CONCEPTS, OBJETS, SYMBOLES, ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES …

Quelques réflexions sur l'épistémologie et la didactique[1]

Isabelle BLOCH
Professeure émérite - Université de Bordeaux

Résumé. Que sont les objets mathématiques ? Leur nature est-elle abstraite ou issue du concret ? Les mathématiciens et philosophes ont élaboré au 20ème siècle de nouvelles réponses à ces questions posées depuis l'Antiquité ; ce siècle dernier a aussi été celui où ces positions philosophiques et épistémologiques ont eu un impact sur les décisions prises pour l'enseignement des mathématiques. Des études concernant la sémiotique des mathématiques ont aussi été largement investies. Les recherches en didactique des mathématiques actuelles se positionnent, plus ou moins explicitement, sur ces questions épistémologiques.

Mots-clés. Concepts mathématiques, signes mathématiques, épistémologie.

Abstract. What are mathematical objects and concepts? Are they only abstractions or coming from the real world? Mathematicians and philosophers have elaborated new answers to these very old questions. The 20th century has also been the one where these epistemological positions had an impact on the decisions concerning the teaching of mathematics. Studies on the semiotic facet of mathematics have also been undertaken. Researchers in didactic of mathematics take position themselves more or less clearly on these epistemological questions, that deserve to be lightened.

Key-words. Mathematical concepts, idealities, mathematical symbols, epistemology.

Introduction

Ce court texte est issu des réflexions d'une mathématicienne-didacticienne sur la nature des mathématiques, les avatars des objets dont elles s'occupent, et les difficultés maintes fois pointées de leur enseignement. Dans un premier temps, je reviens quelque peu sur l'épistémologie des mathématiques et les développements historiques des conceptions philosophiques les concernant. Les considérations sur la nature des concepts mathématiques ont pu, à certaines époques, orienter directement ou non les choix faits au niveau institutionnel pour leur enseignement. Et, quoi qu'il en soit, les représentations des mathématiques influencent fortement les décisions pédagogiques et didactiques (y compris au niveau individuel) : je reviendrai très brièvement sur cet aspect dans la dernière partie de cet article.

1. Les concepts mathématiques

Que sont les mathématiques ? Quelle est la nature des objets dont elles s'occupent ? Ces questions n'ont cessé de susciter des réflexions philosophiques, y compris chez les mathématiciens eux-mêmes.

On connaît la conception platonicienne : les objets mathématiques existent de façon indépendante et essentielle, en dehors des constructions qui leur sont attachées, lesquelles sont développées par les mathématiciens. Cette conception a à voir avec une thèse métaphysique, plus précisément ontologique, dans laquelle la parenté de l'âme avec les réalités intelligibles, éternelles et immuables, la rend capable de les saisir.

1 Ce texte est la reprise (avec l'aimable autorisation des éditeurs) d'un article publié dans les Cahiers Rationalistes, **631**, p. 18-29. Merci à Alain Billecoq, Michel Henry et Jean-Pierre Kahane pour leur relecture attentive et leurs suggestions. Voir aussi www.union-rationaliste.org

Une autre conception, totalement opposée, est de soutenir que ces objets n'ont qu'une existence mentale dans l'esprit des mathématiciens : c'est aussi ce qui conduit à s'émerveiller (de façon un peu naïve…) de leur « déraisonnable efficacité » pour résoudre des problèmes dans le monde réel. Cette conception est celle des mathématiciens intuitionnistes du début du XXème siècle, comme Brouwer, lequel développe sa pensée dans le prolongement de celles de Kant et de Schopenhauer. Il s'oppose cependant au formalisme promu par le groupe Bourbaki, lequel soutient que la consistance de l'existence des objets mathématiques est étayée par les assertions formelles établies dans la théorie qui les concerne, et que la pragmatique de ces objets – leur ergonomie et la possibilité de les manipuler pour obtenir des résultats – peut aussi s'appuyer sur leur cohérence au niveau théorique (i.e. non contradictoires au sein d'une théorie logique). Cela ne signifie bien sûr pas que les mathématiques se réduisent à un ensemble de règles formelles, comme certains ont pu l'interpréter à tort – et tenter de l'imposer dans l'enseignement lors de la mémorable réforme dite des « maths modernes »[2]. Une nécessaire 'mise à plat' des mathématiques du milieu du 20ème siècle a été initiée à cette période, notamment par le groupe Bourbaki ; il faut noter qu'elle a entre autres permis à l'école française de mathématiques de demeurer l'une des meilleures au monde.

