

ACTIVITÉ ... Le principe des « cages à pigeons »

Denise GRENIER

Institut Fourier et IREM de Grenoble

Questions

- (1) Faites cette expérience plusieurs fois :
Choisir cinq nombres entiers naturels.
Vérifier qu'au moins deux d'entre eux ont une différence qui est un multiple de 4.
Expliquer ce résultat.
- (2) Si vous choisissez quatre nombres seulement, est-ce encore vrai ?
À nouveau, faites plusieurs expériences pour avoir la bonne conjecture !
- (3) Généralisation. On suppose maintenant qu'on se donne $n+1$ entiers naturels.
Prouver qu'au moins deux d'entre eux ont une différence qui est un multiple de n .

Le « principe des cages à pigeons » est un outil performant pour résoudre ces questions. En voici un énoncé.

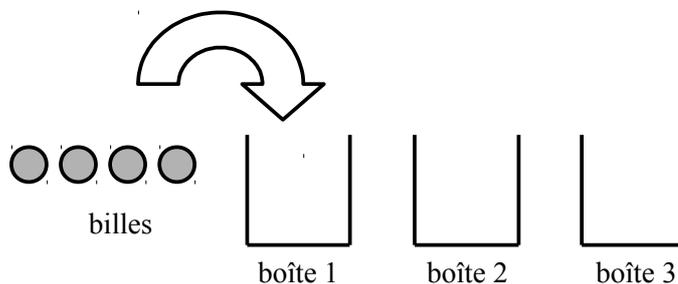
Principe des « cages à pigeons »*

Quel que soit n (un entier naturel), si on a rangé $n+1$ objets dans n boîtes, alors au moins une de ces boîtes contient deux objets ou plus.

Le travail essentiel consiste à déterminer parmi les données, lesquelles il faut choisir pour les « cages » et lesquelles pour les « pigeons ».

Ici, les cages et les pigeons sont des nombres, mais pas les mêmes types de nombres. L'énoncé de base de ce principe est très facile à comprendre. Le voici.

Exemple. Quelle que soit la façon de ranger quatre billes dans trois boîtes, il y aura au moins une boîte qui contiendra deux billes, – c'est-à-dire deux, trois ou quatre billes. Essayez ! (dans cet exemple, $n = 4$)



* ou « principe de Dirichlet ». La preuve de ce principe n'est pas très difficile. Essayez !