, les rares élèves qui le font n'optimisent pas ce recours.
- Les difficultés des élèves à interpréter géométriquement les configurations complexes pourtant énoncées d'une manière autonome, afin de parachever la résolution des problèmes en jeu.

Les questions visant la mise en œuvre des nombres complexes pour la résolution de problèmes géométriques permettent de donner du sens à ces nombres. Encore faut-il que les élèves soient suffisamment armés pour être en mesure de mobiliser les configurations requises et de procéder à leurs conversions dans d'autres registres.

Au terme de ces résultats, d'autres questionnements surviennent notamment concernant le rôle de l'enseignant qui est supposé souligner, et clairement distinguer les registres tant mathématiques que sémiotiques en jeu dans la représentation des nombres complexes. Les enseignants disposent-t-ils de situations adéquates pour traiter toutes les difficultés que rencontrent les élèves ? La réponse à cette question est manifestement négative, et donc, la piste à creuser est maintenant celle d'une ingénierie adaptée à l'introduction des nombres complexes et à la multiplicité des registres que requiert leur traitement. Le modèle des variables macro-didactiques que nous avons utilisé pour cette étude diagnostique devrait permettre de penser la progression des situations d'une telle ingénierie.

Bibliographie

ARTIGUE M. et DELEDICQ A. (1992) *Quatre étapes dans l'histoire de nombres complexes : quelques commentaires épistémologiques et didactiques*. IREM de Paris, Université Paris 7.

BLOCH I., GHEDAMSI I. (2005) Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? *Petit x*, **69**, 7-30.

DEROUET C. (2011) *Place de la géométrie dans l'enseignement des nombres complexes en terminale scientifique, avant et après la réforme des lycées*. Mémoire de master, Université Paris7, Denis Diderot.

DUVAL R. (1993) Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, **5**, 37-65.

DUVAL (2002) Comment décrire et analyser l'activité mathématiques ? Cadres et registres. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*, 1-24, IREM de Paris - DIDIREM.

FLAMENT D. (2003) *Histoire des nombres complexes: entre algèbre et géométrie*. CNRS Editions.

ROGALSKI M. (2002) Peut-on élaborer une situation didactique d'introduction aux nombres complexes par l'histoire de l'équation du troisième degré, en Terminale scientifique ? *Actes de la XIe EEDM*, 387-393, La Pensée Sauvage, Grenoble.

ROSSEEL H. et SCHNEIDER M. (2003) Ces nombres que l'on dit imaginaire. *Petit x*, **63**, 53-71.

ROSSEEL H. et SCHNEIDER M. (2004) Des nombres qui modélisent des transformations. *Petit x*, **64**, 7-34.

SFARD A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, **22**, 1-36.

TANAZEFTI R. (2013) *Entre représentations mathématiques et représentations sémiotiques : Quelle opérationnalité des nombres complexes au lycée ?* Mémoire de Master, Université Virtuelle de Tunis.