Pour les intuitionnistes, le formalisme ne permet pas de penser le continu et l'infini comme des concepts « existants », il faut donc admettre que l'on peut penser des objets mathématiques pour ainsi dire spirituels, au-delà de ce formalisme. C'est l'aptitude de l'esprit humain que de pouvoir se livrer à ce jeu de découverte de~~s~~ concepts qu'il (l'esprit humain) contiendrait implicitement.

En effet, à partir du 19ème et surtout du 20ème siècle, les mathématiciens ont développé des outils (comme la théorie des ensembles ou celle des catégories, l'analyse réelle ou complexe, la topologie générale, la théorie des espaces vectoriels de dimension infinie, la théorie de la mesure, etc…) qui ne renvoient à aucun objet « sensible », mais qui sont des structures formelles pouvant être applicables à de nombreux domaines mathématiques ou provenant d'autres sciences, y compris les plus récentes (probabilités et statistique, algorithmique, informatique ; physique quantique, etc…). L'efficacité de ces théories vient d'ailleurs de leur abstraction, qui fait qu'un même type de structure peut s'avérer adapté à l'étude de phénomènes d'origine très variée. Ainsi la théorie des catégories, théorie formalisatrice et généralisatrice – un savoir FUGS[3] par excellence, au sens de Robert et Rogalski – est-elle actuellement reprise par des didacticiens pour l'étude des différents aspects des nombres complexes et les transitions dans leur enseignement.

Ainsi que le dit Wikipédia :

> Cette théorie a été mise en place par Samuel Eilenberg et Saunders Mac Lane en 1942-1945, en lien avec la topologie algébrique, et propagée dans les années 1960-1970 en France par Alexandre Grothendieck, qui en fit une étude systématique. À la suite des travaux de William Lawvere, la théorie des catégories est utilisée depuis 1969 pour définir la logique et la théorie des ensembles ; elle peut donc, comme cette dernière, être considérée comme fondement des mathématiques. (consulté le 07/04/2015)

Notons que cette théorie, issue de la topologie algébrique, a été utilisée par C.Ehresmann en géométrie différentielle pour l'étude des variétés différentiables, des fibrés, etc... Ceci illustre bien son caractère FUGS.

2 La transposition des intentions des spécialistes dans l'enseignement est toujours délicate, peut donner lieu à malentendu, et la didactique nous a appris qu'elle ne pouvait se faire qu'avec des outils spécifiques très soigneusement élaborés.

3 Savoir FUGS : savoir formalisateur, unificateur, généralisateur, simplificateur.

La conception des objets mathématiques comme fondant leur validité *sur* et *dans* une théorie, cette représentation s'oppose aussi à une conception « matérialiste applicationniste » selon laquelle les mathématiques ne seraient que l'expression un peu formelle des réalités physiques, autrement dit, les mathématiques seraient quelque part des évidences matérielles (re)formulées en termes abstraits. Il faut noter que l'épistémologie des sciences expérimentales a également dépassé, avec la notion de modèle mathématique des phénomènes, cette conception étroitement terre-à-terre des constructions mathématiques.

Mais, ainsi que le dit Jean Toussaint Desanti :

> « Si la mathématique n'est ni du Ciel ni de la Terre, il importe de chercher le lieu où elle réside. Quel est donc ce lieu où s'inscrit le texte selon lequel naît la stricte parole mathématique ? » (Desanti, 2008).

La philosophie actuelle de la nature des objets mathématiques (selon Desanti et, à sa suite, Jean Petitot, 1991) conduit à une autre conception de la nature de ces objets : ceux-ci sont des entités (des idéalités dit JT Desanti : tout objet mathématique est un concept, et donc un objet en quelque sorte totalement abstrait) construites par l'articulation des théories mathématiques, à partir de l'expérience. Autrement dit, les objets mathématiques existent par et dans leurs relations avec les autres objets précédemment construits ou en train de l'être, mais à partir d'objets premiers – des constructions ayant leur origine dans la pratique des métiers, des nécessités sociales comme le commerce, etc. C'est la structure de ces relations entre objets qui permet d'attester de leur existence, car c'est elle qui permet d'agir sur eux, par des 'opérations' plus ou moins complexes, mais qui doivent toujours respecter les critères de validité de la théorie en jeu. Or les premiers objets mathématiques ont été construits en relation étroite avec des nécessités de comptage, de mesurage, etc. Les objets développés ultérieurement se sont appuyés au départ sur ces premiers concepts, puis, de construction en construction, ont acquis un caractère de plus en plus abstrait ; mais ils ne sont pas totalement détachés de leur origine première…

Donnons un exemple de ce processus : un objet premier étant considéré comme existant à partir de l'expérience – les nombres par exemple – on va pouvoir construire, à partir des nombres, des règles de transformation des calculs, qui donneront naissance à l'algèbre ; à partir de règles de calcul et de transformation des expressions algébriques, il sera possible d'imaginer des fonctions, qui dans un premier temps seront algébriques ; on peut ensuite imaginer ce concept de fonction étendu à des processus de mesure non rationnelle, comme les fonctions trigonométriques ; à partir des fonctions, dérivées et intégrales permettent d'imaginer de nouvelles fonctions avec de nouvelles propriétés, etc. Encore une fois, nous parlons là de la définition des *concepts* mathématiques, et non de leur utilisation pragmatique ou de leur découverte : il est clair que les habitants des différentes contrées n'ont pas attendu de voir écrit *cos x* pour découvrir la roue, le mouvement circulaire uniforme, et, disons, les figures géométriques associées : que l'on pense aux observations célestes ou aux Vietnamiens utilisant la noria pour puiser de l'eau, l'existence pragmatique des objets précède le plus souvent leur établissement théorique et conceptuel. Mais cette détermination théorique des concepts est ce qui va les intégrer dans un système de validation en relation avec d'autres objets déjà construits. On voit peut-être mieux cette construction – partie du réel mais s'en affranchissant ensuite – lorsqu'on pense à la géométrie, qui a construit ses objets à partir de l'expérience dans la géométrie euclidienne, pour s'en émanciper ensuite et considérer des géométries sphériques (pouvant encore être référées bien sûr à la géométrie de la Terre) puis des géométries non euclidiennes bâties de façon tout à fait arbitraires, ou plutôt, en fonction des phénomènes à décrire et des nécessités internes du calcul mathématique[4]. La théorie des variétés différentiables, fibrés, etc. en est l'un des résultats.

La nature des objets mathématiques induit donc celle de leur validité, et cela – cette construction – détermine la nature des méthodes utilisées en mathématiques pour prouver une assertion : celle-ci doit être nécessaire dans la théorie dont les objets sont issus, mais ne peut être prouvée que par les outils de cette théorie, même si des dispositifs appropriés permettent de faire l'expérience du bon 'fonctionnement' des dits objets. Ainsi la vérité en mathématiques est *nécessaire* et non contingente : on peut, sur de tels objets abstraits, énoncer des propriétés parfaitement fausses et absurdes[5] mais, d'une part une expérience bien conduite, sur un exemple pertinent, pourra montrer que la propriété testée a des possibilités – ou non – d'être vraie, d'autre part, une preuve formelle pourra démontrer quelle est la propriété correcte.

Les dispositifs *ad hoc* peuvent être assez simples pour les objets « primaires », comme des nombres entiers pour le dénombrement de collections finies ; bien entendu, dans une théorie très complexe, les dispositifs permettant de s'assurer de la validité des conjectures sont beaucoup plus difficiles à construire et à vérifier. Et au final, c'est donc toujours par un raisonnement formel *dans la théorie concernée* que le mathématicien pourra prouver la validité de ses déclarations. Les théories doivent donc être fondées par une axiomatique, qui sera en charge de dire quels sont les énoncés valides ou non. Le théorème de Gödel a ensuite montré que dans toute théorie demeurent des énoncés indémontrables dans la théorie.

Ces considérations internes aux mathématiques ne résolvent en rien le problème récurrent du rapport qu'entretiennent (que continuent à entretenir ?) les objets du monde réel avec les abstractions mathématiques. Comme nous l'avons dit, ces liens ont toujours été déclarés dans les théorisations scientifiques, mais ils ont aussi toujours été difficiles à expliciter et à exhiber. Nous allons revenir sur ce point en partant du point de vue de la philosophie idonéiste développée au 20ème siècle.

Nous nous intéresserons ensuite aux *signes symboliques* avec lesquels les mathématiques travaillent, à leur nature particulière et aux malentendus qu'ils peuvent susciter. De plus en plus souvent, des analyses sémiotiques sont conduites, notamment en didactique des mathématiques, afin de comprendre la nature des signes employés à différents niveaux d'expertise mathématique, et les obstacles afférents au niveau de l'apprentissage.

2. La transition du monde réel aux mathématiques : schématisation et modélisation selon Gonseth

Si de nombreux savants ont tenté de décrypter le rapport des objets du monde réel aux concepts mathématiques, il en est un qui a édifié un système d'explication mais aussi d'élaboration de ce rapport : il s'agit du mathématicien suisse Ferdinand Gonseth (1890-1975). Ferdinand Gonseth créa en 1947, avec Gaston Bachelard et Paul Bernays, une revue internationale de philosophie de la connaissance, intitulée *Dialectica*. Son ouvrage de référence, écrit entre 1945 et 1955, comporte 6 tomes et s'intitule *La géométrie et le problème de l'espace*. Le point de vue de Gonseth est appelé l'idonéisme, philosophie qui veut penser le rapport des mathématiques (existantes et en construction) au monde de l'expérience, dans un double souci de *vérité* et de *réalité*.

4 Voir ci-dessous le paragraphe sur F. Gonseth.

5 Et c'est parfaitement autorisé, malgré les réactions parfois très vives de certains enseignants…

Pour ce faire, Gonseth définit ce rapport dans un processus qui fera passer de la réalité à un *schéma* de cette réalité, un schéma étant un support écrit, dessiné… qui tend vers l'abstraction mais doit conserver une partie des relations qu'entretiennent entre eux les objets réels. « Gonseth donne ainsi un caractère « expérimentable » à la géométrie », ainsi que le dit Bontems (2014) – « caractère qu'il étend ensuite à l'algèbre et à la logique ». Un schéma est construit dans ce que Gonseth appelle un *horizon de réalité*, celui-ci pouvant être plus ou moins abstrait, suivant le niveau de conceptualisation visé ou à l'œuvre. Par exemple une figure de géométrie s'inscrira explicitement dans un horizon de réalité relatif à la géométrie euclidienne, alors qu'un plan de menuisier ne l'évoquera qu'implicitement et ne formalisera pas de la même façon les relations de parallélisme, d'orthogonalité, etc... Le raisonnement abstrait s'appuie ensuite sur ce schéma imparfait pour développer une connaissance plus aboutie dans un horizon de réalité mathématique formalisé.

Mais Gonseth a toujours soutenu, de concert avec Bachelard, que la logique formelle ne peut servir de fondement a priori à une théorie de la connaissance ; de même que les concepts mathématiques ne peuvent, non plus, être aplatis sur le monde réel dont est partie la schématisation. La philosophie de F. Gonseth est en effet proche de celle de G. Bachelard. Pour ces deux penseurs, les objets mathématiques ne sont pas des constructions idéales et non reliées de l'esprit humain, ainsi que le prétend Brouwer ; ce ne sont pas non plus de simples conséquences des objets du monde réel, mais il y a une dialectique de la construction de ces objets abstraits.

Si l'on pense aux prolongements introduits ensuite par Desanti (cf. Desanti, 1968 ; Petitot, 1991, op.cit.), alors la construction « en étages imbriqués » des mathématiques depuis la conceptualisation et la modélisation du monde réel s'éclaire : il ne s'agit pas de rejeter le formalisme ni l'intuitionnisme, mais de regarder quand les mathématiques – et les mathématiciens ! – utilisent, de façon alternée, des preuves pragmatiques (physiques, pourrait-on dire), des démonstrations formelles, des justifications basées sur l'intuition. Et là, on rejoint les théories de didactique des mathématiques, qui observent ces allers-retours dans les situations d'apprentissage et dans le processus de conceptualisation – nous y revenons brièvement ci-dessous.

Ce que nous devons maintenant interroger, c'est la nature et la fonction des signes mathématiques qui ont permis de construire ces schémas, plus ou moins complexes, à différents niveaux de formalisation et de conceptualisation.

3. Les signes mathématiques

La nature des objets mathématiques a des conséquences sur les signes avec lesquels on fait des mathématiques : ces symboles sont régis par des règles internes, intrinsèques. Par exemple les signes algébriques ont leur fonctionnement propre qui conduit à factoriser, simplifier (ce qui serait absurde avec les signes langagiers : une plaisanterie très appréciée des mathématiciens permet de « prouver » que la fraction *cheval/oiseau* est égale au nombre pi), dériver, intégrer, etc… Il faut remarquer que les mathématiques s'expriment dans de nombreux registres : les registres numérique, algébrique, fonctionnel, graphique, géométrique, formel sont ceux que l'on identifie couramment.

Ainsi que le disent de nombreux chercheurs, les signes sont donc des *instruments* du travail mathématique. Sans connaître leurs règles internes d'écriture, de transformation, de changement de registre, il est impossible de faire des mathématiques, et notamment de prouver par des démonstrations.

Les signes mathématiques sont particulièrement complexes et ont, comme nous l'avons dit, un fonctionnement très codifié ; cependant certains signes prennent des sens très différents suivant le contexte – numérique, algébrique, géométrique, etc… Un sémioticien, d'ailleurs lui-même mathématicien, a construit une théorie sémiotique qui s'adapte parfaitement à la multiplicité et la complexité des écritures mathématiques : il s'agit de Charles Sanders Peirce (1839-1914), sémiologue et philosophe américain. Il est le fondateur du courant pragmatiste avec William James et, avec Ferdinand de Saussure, un des deux pères de la sémiologie (ou sémiotique) moderne ; et il est considéré comme un des plus grands logiciens[6].

La sémiotique générale[7] de C.S.Peirce est conçue pour l'étude de signes de nature très variée, et donc particulièrement adaptée aux mathématiques. De plus Peirce ne dissocie pas pensée et signe, et propose une interprétation dynamique du lien entre un signe et un objet, interprétation qui peut permettre de penser les changements de statut des symboles et des énoncés, en particulier dans la pratique mathématique et son enseignement/apprentissage. Cette prise en compte de l'aspect dynamique permet également d'aller plus loin que l'étude de la simple mise en œuvre de registre de représentation : cet aspect est associé à la dimension opérationnelle des signes mathématiques, c'est-à-dire à la possibilité qu'ils offrent de fabriquer de nouveaux signes par des règles plus ou moins algorithmiques.

Soulignons les dimensions fortes de la pragmatique peircienne[8] :

Dans cette pragmatique, il n'y a pas d'un côté *la pensée,* de l'autre *les signes* qui la représentent, qui en rendent compte, voire qui la médiatisent : la pensée est dans sa nature même un signe. Ainsi une pensée ne sera pas forcément un mot (ou une suite de mots), mais elle peut être une image, ce n'en est pas moins un signe : si je pense à la couleur verte, j'aurai une image ou une impression de vert…

Tout signe est triadique et composé de 3 éléments qui sont des fonctions et non des attributions : le *representamen* : R ; *l'objet* O : ce qui représenté par R ; *l'interprétant* I : ce qui met en relation R et O. Ainsi que le dit Peirce (*Ecrits sur le signe,* réédité 1978) :

> Un signe ou representamen est un Premier qui est dans une relation triadique si authentique avec un Second appelé son objet qu'il peut déterminer un troisième, appelé son interprétant, à être dans la même relation triadique avec son objet que celle dans laquelle il est lui-même avec ce même objet. (Peirce, in Collected Papers, 2).

Ces trois places sont des fonctions identifiées dans un processus sémiotique donné : ainsi « Pomme » peut être *representamen* de l'objet pomme, ou « Pomme » peut se trouver *interprétant* du mot « golden », ou « Pomme » est *objet* du mot « apple » dans une traduction. Dans un processus sémiotique l'interprétant d'un signe est dépendant du contexte d'interprétation. Ainsi « apple » peut aussi renvoyer à une marque d'ordinateur…

Le sens d'un signe n'est jamais figé : l'interprétation est un processus dont le sens final est en devenir. Si un signe est vu comme une triade, l'interprétant de cette triade peut à son tour devenir un *representamen*, point de départ d'une nouvelle triade-signe et par conséquent d'une nouvelle interprétation.

Tout phénomène (partant, chaque instance de la pensée-signe) appartient à l'une des trois catégories suivantes : *priméité* (catégorie de la qualité générale, de la possibilité : signes vus comme des *icônes*, c'est le cas de l'impression de vert ci-dessus), *secondéité*

6 dit Wikipédia…

7 Ce paragraphe sur Peirce est extrait de l'article Bloch I., Gibel P. (2011).

8 Pour une description moins schématique de la pragmatique peircienne, se reporter aux écrits sur C.S. Peirce, cf. le site www.signosemio.com ou http://perso.numericable.fr/robert.marty/semiotique/76-fr.htm

(catégorie de l'existence, des faits, des actions et réactions, signes qui sont des *indices* : tout ce vert me fait penser au printemps en montagne…), *tiercéité* (catégorie de la loi, de la médiation et signes *symboles* dont l'interprétant est nécessairement un *argument*). Ainsi, un signe peut être une *icône* (priméité) de ce à quoi il renvoie, comme la Tour Eiffel de Paris ; il peut être un *indice* (secondéité) comme un panneau routier indiquant « Paris » ; il peut être un signe-règle, comme un plan de Paris.

Les phénomènes mathématiques et les signes qu'ils induisent appartiennent tous à l'ordre de la secondéité ou de la tiercéité : les interprétants mathématiques d'une situation conduisent à énoncer des règles, des propriétés. Cependant :

1) toutes les règles mathématiques ne sont pas de même niveau : l'interprétation mathématique de '3' nécessite une relation de signe-règle indiciel – qui nous dit quelque chose de son objet – car il y a une loi qui met en relation le signe '3' et le cardinal d'un ensemble à trois éléments. Par contre '145' est un signe-règle 'argumental', qui implique la tiercéité et que Peirce appelle *symbole* : pour relier ce signe au cardinal convenable, il faut de plus connaître la règle de numération employée.

> Un argument est un signe dont l'interprétant représente son objet, comme étant un signe ultérieur par le moyen d'une loi. (Op.cit. p.183).

2) les personnes pratiquant des mathématiques (élèves par exemple) ne voient pas toujours les signes avec l'interprétant du niveau requis : ainsi un nombre peut n'être vu par certains élèves que comme une succession de chiffres ; l'élève peut donc ne pas voir la règle contenue dans le nombre, par exemple ne pas du tout relier ce nombre à une quantité. Un *representamen* sera interprété de façon variable selon le niveau de la sémiose dans laquelle se trouve l'interprétant effectif, et un signe produit à un certain niveau peut être interprété à un niveau inférieur : c'est ce qu'on appelle la « déflation interprétative ». Précisons que ce phénomène de déflation interprétative se produit régulièrement à tous les niveaux d'enseignement des mathématiques, et il est compatible avec la théorie peircienne du sens comme étant *à venir* : le mathématicien (professeur par exemple) énonce un concept dont la compréhension ne pourra mieux advenir que dans les relations futures de ce concept avec les objets mathématiques de la même théorie ou des théories connexes, pensons par exemple aux concepts de limite ou d'intégrale (cf. aussi Bloch, 2009).

Conclusion : Enseigner les mathématiques

Les mathématiques ont donc une dimension heuristique – une dimension de recherche, d'établissement de conjectures, d'expérience – que l'on retrouve aussi bien dans leur enseignement que dans la recherche. Cette composante est liée à la dimension 'réelle' des mathématiques, ainsi que la pensait Gonseth : ceci signifie qu'en mathématiques on peut, tout au moins dans un premier temps de l'étude, chercher des preuves pragmatiques, faire des dessins, des calculs, des expérimentations, et se baser sur l'intuition, ce que les mathématiciens, en herbe ou expérimentés, ne manquent pas de faire.

De même, lors de la recherche d'un problème, le mathématicien (ou l'élève-mathématicien) pourra se placer dans le système formel et prouver ses assertions avec les règles entièrement codifiées de sa théorie mathématique, sans que cela ne le déstabilise, puisque ce système est attesté et permet de tester la véridiction d'une proposition ; on parlera alors de *jeux d'intérieur*, selon Hintikka (Hintikka, 2007 ; voir aussi Barrier, 2008). Mais le chercheur pourra éprouver le besoin, à un moment, de se convaincre de la justesse de sa démarche, et il reviendra au contexte du problème, à la consistance de ses résultats, par une réflexion intuitive sur les objets en jeu, réflexion qui lui permettra de dire : « Ce résultat est logique avec mes hypothèses de départ, je suis conforté par la cohérence de mes calculs et de ma solution ». On parle alors de *jeux d'extérieur* : le chercheur est sorti du système formel.

La pragmatique de Peirce – c'est-à-dire la mise en œuvre des catégories de son système sémiotique dans des situations – permet d'engager une réflexion sur des mécanismes envisageables de construction des situations à dimension heuristique qui s'appuient sur cette dynamique, en vue d'un enseignement des mathématiques mettant en relation les différents *objets mathématiques* relatifs au thème enseigné. Il est également possible d'analyser, soit a priori, soit a posteriori, les *sémioses* à l'œuvre dans une situation, c'est-à-dire les processus interprétatifs possibles ou effectifs dans le système de signes disponibles.

En didactique des mathématiques, la théorie des situations didactiques dite TSD, élaborée par Guy Brousseau au début des années soixante-dix[9], est celle qui a cherché à construire ces situations. Remarquons que ces constructions ne sont pas réservées aux mathématiques élémentaires, et que de plus en plus, afin d'enseigner les mathématiques en introduisant du sens à tous les degrés, les didacticiens tentent d'élaborer de telles situations y compris pour des savoirs de haut niveau – fonctions, intégrales, calcul différentiel (cf. Bloch 1999 ; Bloch et Gibel 2011)…

Il est possible dans l'enseignement, bien entendu, et fortement souhaitable, de relier les théories mathématiques – dont on aura compris la logique et la construction – aux sciences expérimentales. Ceci pourrait faire la matière d'un autre article…

Certes la construction de situations pour l'enseignement n'est contrainte, et c'est déjà important (et fort difficile à réaliser…), que par la pertinence mathématique, et par la faisabilité. Il s'ensuit que des théories didactiques différentes et complémentaires peuvent s'atteler à ce travail de construction du sens mathématique à tous les niveaux… Ainsi que je l'écrivais dans la préface du livre de Saddo Ag Almouloud sur la didactique :

> Les théories de l'enseignement s'intéressent aussi au professeur, à son rôle, à l'ergonomie des situations qu'il peut mettre en œuvre en classe, à ses contraintes, à sa formation académique comme didactique ; et elles ambitionnent de modéliser l'élève dans ses productions face à un apprentissage.
> Le destin des théories des sciences humaines est de se multiplier pour s'adapter à cette réalité et pouvoir en rendre compte. Leur multiplicité ne doit donc pas être vue comme une imperfection mais elle fait partie des mutations et des évolutions normales du développement d'un champ de recherches dans ce domaine. L'histoire des sciences – et même des sciences expérimentales ou des mathématiques ! – prouve que les théories se créent, se modifient, et que certaines disparaissent ou sont absorbées dans une théorie plus ergonomique ou plus achevée. Ainsi la théorie des champs magnétiques de Maxwell est une unification des théories électriques et magnétiques ; la relativité est une théorie qui réinterprète la théorie newtonienne de la gravitation, en remplaçant la notion de force à distance (l'attraction des corps) par la courbure de l'espace-temps créée par la masse. En mathématiques, les théories de la convergence ou de l'intégrale issues du 19ème siècle ont dû être précisées et étendues pour ne pas se trouver en contradiction relativement à des fonctions que les mathématiciens de l'époque n'avaient pas imaginées…
>
> Les sciences humaines ont ceci de particulier, par rapport aux mathématiques, que les concepts relatifs aux phénomènes que l'on souhaite modéliser sont à construire – mais il en est de même en sciences expérimentales ainsi que le dit le philosophe et physicien M.Blay. De plus, dans le domaine des activités humaines, la vérification de la

9 Sur la TSD, voir le site de G.Brousseau, www.guy-brousseau.com

> pertinence des théories ne peut s'effectuer que par une confrontation à la contingence qui s'avère elle-même délicate, le chercheur ne devant en aucun cas prendre ses cadres d'analyse pour la réalité… réalité qu'il a reconstruite, pour l'observer et l'analyser. (Bloch I., Prefacio)

Nous conclurons donc que la complexité des mathématiques, de leur système de désignation, des situations qui leur donnent sens et consistance, des difficultés de leur enseignement… ne peut se résoudre en déclarant simplement que les mathématiques sont un outil pour les sciences, ou qu'elles sont une fabuleuse construction complètement hors sol… la réalité des mathématiques est bien plus sophistiquée et intéressante, pour le plus grand plaisir des mathématiciens !

Bibliographie

AG ALMOULOUD S. (2007) *Fundamentos da Didática da Matemática*, Editora UFPR (Universidade Federal de Parana, Brésil) ISBN: 978-85-7335-190-3.

BARRIER, T. (2008) Sémantique selon la théorie des jeux et situations de validation en mathématiques, *Education et didactique,* vol.2, n°3.

BLAY M. (2006) Concepts, faits scientifiques et théories. *Raison présente,* **157-158**, 31-40.

BLOCH I. (1999) L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. *Recherches en didactique des mathématiques*, **19/3**, 135-193.

BLOCH I. (2009) 'Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves : Comment travailler leur pertinence en formation ?' *Petit x,* **81**, 25-52.

BLOCH I., GIBEL P. (2011) Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques : étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques* **31-2**, 191-227, La Pensée Sauvage.

BONTEMS, V. (2014) Les mathématiques et l'expérience selon Ferdinand Gonseth. *Bulletin Association Ferdinand Gonseth*, **158**.

DESANTI J.T. (réédité 2008) *Idéalités mathématiques*, Éditions du Seuil, Paris, 1968.

GONSETH F. (1945-1955) *La géométrie et le problème de l'espace*, Tomes 1 à 6, Neuchâtel : Editions du Griffon.

HINTIKKA J. (2014) *Les principes des mathématiques revisités*, Paris, Vrin, coll. Mathesis.

PEIRCE C. S. (1978) *Écrits sur le signe (traduction et commentaires de Deledalle, G.).* Paris : Seuil.

PETITOT J. (1991) Idéalités mathématiques et Réalité objective. Approche transcendantale, *Hommage à Jean-Toussaint Desanti*, G. Granel ed., 213-282, Editions TER, Mauvezin.

ROGALSKI M. (2012) Approches épistémologique et didactique de l'activité de formalisation en mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 504–513). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012